Свободни вектори

1. Линейна зависимост в геометричното векторно пространство

<u>Теорема</u>. Два свободни вектора са линейно зависими, точно когато са колинеарни.

<u>Доказателство</u>.

Ако един от векторите е нулевият, то твърдението е вярно, той като нулевият вектор е линейно зависим с всеки вектор и колинеарен с всеки свободен вектор. Затова нека $\vec{a}$ и $\vec{b}$ са свободни вектори и $\vec{a}, \vec{b} \neq \vec{o}$.

($\Longrightarrow$) Нека $\vec{a}$ и $\vec{b}$ са линейно зависими. Това е еквивалентно на $\vec{b} = \lambda \vec{a}$, $\lambda \in \mathbb{R}$. От последното равенство, съгласно определението за линейното действие умножение на свободен вектор с реално число, следва, че $\vec{a}$ и $\vec{b}$ са колинеарни.

($\Longleftarrow$) Нека $\vec{a}$ и $\vec{b}$ са колинеарни.

Ако $\vec{a}$ и $\vec{b}$ са еднопосочно колинеарни ($\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{b}$), то нека $\lambda = \dfrac{\|\vec{b}\|}{\|\vec{a}\|} > 0$.

Ако $\vec{a}$ и $\vec{b}$ са разнопосочно колинеарни ($\vec{a} \uparrow\downarrow \vec{b}$), то нека $\lambda = -\dfrac{\|\vec{b}\|}{\|\vec{a}\|} < 0$.

И в двата случая е изпълнено $\vec{b} = \lambda \vec{a}$. $\Rightarrow$

Векторите $\vec{a}$ и $\vec{b}$ са линейно зависими. ∎

Проверете, че и в двата случая е изпълнено

$$\|\vec{b}\| = |\lambda| . \|\vec{a}\| .$$

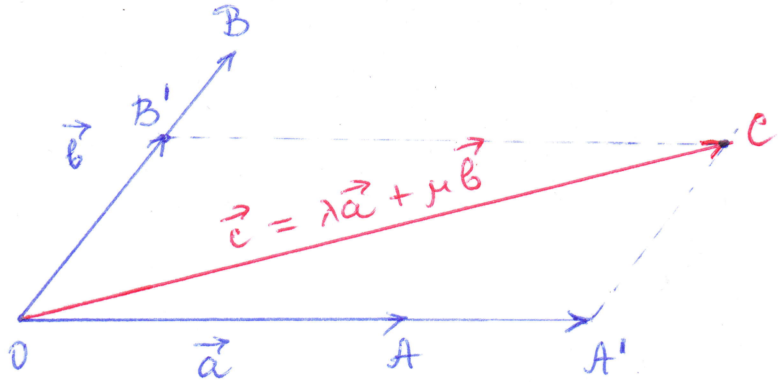
Теорема. Три свободни вектора са линейно зависими, точно когато са компланарни.

Доказателство.

Нека $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ са свободни вектори. Ако два от тях са колинеарни (например $\vec{b} = \lambda \vec{a}$), то от предната теорема $\vec{c}$ ще бъде колинеарен с $\vec{b}$ $\Leftrightarrow$ $\vec{c} = \mu \vec{b}$, откъдето $\vec{c} = \lambda\mu \vec{a}$. Следователно в такъв случай трите вектора са колинеарни и следователно – компланарни.

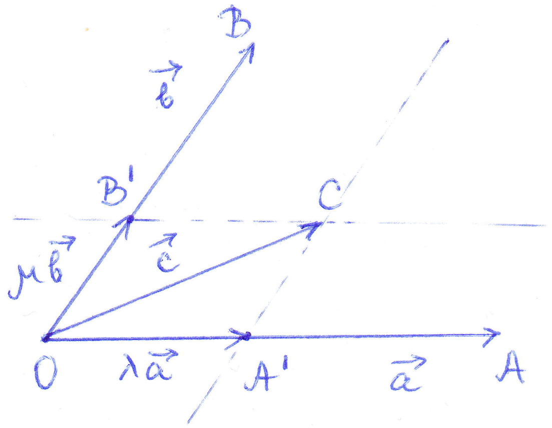
Нека никои два от векторите $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ не са колинеарни.

($\Longrightarrow$) Нека $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ са линейно зависими. Последното, без ограничение на общността, е еквивалентно на $\vec{c} = \lambda \vec{a} + \mu \vec{b}$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Нека построим представителите $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$ и $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$.



Векторът $\lambda \vec{a}$ е колинеарен на $\vec{a}$. Ако $\lambda \vec{a} = \overrightarrow{OA'}$, то точките O, A и A' лежат върху една права. Аналогично, ако $\mu \vec{b} = \overrightarrow{OB'}$, то O, B и B' също лежат върху една права. Тогава, ако $\vec{c} = \overrightarrow{OC}$, то $\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA'} + \overrightarrow{OB'}$ и съгласно правилото на успоредника за събиране на вектори OC е диагоналът в успоредника OA'CB'. От последното следва, че т. O, A, C и B лежат в една равнина, откъдето получаваме, че $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ са компланарни.

($\Leftarrow$) Нека $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ са компланарни. Построяваме представителите $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$ и $\overrightarrow{OC} = \vec{c}$ (точките O, A, B и C лежат в една равнина).



През т. C построяваме права, успоредна на $\vec{b}$. Тази права ще пресече правата през точките O и A в точка, която означаваме с A'. Тъй като $\overrightarrow{OA'}$ и $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$ са колинеарни, то $\overrightarrow{OA'} = \lambda\vec{a}$. Аналогично, през т. C построяваме права, успоредна на $\vec{a}$, която пресича правата през O и B в т. B'. Имаме $\overrightarrow{OB'} = \mu\vec{b}$. Тъй като $OA'CB'$ е успоредник, то $\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA'} + \overrightarrow{OB'}$, т.е. $\vec{c} = \lambda\vec{a} + \mu\vec{b}$. Следователно $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ са линейно зависими. ∎

<u>Теорема</u>. Всеки четири свободни вектора са линейно зависими.

<u>Доказателство</u>. Нека $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, $\vec{d}$ са свободни вектори. Ако три от тях са компланарни (например $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$), то системата $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d}\}$ е линейно зависима, съгласно предната теорема. Затова нека никои три от векторите не са компланарни.

Построяваме представителите $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{OC} = \vec{c}$ и $\overrightarrow{OD} = \vec{d}$. През т. D построяваме права, успоредна на вектора $\vec{c}$, която ще пресече равнината, определена от $\vec{a}$ и $\vec{b}$, в точка, означена с D'.

Тъй като $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$ и $\overrightarrow{OD'}$ са компланарни, то

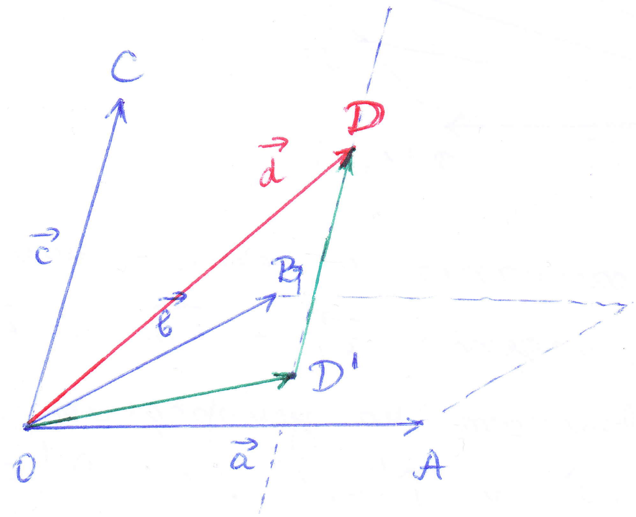
$$\overrightarrow{OD'} = \lambda\vec{a} + \mu\vec{b}, \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

Тъй като $D'D \parallel \vec{c}$, то $\overrightarrow{D'D} = \nu\vec{c}$, $\nu \in \mathbb{R}$.

Съгласно тъждеството на Шал

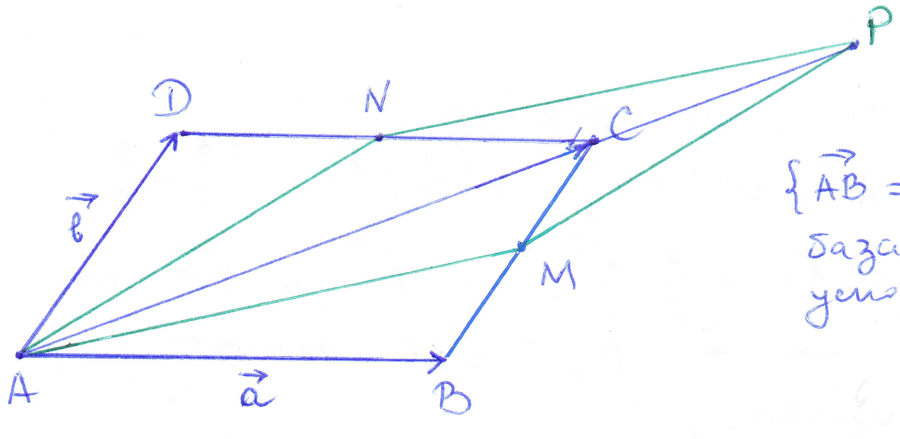
$$\vec{d} = \overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OD'} + \overrightarrow{D'D} = \lambda\vec{a} + \mu\vec{b} + \nu\vec{c}.$$

Следователно $\vec{d}$ е линейно зависим с $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$. ▪



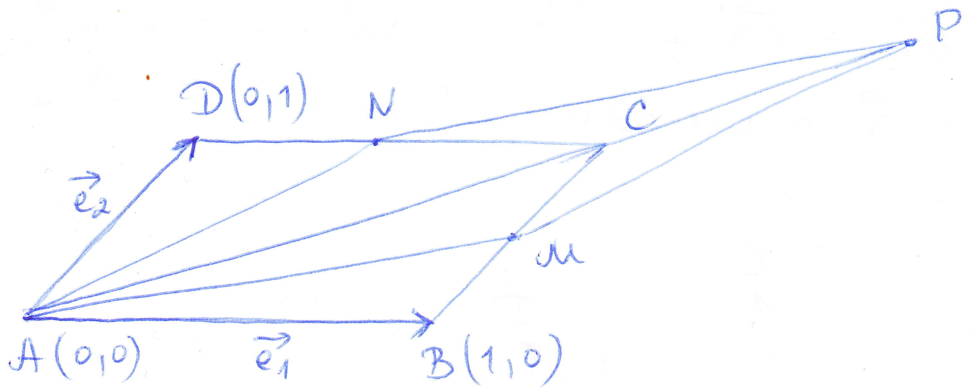
<u>Задача</u> (колинеарност на точки, отношение на отсечки)

ABCD – успоредник,
M – средата на BC, N – средата на CD,
т. P е такава, че фигурата AMPN е успоредник.
Докажете, че т. A, C и P лежат на една права
и намерете AC : CP = ?



$\{\overrightarrow{AB} = \vec{a}, \overrightarrow{AD} = \vec{b}\}$ е база в равнината на успоредника ABCD.

Съгласно правилото на успоредника $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \vec{a} + \vec{b}$ (1)
т. M – средата на BC $\Rightarrow \overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})$ и аналогично
от т. N – среда на CD $\Rightarrow \overrightarrow{AN} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD})$.
Тъй като AMPN е успоредник, то $\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{AN} \Rightarrow$
$\overrightarrow{AP} = \frac{1}{2}(\underbrace{\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}} + 2\overrightarrow{AC}) = \frac{3}{2}\overrightarrow{AC} \Rightarrow \overrightarrow{AP} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AC} \Rightarrow$
A, P и C са колинеарни и <u>AC : CP = 2 : 1</u>. ▪



Избираме координатна система – например
$K = A\vec{e_1}\vec{e_2}$, където $\vec{e_1} = \vec{AB}$ и $\vec{e_2} = \vec{AD}$
е база в равнината на успоредника.
Тогава $B(1,0)$ и $D(0,1)$, а $A(0,0)$.
$\vec{AC} = \vec{AB} + \vec{AD} = (1,0) + (0,1) = (1,1) \Rightarrow$ т. $C(1,1)$

M – средата на $BC \Rightarrow M = \frac{1}{2}(B + C) \Rightarrow$
$M\left(1, \frac{1}{2}\right) = \vec{AM}$

N – средата на $CD \Rightarrow N = \frac{1}{2}(C + D) \Rightarrow$
$N\left(\frac{1}{2}, 1\right) = \vec{AN}$

Тъй като $AMPN$ – успоредник, то
$\vec{AP} = \vec{AM} + \vec{AN} = \left(1, \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2}, 1\right) = \left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right)$
$\Rightarrow \vec{AP} = \frac{3}{2}(1,1) = \frac{3}{2}\vec{AC} \Rightarrow \vec{AP}$ и $\vec{AC}$ са
колинеарни $\Rightarrow$ т. A, P и C лежат
върху една права.