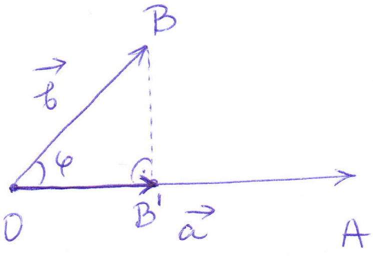
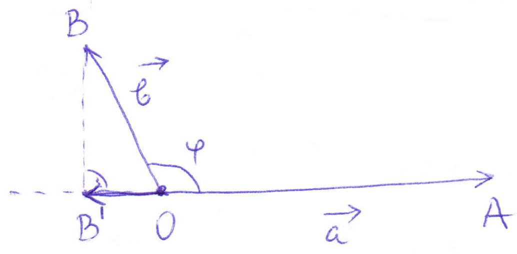
МЕТРИЧНИ ДЕЙСТВИЯ СЪС СВОБОДНИ ВЕКТОРИ

• **Ортогонална проекция и скаларно произведение**





Насочената отсечка $\overrightarrow{OB'}$ се нарича векторна ортогонална проекция на $\vec{b}$ върху $\vec{a}$ и означаваме

$$\overrightarrow{OB'} = \overrightarrow{\mathrm{proj}_{\vec{a}}\vec{b}}.$$

Числото $\mathrm{proj}_{\vec{a}}\vec{b} = \varepsilon\|\overrightarrow{OB'}\|$ се нарича (скаларна) ортогонална проекция на $\vec{b}$ върху $\vec{a}$, като $\varepsilon = 1$, ако $\vec{a} = \overrightarrow{OA}$ и $\overrightarrow{OB'}$ са еднопосочно колинеарни (т.е. φ е остър ъгъл) и $\varepsilon = -1$, ако $\vec{a} = \overrightarrow{OA}$ и $\overrightarrow{OB'}$ са разнопосочно колинеарни (т.е. φ е тъп ъгъл).

От правоъгълния $\triangle OBB'$ имаме $\mathrm{proj}_{\vec{a}}\vec{b} = \|\vec{b}\|\cos\varphi$.

Тогава от $\vec{a}\vec{b} = \|\vec{a}\|.\underline{\|\vec{b}\|.\cos\varphi}$ получаваме

$$\vec{a}\vec{b} = \|\vec{a}\|.\mathrm{proj}_{\vec{a}}\vec{b},$$ откъдето

$$\mathrm{proj}_{\vec{a}}\vec{b} = \frac{\vec{a}\vec{b}}{\|\vec{a}\|}, \quad \vec{a} \neq \vec{o}.$$

Задача. В Oxy е даден $\triangle ABC$ с върхове $A(0,-2)$, $B(8,4)$ и $C(3,-6)$. Намерете:

а) дължините на страните на $\triangle ABC$;

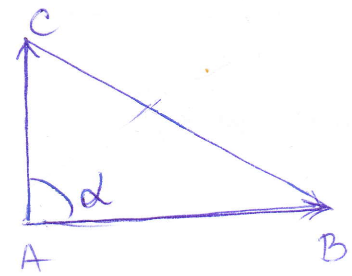
$\overrightarrow{AB} = B - A = (8,4) - (0,-2) = (8,6) \Rightarrow \|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{8^2 + 6^2} = \sqrt{100} = 10$

$\overrightarrow{AC} = C - A = (3,-6) - (0,-2) = (3,-4) \Rightarrow \|\overrightarrow{AC}\| = \sqrt{3^2 + (-4)^2} = \sqrt{25} = 5$

$\overrightarrow{BC} = C - B = (3,-6) - (8,4) = (-5,-10) \Rightarrow$

$\|\overrightarrow{BC}\| = \sqrt{(-5)^2 + (-10)^2} = \sqrt{125} = 5\sqrt{5}.$

б) $\cos \sphericalangle BAC$



$$\cos \sphericalangle BAC = \frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}}{\|\overrightarrow{AB}\| \cdot \|\overrightarrow{AC}\|}$$

$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 8 \cdot 3 + 6 \cdot (-4) = 0 \Rightarrow$ $\underline{\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{AC}}$

$\overrightarrow{AB}(8, 6)$

$\overrightarrow{AC}(3, -4)$

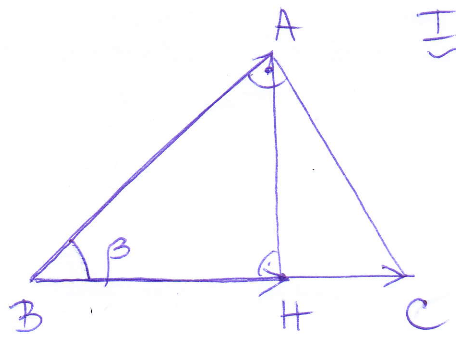
в) $\cos \sphericalangle ABC = ?$

$\overrightarrow{BA}(-8, -6)$

$\overrightarrow{BC}(-5, -10)$ $\Rightarrow \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = 40 + 60 = 100 \Rightarrow$

$$\cos \sphericalangle ABC = \frac{\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC}}{\|\overrightarrow{BA}\| \cdot \|\overrightarrow{BC}\|} = \frac{100}{10 \cdot 5\sqrt{5}} = \frac{2}{\sqrt{5}}.$$

г) координатите на т. H – петата на височината в $\triangle ABC$ през върха A;



I начин

$$\|\overrightarrow{BH}\| = \operatorname{proj}_{\overrightarrow{BC}} \overrightarrow{BA} = \frac{\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC}}{\|\overrightarrow{BC}\|} = \frac{100}{5\sqrt{5}} = \frac{20}{\sqrt{5}} = \frac{20\sqrt{5}}{5} = 4\sqrt{5}.$$

$\|\overrightarrow{BC}\| = 5\sqrt{5} \Rightarrow \|\overrightarrow{CH}\| = \sqrt{5}$

$$\Rightarrow BH : CH = 4 : 1 \Rightarrow \overrightarrow{OH} = \frac{4\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OB}}{5} \Rightarrow$$

$$\overrightarrow{OH} = \frac{1}{5}\left[4(3, -6) + (8, 4)\right] = (4, -4) \Rightarrow \underline{H(4, -4)}.$$

II начин $\quad \overrightarrow{BH} = x \cdot \overrightarrow{BC}, \ x = ?, \ \underline{\overrightarrow{BC}(-5, -10)}$

$\overrightarrow{BH} = x \cdot (-5, -10) = (-5x, -10x)$

$\overrightarrow{AH} = \overrightarrow{BH} - \overrightarrow{BA} = (-5x, -10x) - (-8, -6) =$

$= \underline{(8 - 5x, 6 - 10x)}$

От $\overrightarrow{AH} \perp \overrightarrow{BC} \Rightarrow \overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{BC} = 0 \Leftrightarrow$

$-5(8 - 5x) - 10(6 - 10x) = 0 \Leftrightarrow$

$8 - 5x + 2(6 - 10x) = 0 \Leftrightarrow 20 - 25x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{4}{5}$

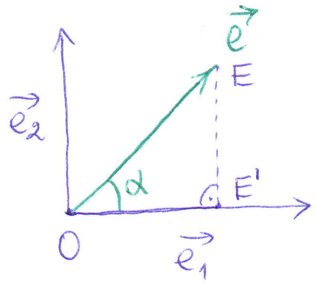
$\Rightarrow \overrightarrow{BH} = \frac{4}{5}\overrightarrow{BC} = \frac{4}{5}(-5, -10) = (-4, -8) \Rightarrow \overrightarrow{OH} - \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{BH} \Rightarrow$

$\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BH} =$

$= (8, 4) + (-4, -8) = (4, -4)$

- Директорни косинуси на посоката, определена от вектор

В равнината Oxy разглеждаме ортонормирана база $\{\vec{e_1}, \vec{e_2}\}$, т.е. $\vec{e_1}^2 = \vec{e_2}^2 = 1$, $\vec{e_1}\vec{e_2} = 0$ и единичен вектор $\vec{e}$ (т.е. $\|\vec{e}\| = 1 \Leftrightarrow \vec{e}^2 = 1$), който сключва ъгъл α с $\vec{e_1}$.



$\vec{OE} = \vec{e}(x, y) \Leftrightarrow E(x, y)$

$x = OE' = \|\vec{e}\| \cos\alpha = \cos\alpha$

$y = EE' = \|\vec{e}\| \sin\alpha = \sin\alpha$

$\Rightarrow \underline{\vec{e}(\cos\alpha, \sin\alpha)}$

В тримерното пространство разглеждаме ортонормирана база $\{\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3}\}$, т.е. $\vec{e_1}^2 = \vec{e_2}^2 = \vec{e_3}^2 = 1$ и $\vec{e_1}\vec{e_2} = \vec{e_1}\vec{e_3} = \vec{e_2}\vec{e_3} = 0$ и единичен вектор $\vec{e}$, който сключва ъгли α, β и γ, съответно с $\vec{e_1}$, $\vec{e_2}$ и $\vec{e_3}$, т.е.

$\sphericalangle(\vec{e}, \vec{e_1}) = \alpha$, $\sphericalangle(\vec{e}, \vec{e_2}) = \beta$ и $\sphericalangle(\vec{e}, \vec{e_3}) = \gamma$.

$$\Rightarrow \cos\alpha = \frac{\vec{e}\,\vec{e_1}}{\|\vec{e}\|.\|\vec{e_1}\|} = \underline{\vec{e}\,\vec{e_1}} \text{ и аналогично}$$

$\cos\beta = \vec{e}\,\vec{e_2}$ и $\cos\gamma = \vec{e}\,\vec{e_3}$.

Нека $\vec{e} = x\vec{e_1} + y\vec{e_2} + z\vec{e_3}$, $x, y, z = ?$

$$\text{От } \vec{e}\,\vec{e_1} = (x\vec{e_1} + y\vec{e_2} + z\vec{e_3})\vec{e_1} = x\underbrace{\vec{e_1}^2}_{=1} + y\underbrace{\vec{e_1}\vec{e_2}}_{=0} + z\underbrace{\vec{e_1}\vec{e_3}}_{=0} =$$

$$= x\vec{e_1}^2 = \underline{x = \cos\alpha}$$

Аналогично

$$\vec{e}\,\vec{e_2} = (x\vec{e_1} + y\vec{e_2} + z\vec{e_3})\vec{e_2} = x\underbrace{\vec{e_1}\vec{e_2}}_{=0} + y\underbrace{\vec{e_2}^2}_{=1} + z\underbrace{\vec{e_2}\vec{e_3}}_{=0} = y$$

и $\vec{e}\,\vec{e_2} = \cos\beta \Rightarrow y = \cos\beta$ и

$z = \cos\gamma$.

$\Rightarrow \underline{\vec{e}(\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)}$.

директорни косинуси на посоката, определена от вектора $\vec{e}$

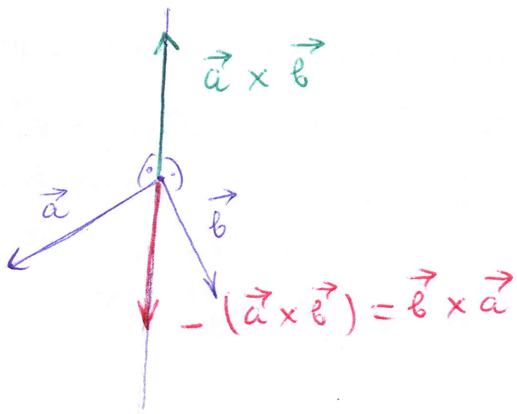
Дадени са т. $A(-2,1,3)$ и $B(0,-1,2)$. Намерете директорните косинуси на посоката, определена от $\overrightarrow{AB}$.

$\overrightarrow{AB}(2,-2,-1) \Rightarrow \|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{4+4+1} = 3 \Rightarrow$ нормираме $\overrightarrow{AB}$

Нека $\vec{e} = \dfrac{\overrightarrow{AB}}{\|\overrightarrow{AB}\|} \Rightarrow \vec{e} = \left(\dfrac{2}{3}, -\dfrac{2}{3}, -\dfrac{1}{3}\right) \Rightarrow$ ако α, β и γ са съответно ъглите, които $\overrightarrow{AB}$ сключва с Ox, Oy и Oz, то $\cos\alpha = \dfrac{2}{3}$, $\cos\beta = -\dfrac{2}{3}$ и $\cos\gamma = -\dfrac{1}{3}$.

* * *

• Векторно произведение на свободни вектори



Тъй като ако $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{a} \times \vec{b})$ образуват дясна база, то $(\vec{b}, \vec{a}, -(\vec{a} \times \vec{b}))$ също са дясна база $\Rightarrow -(\vec{a} \times \vec{b}) = \vec{b} \times \vec{a}$.

Нека $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ е дясна ортонормирана база, т.е. $\vec{e}_1 \perp \vec{e}_2 \perp \vec{e}_3$ и $\|\vec{e}_1\| = \|\vec{e}_2\| = \|\vec{e}_3\|$.

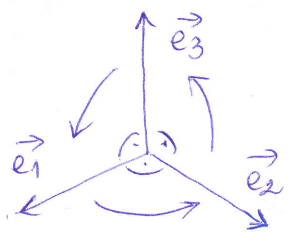
Тогава $\vec{e}_1 \times \vec{e}_2 \perp \vec{e}_1$ и $\vec{e}_2 \Rightarrow \vec{e}_1 \times \vec{e}_2 = \lambda \vec{e}_3 \Rightarrow$

$\|\vec{e}_1 \times \vec{e}_2\| = |\lambda| . \|\vec{e}_3\| \Leftrightarrow \underbrace{\|\vec{e}_1\|}_{1} . \underbrace{\|\vec{e}_2\|}_{1} . \sin\measuredangle\underbrace{(\vec{e}_1, \vec{e}_2)}_{90^\circ} = |\lambda|$

$\Rightarrow |\lambda| = 1 \Leftrightarrow \lambda = \pm 1$,

но $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ са дясна тройка $\Rightarrow \vec{e}_1 \times \vec{e}_2 \uparrow\uparrow \vec{e}_3 \Rightarrow$

$\lambda = 1 \Rightarrow \underline{\vec{e}_1 \times \vec{e}_2 = \vec{e}_3}$. Аналогично $\underline{\vec{e}_2 \times \vec{e}_3 = \vec{e}_1}$ и $\underline{\vec{e}_3 \times \vec{e}_1 = \vec{e}_2}$.



Нека $\vec{a}(x_1, y_1, z_1)$ относно дясна ортонормирана
$\vec{b}(x_2, y_2, z_2)$ координатна система.

Тогава $\vec{a} \times \vec{b} \left(\begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} z_1 & x_1 \\ z_2 & x_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} \right) =$

$$= (y_1 z_2 - z_1 y_2,\ z_1 x_2 - x_1 z_2,\ x_1 y_2 - x_2 y_1)$$

Доказателство:

1) $\vec{a} \times \vec{b} \perp \vec{a}$, $\vec{a} \times \vec{b} \perp \vec{b}$?

$$\vec{a}(\vec{a} \times \vec{b}) = x_1 \begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix} + y_1 \begin{vmatrix} z_1 & x_1 \\ z_2 & x_2 \end{vmatrix} + z_1 \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix} = 0. \Leftrightarrow \vec{a} \perp \vec{a} \times \vec{b}$$

Аналогично,

$$\vec{b}(\vec{a} \times \vec{b}) = x_2 \begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix} + y_2 \begin{vmatrix} z_1 & x_1 \\ z_2 & x_2 \end{vmatrix} + z_2 \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} x_2 & y_2 & z_2 \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix} = 0. \Leftrightarrow \vec{b} \perp \vec{a} \times \vec{b}$$

2) $\|\vec{a} \times \vec{b}\| = \|\vec{a}\| . \|\vec{b}\| . \sin \measuredangle(\vec{a}, \vec{b}) \Leftrightarrow$

$(\vec{a} \times \vec{b})^2 = \vec{a}^2 \vec{b}^2 - (\vec{a}\vec{b})^2$ (тъждество на Лагранж)

$$\left.\begin{aligned} (\vec{a}\vec{b})^2 &= (x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2)^2 \\ \vec{a}^2 \vec{b}^2 &= (x_1^2 + y_1^2 + z_1^2)(x_2^2 + y_2^2 + z_2^2) \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$$\vec{a}^2 \vec{b}^2 - (\vec{a}\vec{b})^2 = \cancel{x_1^2 x_2^2} + x_1^2 y_2^2 + x_1 z_2^2 + y_1^2 x_2^2 + \cancel{y_1^2 y_2^2} + y_1^2 z_2^2$$
$$+ z_1^2 x_2^2 + z_1^2 y_2^2 + \cancel{z_1^2 z_2^2} - \cancel{x_1^2 x_2^2} - \cancel{y_1^2 y_2^2} - \cancel{z_1^2 z_2^2} - 2x_1 x_2 y_1 y_2$$
$$- 2x_1 x_2 z_1 z_2 - 2 y_1 y_2 z_1 z_2 = (x_1 y_2 - x_2 y_1)^2 + (x_1 z_2 - x_2 z_1)^2$$
$$+ (y_1 z_2 - y_2 z_1)^2 = (\vec{a} \times \vec{b})^2.$$

3) $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{a}\times\vec{b}\}$ са дясно ориентирана база.

Нека означим координатите на $\vec{a}\times\vec{b}$ $(\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3)$.

Тогава разглеждаме матрицата T на прехода от стандартната база $\{\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3}\}$ на $\mathbb{R}^3$ (дясна, ортонормирана) към $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{a}\times\vec{b}\}$. Имаме

$$\det T = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ \Delta_1 & \Delta_2 & \Delta_3 \end{vmatrix} = x_1(y_2\Delta_3 - z_2\Delta_2) - y_1(x_2\Delta_3 - z_2\Delta_1) + z_1(x_2\Delta_2 - y_2\Delta_1) =$$

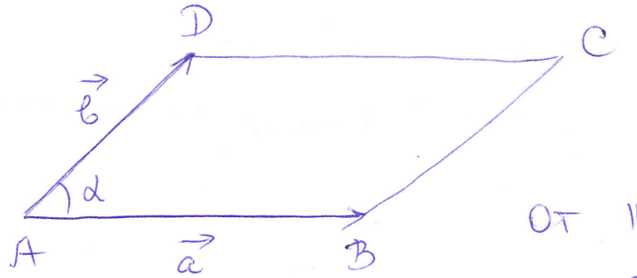
$$= \underbrace{(y_1z_2 - y_2z_1)}_{\Delta_1}\Delta_1 + \underbrace{(x_2z_1 - x_1z_2)}_{\Delta_2}\Delta_2 + \underbrace{(x_1y_2 - x_2y_1)}_{\Delta_3}\Delta_3$$

$$= \Delta_1^2 + \Delta_2^2 + \Delta_3^2 > 0 \Rightarrow \{\vec{a}, \vec{b}, \vec{a}\times\vec{b}\} \text{ е дясна база.}$$

Задача. В равнината Oxy е даден $\triangle ABC$ с върхове $A(0,-2)$, $B(-3,4)$, $C(1,1)$. Намерете:

а) лицето $S_{ABC} = ?$

I начин



$S_{ABCD} = AB \cdot AD \cdot \sin\alpha$

$ABCD$ – успоредник

От $\|\vec{a}\times\vec{b}\| = \|\vec{a}\| \cdot \|\vec{b}\| \cdot \sin\alpha$

$\Rightarrow S_{ABCD} = \|\vec{a}\times\vec{b}\|$.

$$S_{ABC} = \frac{1}{2}S_{ABCD} \Rightarrow S_{ABC} = \frac{1}{2}\|\vec{a}\times\vec{b}\|.$$

$\overrightarrow{AB}(-3,6) \Rightarrow \overrightarrow{AB}(-3,6,0)$
$\overrightarrow{AC}(1,3) \Rightarrow \overrightarrow{AC}(1,3,0)$
} в триизмерното пространство относно $Oxyz$.

$\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\,(0,0,-9-6) = (0,0,-15) \Rightarrow \|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\| = 15$

$$\Rightarrow S_{ABC} = \frac{15}{2}.$$

II начин Нека $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, $C(x_3, y_3)$ са върхове на триъгълник.

Нека $\Delta = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}$. Тогава $S_{ABC} = \frac{1}{2}|\Delta|$

$S = \frac{1}{2}\Delta$ е ориентираното лице на ΔABC.

Пресмятаме $\Delta = \begin{vmatrix} 0 & -2 & 1 \\ -3 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -3 - 2 - 4 - 6 = -15.$

$$\Delta = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & 0 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & 0 \end{vmatrix} =$$

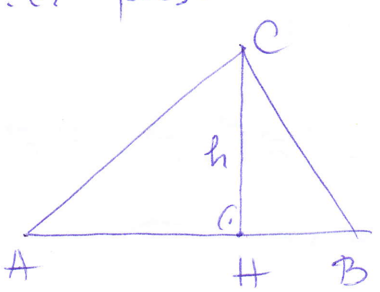
$\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 \end{vmatrix}$ = третата координата на $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}$, тъй като

$\overrightarrow{AB}(x_2 - x_1, y_2 - y_1)$

$\overrightarrow{AC}(x_3 - x_1, y_3 - y_1)$

$\Rightarrow$ Ориентираното лице $S = \frac{1}{2}\Delta$ отчита ориентацията на $\{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\}$ спрямо стандартната база.

б) дължината на височината през т. C в ΔABC, т.е. разстоянието от C до AB.



Тъй като $S = \frac{AB \cdot h}{2}$, $h = ?$,

то $h = \frac{2S}{AB}$

$\|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{(-3)^2 + 6^2} = \sqrt{45} = 3\sqrt{5} \Rightarrow h = \frac{2 \cdot \frac{15}{2}}{3\sqrt{5}} = \sqrt{5}.$

Двойно векторно произведение

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c} = \vec{a}\vec{c}.\vec{b} - \vec{b}\vec{c}.\vec{a}$$

Да докажем горното равенство.

Векторът $\vec{a} \times \vec{b} \perp \vec{a}$ и $\perp \vec{b}$. $\Rightarrow \vec{a} \times \vec{b} \perp$ на равнината, определена от $\vec{a}$ и $\vec{b}$ (в случай, че $\vec{a}$ и $\vec{b}$ са линейно независими, т.е. неколинеарни).

Разглеждаме вектора $(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c}$, той е $\perp \vec{a} \times \vec{b} \Rightarrow$ трябва да бъде от равнината, определена от $\{\vec{a}, \vec{b}\} \Rightarrow$ е линейна комбинация на $\vec{a}$ и $\vec{b}$, т.е.

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c} = \lambda \vec{a} + \mu \vec{b}, \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

Освен това $(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c} \perp \vec{c} \Rightarrow$

$$0 = [(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c}]\vec{c} = (\lambda \vec{a} + \mu \vec{b})\vec{c} = \lambda \vec{a}\vec{c} + \mu \vec{b}\vec{c}$$

$$\Rightarrow \lambda(\vec{a}\vec{c}) + \mu(\vec{b}\vec{c}) = 0 \Rightarrow \lambda = -k(\vec{b}\vec{c}), \ \mu = k(\vec{a}\vec{c}),$$
$$k \in \mathbb{R} \Rightarrow$$

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c} = k(\vec{a}\vec{c}.\vec{b} - \vec{b}\vec{c}.\vec{a}), \quad k = ?$$

Нека разгледаме частен случай, при който $\vec{a} = \vec{e_1}$, $\vec{b} = \vec{e_2}$, $\vec{c} = \vec{e_1}$. Тогава

$$\vec{a} \times \vec{b} = \vec{e_1} \times \vec{e_2} = \vec{e_3} \Rightarrow (\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c} = \vec{e_3} \times \vec{e_1} = \vec{e_2}$$

$$\Rightarrow \vec{e_2} = k(\underbrace{\vec{e_1}^2}_{=1}.\vec{e_2} - \underbrace{\vec{e_1}\vec{e_2}}_{=0}.\vec{e_1}) = k\vec{e_2} \Rightarrow \underline{k=1}$$

$$\Rightarrow (\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c} = \vec{a}\vec{c}.\vec{b} - \vec{b}\vec{c}.\vec{a}.$$

Тогава $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = -(\vec{b} \times \vec{c}) \times \vec{a} = -(\vec{a}\vec{b}.\vec{c} - \vec{a}\vec{c}.\vec{b})$

$= \vec{a}\vec{c}.\vec{b} - \vec{a}\vec{b}.\vec{c}$, откъдето $\Rightarrow$

$(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c} \neq \vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) \Rightarrow$ операцията векторно произведение не притежава асоциативното свойство.

Но е в сила тъждеството

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c} + (\vec{b} \times \vec{c}) \times \vec{a} + (\vec{c} \times \vec{a}) \times \vec{b} = \vec{o},$$

наречено тъждество на Якоби (докажете!).

Векторно пространство, снабдено с антикомутативна операция, която е линейна и по двата си аргумента и удовлетворява тъждеството на Якоби, се нарича алгебра на Ли.

$\mathbb{R}^3$, снабдено с векторното произведение $(\times)$, е алгебра на Ли.

* * *

- <u>Смесено произведение на свободни вектори</u>

Дефинираме по следния начин

$$\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c} = (\vec{a} \times \vec{b})\,\vec{c}.$$

Ако $\left.\begin{array}{l} \vec{a}\,(x_1, y_1, z_1) \\ \vec{b}\,(x_2, y_2, z_2) \\ \vec{c}\,(x_3, y_3, z_3) \end{array}\right\}$ относно ортонормирана дясна координатна система,

то $\vec{a} \times \vec{b} \left(\begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} z_1 & x_1 \\ z_2 & x_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} \right)$.

Тогава $(\vec{a} \times \vec{b})\,\vec{c} = x_3 \begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix} + y_3 \begin{vmatrix} z_1 & x_1 \\ z_2 & x_2 \end{vmatrix} + z_3 \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}$

$$= \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}. \Rightarrow$$

$\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c} = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} = \vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})$, ако развием по първия ред съгласно Лаплас.

Задача. Дадени са точките $A(1,-1,2)$, $B(2,3,-1)$, $C(4,3,-1)$ и $D(2,5,5)$. Намерете:

а) обема на тетраедъра $ABCD$;

$\overrightarrow{AB}(1,4,-3)$

$\overrightarrow{AC}(3,4,-3)$

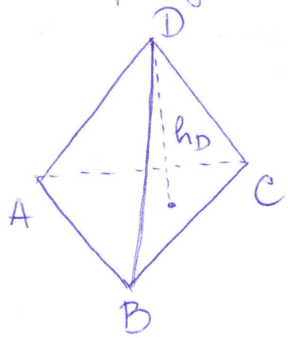
$\overrightarrow{AD}(1,6,3)$

$$\Rightarrow \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AD} = \begin{vmatrix} 1 & 4 & -3 \\ 3 & 4 & -3 \\ 1 & 6 & 3 \end{vmatrix} \begin{array}{l} (-1) \\ \\ \\ \end{array} =$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 4 & -3 \\ 2 & 0 & 0 \\ 2 & 10 & 0 \end{vmatrix} = 2.(-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 4 & -3 \\ 10 & 0 \end{vmatrix} = -60$$

$$\Rightarrow V_{ABCD} = \frac{1}{6} \left| \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AD} \right| = 10.$$

б) дължината на височината през върха D в тетраедъра $ABCD$ (разстоянието от т. D до равнината на $\triangle ABC$).



$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}(0,-6,-8) \Rightarrow$

$\|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\| = \sqrt{0^2+(-6)^2+(-8)^2} = 10 \Rightarrow \underline{S_{ABC} = 5}$

$$V_{ABCD} = \frac{S_{ABC}.h_D}{3} \Rightarrow h_D = \frac{3V_{ABCD}}{S_{ABC}}$$

$$\Rightarrow h_D = \frac{3.10}{5} = 6.$$

Задача. Докажете неравенството $|\vec{a}\vec{b}\vec{c}| \leq \|\vec{a}\|.\|\vec{b}\|.\|\vec{c}\|$.

Знаем, че $\vec{a}\vec{b}\vec{c} = (\vec{a}\times\vec{b})\vec{c}$. Тогава $(\vec{a}\vec{b}\vec{c})^2 = [(\vec{a}\times\vec{b})\vec{c}]^2$.

Прилагаме неравенството на Коши-Шварц, т.е.

$(\vec{u}\vec{v})^2 \leq \vec{u}^2\vec{v}^2$, откъдето получаваме

$$(\vec{a}\vec{b}\vec{c})^2 = [(\vec{a}\times\vec{b})\vec{c}]^2 \leq (\vec{a}\times\vec{b})^2.\vec{c}^2 = \Big(\vec{a}^2.\vec{b}^2.\overbrace{\sin^2\sphericalangle(\vec{a},\vec{b})}^{\leq 1}\Big).\vec{c}^2 \leq$$

$$\leq \vec{a}^2.\vec{b}^2.\vec{c}^2 \Rightarrow$$

$$(\vec{a}\vec{b}\vec{c})^2 \leq \|\vec{a}\|^2.\|\vec{b}\|^2.\|\vec{c}\|^2 \Rightarrow |\vec{a}\vec{b}\vec{c}| \leq \|\vec{a}\|.\|\vec{b}\|.\|\vec{c}\|$$

Равенството се достига $\Leftrightarrow$ $(\vec{a}\times\vec{b})$ и $\vec{c}$ са колинеарни, и $\sin\sphericalangle(\vec{a},\vec{b}) = 1$, т.е. $\vec{a}\perp\vec{b}$.

т.е. $\vec{c}\perp\vec{a}$ и $\vec{c}\perp\vec{b}$

$\Rightarrow$ при $\vec{a}\perp\vec{b}\perp\vec{c}$.

Задача. Дадени са векторите $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$, за които: $\vec{c} \perp \vec{a}$, $\vec{c} \perp \vec{b}$; $\|\vec{a}\| = 2\sqrt{3}$, $\|\vec{b}\| = \|\vec{c}\| = 2$, $\sphericalangle(\vec{a}, \vec{b}) = 60^\circ$. Намерете:

а) $\|\vec{a} \times \vec{b}\| = \|\vec{a}\| . \|\vec{b}\| . \sin \sphericalangle(\vec{a}, \vec{b}) = 2\sqrt{3} . 2 . \frac{\sqrt{3}}{2} = 6.$

б) $\vec{a}\vec{b}\vec{c} = ?$

$\vec{a}\vec{b}\vec{c} = (\vec{a} \times \vec{b})\vec{c}.$

Тъй като $\vec{c} \perp \vec{a}$ и $\vec{c} \perp \vec{b}$, то $\vec{c} \parallel (\vec{a} \times \vec{b}) \Rightarrow$

$(\vec{a} \times \vec{b}) = \lambda \vec{c}$, $\lambda = ?$

$\|\vec{a} \times \vec{b}\| = |\lambda| . \|\vec{c}\| \Rightarrow 6 = 2|\lambda| \Rightarrow |\lambda| = 3 \Leftrightarrow \lambda = \pm 3$

$\Rightarrow \vec{a} \times \vec{b} = \pm 3\vec{c} \Rightarrow \underline{\vec{a}\vec{b}\vec{c} = \pm 3\vec{c}^{\,2} = \pm 3.4 = \pm 12}.$

в) $(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c} = ?$

Тъй като $\vec{a} \times \vec{b} = \lambda \vec{c}$, то имаме

$(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c} = (\lambda \vec{c}) \times \vec{c} = \lambda(\vec{c} \times \vec{c}) = \vec{0}.$

Задача. Ако $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ и $\vec{d}$ са свободни вектори, то намерете:

а) $(\vec{a} \times \vec{b}) \times (\vec{c} \times \vec{d}) = ?$

$(\underline{\vec{a}} \times \underline{\vec{b}}) \times \underline{(\vec{c} \times \vec{d})} = \vec{a}(\vec{c} \times \vec{d}) . \vec{b} - \vec{b}(\vec{c} \times \vec{d}) . \vec{a}$

$= \vec{a}\vec{c}\vec{d} . \vec{b} - \vec{b}\vec{c}\vec{d} . \vec{a}.$

б) ако $\vec{a} \times \vec{b}$, $\vec{b} \times \vec{c}$ и $\vec{c} \times \vec{a}$ са компланарни, то намерете $\vec{a}\vec{b}\vec{c} = ?$

Пресмятаме $(\vec{a} \times \vec{b})(\vec{b} \times \vec{c})(\vec{c} \times \vec{a})$ – смесеното произведение, което трябва да бъде равно на нула, тъй като трите вектора са компланарни.

$(\vec{a} \times \vec{b})(\vec{b} \times \vec{c})(\vec{c} \times \vec{a}) = [(\vec{a} \times \vec{b}) \times (\vec{b} \times \vec{c})](\vec{c} \times \vec{a}) =$

$= (\vec{a}\vec{b}\vec{c} . \vec{b} - \underbrace{\vec{b}\vec{b}\vec{c}}_{0} . \vec{a})(\vec{c} \times \vec{a}) = \vec{a}\vec{b}\vec{c} . \vec{b}(\vec{c} \times \vec{a}) =$

$= \vec{a}\vec{b}\vec{c} . \vec{b}\vec{c}\vec{a} = (\vec{a}\vec{b}\vec{c})^2$

$\Downarrow$

$0 = (\vec{a} \times \vec{b})(\vec{b} \times \vec{c})(\vec{c} \times \vec{a}) = (\vec{a}\vec{b}\vec{c})^2 \Rightarrow \vec{a}\vec{b}\vec{c} = 0 \Rightarrow$

$\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ са компланарни вектори.

Задача. Даден е успоредник $ABCD$ с лице 12 и $A(-1, 3)$, $B(-2, 4)$, а пресечната точка P на диагоналите AC и BD лежи на оста Ox. Намерете координатите на C и D.

От P лежи на $Ox \Rightarrow P(x, 0)$, $x = ?$

P – средата на AC и $BD \Rightarrow$

$P = \frac{1}{2}(A + C) \Rightarrow C = 2P - A = 2(x,0) - (-1,3) = \underline{(2x+1, -3)}$,

$P = \frac{1}{2}(B + D) \Rightarrow D = 2P - B = 2(x,0) - (-2,4) = \underline{(2x+2, -4)}$.

Тогава $\vec{AB}(-1, 1)$, $\vec{AD}(2x+3, -7)$ $\Rightarrow$ $\vec{AB}(-1, 1, 0)$, $\vec{AD}(2x+3, -7, 0)$ $\Rightarrow$

$\vec{AB} \times \vec{AD}\ (0, 0, 7 - 2x - 3) = (0, 0, 4 - 2x) \Rightarrow$

$\|\vec{AB} \times \vec{AD}\| = |4 - 2x| \Rightarrow S_{ABCD} = |4 - 2x| = 12 \Leftrightarrow$

$4 - 2x = 12$ или $4 - 2x = -12 \Rightarrow x = 8 \Rightarrow C(17, -3)$, $D(18, -4)$.

$x = -4 \Rightarrow C(-7, -3)$, $D(-6, -4)$