

**Тест по диференциални уравнения за Медицинска Физика
(специализирани числени методи в ТМ)**

1. Моделът за радиоактивен разпад на даден изотоп в Медицинската физика се описва с диференциалното уравнение $dN/dt = -\lambda N$, където $N(t)$ е броят на неразпадналите се ядра, а λ е константата на разпада. Ако началното условие на Коши е $N(0) = N_0$, кой параметър на метода на Рунге-Кута (RK4) представлява най-доброто приближение за началния наклон (скоростта на изменението)?

А) k_3

Б) k_1

В) k_2

Г) Никой от посочените. Най-доброто приближение е претеглената сума $1/6(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$.

2. При моделиране на концентрацията на лекарство $C(t)$ в кръвта след интравенозно въвеждане се използва модел $dC/dt = -k_e C$, където k_e е константата на елиминиране. Ако началната концентрация е C_0 , защо методът на Рунге-Кута от четвърти ред (RK4) е по-подходящ от метода на Ойлер за числен анализ?

А) RK4 е подходящ само за линейни ОДУ, докато Ойлер е за нелинейни.

Б) RK4 има локална грешка от порядък $O(h^5)$, което осигурява много по-висока точност в сравнение с $O(h^2)$ на Ойлер.

В) RK4 изисква по-голяма стъпка на интегриране (h).

Г) Локалната грешка на RK4 е от порядък $O(h^2)$, докато на Ойлер е $O(h^5)$.

3. При моделиране на растежа на тумор се използва логистичното уравнение $dV/dt = rV(1 - V/K)$, където $V(t)$ е обемът на тумора, r е скоростта на растеж, а K е капацитетът на средата. Задачата на Коши изисква да се намери $V(t)$ при начално условие $V(t_0) = V_0$. Какво представлява началната стойност V_0 в този контекст?

А) Максималният възможен обем на тумора (K).

Б) Скоростта на растеж (r) в началния момент.

В) Обемът на тумора в началния момент от време t_0 , от който започва численото интегриране.

4. В модел на топлообмен на биологична тъкан $dT/dt = -a(T - T_a) + Q$, където $T(t)$ е температурата, T_a е температурата на околната среда, а Q е източник на топлина. Ако се използва RK4 с размер на стъпката $h = 0.5$ min и се знае, че локалната грешка е $O(h^5)$, каква ще бъде промяната в грешката, ако стъпката се намали двойно до $h = 0.25$ min?

А) Грешката ще намалее около 2 пъти.

Б) Грешката ще намалее около 16 пъти.

В) Грешката ще намалее около 5 пъти.

Г) Грешката ще намалее около 32 пъти.

5. Решете задачата (медиците обичат да я наричат топлообмен на тъкан – биотермодинамика!) - Охлаждане на малък образец тъкан, като се прилага опростен модел на топлообмен с околната среда (закон на Нютон за охлаждане), с малък постоянен източник на топлина Q (метаболизъм).

Диференциално Уравнение: $dT/dt = -a(T - T_a) + Q$

където $T(t)$ е температурата на тъканта, $T_a = 20^\circ\text{C}$ е температурата на околната среда, $a = 0.1 \text{ min}^{-1}$ е коефициентът на топлообмен и $Q = 0.5 \text{ }^\circ\text{C/min}$ е източникът на топлина.

Начално Условие на Коши: Време $t_0 = 0$ мин, Начална температура $T_0 = T(0) = 37^\circ\text{C}$

Упътване: Използвайте метода на Рунге-Кута (RK4) с размер на стъпката $h = 2$ мин за да намерите приближената температура $T(12)$ след 12 минути.

Забележка: В тази задача $f(t, T) = -0.1(T - 20) + 0.5$. Начертайте графика.

6. Стационарно Разпределение на Температурата в Тъкан

Това е опростен, едномерен модел на **Биотермичното уравнение на Пенс** (Pennes Bioheat Equation), което описва стационарното (независещо от времето) разпределение на температурата T по дължината x на тъканта (напр. крайник).

Диференциално Уравнение (ОДУ от 2-ри ред):

$$d^2T/dx^2 - w c_b / k (T - T_a) + q_m / k = 0$$

- $T(x)$: Температура на тъканта като функция на позицията.
- k : Теплопроводимост на тъканта.
- $w c_b$: Произведение на перфузията (кръвен поток) и специфичния топлинен капацитет на кръвта (постоянни).
- T_a : Температура на артериалната кръв.
- q_m : Скорост на метаболитната топлина.

Гранични Условия :

Тъй като това е гранична задача, са необходими условия в две точки:

1. Начална граница (Кожа): $T(0) = T_{\text{кожа}}$

- Температурата на повърхността на кожата е фиксирана $T(0) = 30^\circ$

2. Крайна граница (Вътрешна): $T(L) = T_{\text{ядро}}$

- Температурата на определена дълбочина L е фиксирана (напр. температурата на телесното ядро $T(L) = 37^\circ$).

Упътване: Решете задачата по метода на мрежите. Начертайте графика на $T(x)$.

ЧАСТНИ ДИФЕРЕНЦИАЛНИ УРАВНЕНИЯ

7. Моделиране разпространението на ултразвукова вълна $P(x, t)$ в хомогенен слой мека тъкан с дължина $L=10 \text{ cm} = 0.1 \text{ m}$.

1. Диференциално Уравнение (Едномерно Вълново Уравнение):

$$\partial^2 P / \partial t^2 = c^2 \partial^2 P / \partial x^2$$

- $P(x, t)$: Акустично налягане в Pa в място x и време t
- c : Скорост на звука в меката тъкан. Приемаме $c = 1540 \text{ m/s}$.

2. Начални Условия (Initial Conditions):

Тъй като уравнението е от втори ред спрямо времето, са нужни две начални условия при $t=0$:

1. **Начално Налягане:** $P(x, 0) = 0$, Първоначално цялата тъкан е в покой (нулево налягане).
2. **Начална Скорост на Промяна на Налягането:** $\partial P / \partial t(x, 0) = 0$, Първоначално няма движение (нулева скорост на частиците).

3. Гранични Условия (Boundary Conditions):

Тъй като уравнението е от втори ред спрямо пространствената променлива x , са нужни две гранични условия:

1. Гранично Условие при $x=0$ (Вход – Трансдюсер):

Използваме **условие на Дирихле**, което симулира импулса, излъчен от ултразвуковия трансдюсер.

$P(0, t) = P_{\text{вход}}(t)$ Конкретна стойност: $P_{\text{вход}}(t) = 100 \cdot \sin(2\pi f t)$, където $f=1 \text{ MHz}$ (само за време $t \leq T_{\text{импулс}}$).

За простота, приемете $P(0, t) = 100 \text{ Pa}$ за $0 < t \leq 10 \mu\text{s}$, $P(0, t) = 0$ за $t > 10 \mu\text{s}$. (Симулира се по този начин кратък, правоъгълен импулс).

2. Гранично Условие при $x=L$ (Изход – Поглътяща Граница):

Използваме **Абсорбираща граница** (условие на Зоммерфелд от 1-ви порядък), за да предотвратим отражения от края на симулационния домейн.

$$\partial P / \partial x(L, t) = -1/c \partial P / \partial t(L, t)$$

Да се намери численото решение $P(x, t)$ и да се изчисли максималното налягане на дълбочина $x = 5 \text{ cm}$.

Направете графики.