

ТЕСТ 3 (НЕЛИНЕЙНИ УРАВНЕНИЯ И СИСТЕМИ) И (МНОГОМЕРНА ОПТИМИЗАЦИЯ С ОГРАНИЧЕНИЯ)

Задачите изискват не само познаване на алгоритмите, но и разбиране на тяхната стабилност, скорост на сходимост и специфично приложение при моделиране на сложни биологични и физични процеси.

1. При решаване на нелинейно уравнение за концентрацията на контрастно вещество $C(t)$ чрез метода на Нютон, установявате, че в близост до корена производната $f'(C)$ е много малка величина. Какъв е основният риск за числения процес в този случай?

- А. Намаляване на грешката от закръгляне в компютърната памет.
- Б. Гарантирано зацикляне на алгоритъма между две стойности.
- В. Голяма корекция ΔC , която може да изхвърли следващото приближение далеч от областта на сходимост.
- Г. Автоматичен преход към линеен порядък на сходимост.

2. Използвате метода на разполовяването (бисекция) за намиране на критична доза D . Ако първоначалният интервал е $[0, 1024]$ Gy, колко итерации са необходими най-малко, за да се постигне абсолютна точност $\epsilon = 1$ Gy?

- А. 512
- Б. 1024
- В. 20
- Г. 10

3. При моделиране на метаболизма на два изотопа имате система

$f_1(x,y)=0$ и $f_2(x,y)=0$. Ако Якобианът J на системата е сингулярен (детерминантата му е нула) в текущата точка, какво означава това за метода на Нютон?

- А. Порядъкът на сходимост ще се увеличи от 2 на 3.
- Б. Линеината система за поправките няма еднозначно решение и методът не може да продължи.
- В. Методът ще се сходи мигновено към решението.
- Г. Трябва да се премине към метода на бисекцията за системи.

4. При изследване на хемодинамиката се налага решение на уравнение с кратен корен (кратност $m > 1$). Как се променя скоростта на сходимост на стандартния метод на Нютон в този случай?

- А. Сходимостта се ускорява и става експоненциална.
- Б. Порядъкът на сходимост остава точно 2.
- В. Сходимостта става линейна вместо квадратична.
- Г. Методът става негоден и винаги дивергира.

5. За решаване на нелинейна система в лъчепланирането се използва методът на Бройден (Broyden's method). Каква е неговата основна характеристика спрямо класическия метод на Нютон?

- А. Той е квази-Нютонов метод, който апроксимира Якобиана, без да го преизчислява изцяло на всяка стъпка.
- Б. Изисква аналитично пресмятане на втори производни (Хесиан).
- В. Той е винаги по-бърз от Нютон по брой итерации.
- Г. Той гарантира намирането на глобален минимум, а не само на корен.

6. В контекста на итерационни методи $x_{n+1}=g(x_n)$, какво представлява 'теоремата за свиващото изображение' за модел на белодробна вентилация?

- А. Методът се сходи само ако началната точка е нула.
- Б. Функцията $g(x)$ трябва да бъде периодична, за да моделира дишането.
- В. Всяко изображение, което намалява стойностите на x , е свиващо.
- Г. Ако $|g'(x)| \leq L < 1$ в даден интервал, то итерационният процес е сходящ към единствена фиксирана точка.

7. При решаване на уравнението на Шуер (Shuer) за дифузия в туморна тъкан чрез метода на секущите, какъв е порядъкът на сходимост α ?

- А. $\alpha=1$
- Б. $\alpha=2$
- В. $\alpha \approx 1.618$ (златното сечение)
- Г. $\alpha=3$

8. Защо при численото решаване на системи уравнения в медицинската образна диагностика често се предпочитат 'damping' (затихващи) фактори в метода на Нютон?

- А. За да се превърне системата в линейна.
- Б. За да се елиминира нуждата от изчисляване на Якобиана.

В. За да се подобри глобалната сходимост, когато началното приближение е далеч от решението.

Г. За да се намали броят на итерациите близо до корена.

9. При използване на софтуер за фармакокинетично моделиране, дефинирате критерий за спиране $|f(x_n)| < \epsilon$. Кога този критерий може да бъде подвеждащ?

А. Когато графиката на функцията е много стръмна в близост до корена.

Б. Когато функцията е линейна.

В. Когато използваме метода на Нютон вместо бисекция.

Г. Когато ϵ е много голямо число.

10. Какво представлява методът на Халей (Halley's method) в контекста на подобряване на изчисленията за радиационен трансфер?

А. Вариант на метода на бисекцията с променлива стъпка.

Б. Метод, който използва само случайни числа (Монте Карло).

В. Метод от трети порядък, който включва и втората производна на функцията.

Г. Алгоритъм за решаване само на тригонометрични уравнения.

11. Оптимизация на времената за сканиране при мулти-секвентен MRI протокол (магнитно -резонансна томография)

Обяснение: При провеждане на MRI изследване често се налага да се направят две различни последователности (секвенции) – например T_1 -претеглена и T_2 -претеглена, за да се получи пълна диагностична картина. Всяка секвенция изисква определено време за събиране на данни (t_1 и t_2).

1. **Цел :** Искаме да **минимизираме общото време** на престоя на пациента в скенера, тъй като дългите изследвания водят до дискомфорт и чувствителност от движение.

- Въпреки това, едната секвенция е по-чувствителна към движение (напр. коремна област) и изисква по-строго минимизиране ("наказваме" времето ѝ по-тежко).

2. **Ограничение (Constraint):** Качеството на образа, дефинирано чрез **Съотношението сигнал-шум (SNR)**, трябва да бъде над определен медицински праг, за да е диагнозата валидна.

- Във физиката на MRI, SNR е пропорционално на корен квадратен от времето за сканиране ($\sqrt{t}$).
- За комбинираната диагностична стойност на двете изображения, приемаме опростен модел, при който общият информационен индекс е произведение от индивидуалните SNR.

Математическа формулировка

Нека променливите са:

- x : Време за сканиране на Секвенция 1 (в минути).
- y : Време за сканиране на Секвенция 2 (в минути).

1. Целева функция (за минимизиране):

Искаме да минимизираме претеглената сума на времената (цена на времето):

$$f(x, y) = 2x + y$$

(Тук коефициентът 2 пред x показва, че Секвенция 1 е по-неприятна за пациента или по-скъпа, затова искаме да я съкратим с приоритет).

2. Нелинейно ограничение:

Комбинираното качество на образа трябва да е равно на конкретна константа K .

Модел на качеството: $Q(x, y) = x \cdot y$.

Изискване:

$$g(x, y) = x \cdot y - 18 = 0$$

(Това е нелинейно ограничение от хиперболичен тип. Изискваме произведението на времената да е 18).

Освен това : $x > 0$ и $y > 0$.

Визуализация и Интерпретация

1. Геометричен смисъл:

- Ограничението $x \cdot y = 18$ представлява **хипербола** в първи квадрант. Всяка точка от тази крива осигурява необходимото диагностично качество.
- Целевата функция $2x + y = C$ представлява семейство от прави линии с наклон 2.
- Ние търсим онази права от семейството, която е най-близо до началото на координатната система (най-малко C), но все още се допира до хиперболата.
- Точката на допиране е (3, 6).

2. Медицинска интерпретация:

Ако бихме избрали равни времена ($x=y$), за да спазим ограничението $x^2=18$, щяхме да имаме x приблизително 4.24 и y приблизително 4.24.

- Тогава целевата функция щеше да бъде: $2(4.24) + 4.24 = 12.72$.
- Вашият оптимизиран резултат е (трябва да получите около **12**).
- **Извод:** Чрез математическа оптимизация спестихме "натоварване" на системата, като прехвърлихме повече време към "по-евтината" секвенция (y), запазвайки същото диагностично качество.

Нека да усложним задачата към по-реалистичен сценарий за дозиметрия (лъчелечение), което изисква да промените ограничението от хиперболично към **квадратично** (напр. елипса), което често се използва за описване на изодозните криви:

- Минимизирайте $f(x,y) = x + y$ (обща доза)
- При ограничение $x^2 + 4y^2 \geq 100$ (покритие на тумора).

Колко получихте?

Упътване: Може да използвате функцията *fmincon(..)* от *Matlab*