

Задачи по числени методи в медицината

Лагранжова интерполация

Задача 1: Оценка на концентрация на лекарство

Дадени са четири измервания на **концентрацията** C на лекарство (C , в mg/L) в кръвта на пациент на различни моменти от **време** (t , в **часове** h) след прилагане:

$(t, C) \rightarrow (0.5h, 3.2 \text{ mg/L}), (1.0h, 5.5 \text{ mg/L}), (2.0h, 4.8 \text{ mg/L}), (3.0h, 2.1 \text{ mg/L})$

Определете **полинома на Лагранж** $L_3(t)$ който интерполира тези данни, и го използвайте, за да оцените концентрацията на лекарството в момент $t = 1.5$ часа след началото на приема. Колко е грешката? Построете графика.

Задача 2: Прогноза за обема на тумор

Обемът на тумор (V в cm^3) е измерен в три последователни седмици, като се приема, че **растежът е гладък** в този кратък период:

$(t, V) \rightarrow (1\text{сед}, 2.5 \text{ cm}^3), (3\text{сед}, 4.2 \text{ cm}^3), (5\text{сед}, 5.1 \text{ cm}^3)$

Използвайте **Лагранжова интерполация** за да намерите полином $L_2(t)$ който моделира растежа, и прогнозирайте обема на тумора в 4-та седмица $t=4$. е грешката? Построете графика.

Метод на най-малките квадрати

Задача 3: Моделиране на метаболитна скорост

За група от петима пациенти са измерени телесната маса (M , в kg) и базисната метаболитна скорост (R в kcal/ден). Данните са:

$(M, R) \rightarrow (60, 1500), (75, 1750), (80, 1850), (90, 2000), (100, 2100)$

Използвайте **метода на най-малките квадрати** (МНМК), за да намерите **линейна зависимост** $R = aM + b$, която най-добре описва връзката между масата и метаболитната скорост.

Задача 4: Експоненциален модел на епидемия

Броят на заразените лица (N брой лица) е записан през първите пет дни (t в дни) от началото на епидемията:

$(t, N) \rightarrow (1 \text{ ден}, 10), (2 \text{ ден}, 25), (3 \text{ ден}, 60), (4 \text{ ден}, 150), (5 \text{ ден}, 350)$

Приемете, че разпространението следва **експоненциален модел** $N(t) = Ae^{Bt}$.
Линеаризирайте модела и използвайте **метода на най-малките квадрати**, за да определите параметрите A и B, които най-добре съответстват на данните.

Сплайн функции

Задача 5: Изглаждане на ЕКГ сигнал

В дадени моменти от време (t , в секунди s) са измерени следните стойности на електрическия потенциал (P , в mV) от ЕКГ:

$$(t, P) \rightarrow (0s, 0.5 mV), (0.2s, 1.2 mV), (0.4s, 0.8 mV), (0.6s, 0.3 mV)$$

Постройте **кубични сплайни** $S(P, t)$ за интерполиране на тези данни. Формулирайте системата от линейни уравнения за намиране на коефициентите на сплайните при условие на **естествени гранични условия** (т.е., втората производна е нула в крайните точки: $S''(t_0) = 0$ и $S''(t_3) = 0$).

Задача 6: Линейна интерполация на доза при лъчетерапия

При лъчетерапия е измерена абсорбираната доза (D , в греу Gy) на три различни дълбочини (x , в $\{cm\}$) в тъканта:

$$(x, D) \rightarrow (1 cm, 4.5 Gy), (5 cm, 5.8 Gy), (10 cm, 3.2 Gy)$$

За да се получи бърза оценка на дозата по цялата дълбочина, използвайте **линейни сплайн функции** за интерполация на данните. Определете функцията $S(x)$ за всеки интервал и оценете дозата на дълбочина $x = 7cm$.

Числено интегриране

Задача 7: Оценка на общата експозиция на лекарство (AUC)

Измерванията на концентрацията на лекарство ($C(t)$, в mg/L) са взети през интервал от 0 до 4 часа, с интервал $\Delta t = 1$ час:

$$C(0)=0, C(1)=6, C(2)=8, C(3)=5, C(4)=2$$

Общата експозиция на лекарството (AUC) се дава от интеграла $C(t) dt$ в граници от 0 до 4. Използвайте **Симпсъновото правило** за числено интегриране, за да оцените AUC. Колко е очакваната грешка?

Задача 8: Обем на кръвен поток

Скоростта на кръвния поток ($F(t)$, в mL/s) през артерия е измерена на всеки 0.1s секунди за половин секунда:

(t, F):→ (0s, 0 mL/s), (0.1s, 12 mL/s), (0.2s, 25 mL/s), (0.3s, 20 mL/s), (0.4s, 15 mL/s), (0.5s, 5 mL/s)

Оценете общия обем кръв (V, в mL), преминал през съда, като използвате

Трапецовидното правило за числено интегриране от 0 до 0.5 на $F(t) dt$. Оценете грешката.

Числено диференциране

Задача 9: Скорост на изменение на температурата (треска)

Температурата на пациент (T, в °C) е измерена на всеки половин час h:

(t, T):→ (0h, 37.5), (0.5h, 38.2), (1.0h, 38.8), (1.5h, 39.0)

Използвайте **формула за числено диференциране с централна разлика** от втори ред, за да оцените скоростта на изменение на температурата (първата производна $T'(t)$) в моменти $t = 0.5$ часа и $t = 1.0$ час.

Задача 10: Оценка на скоростта на ензимна реакция

Концентрацията на продукт (P, в mM) от ензимна реакция е измерена като функция на времето (t, в min минути):

(t, P): (0min, 0.0), (5min, 1.5), (10min, 2.8), (15min, 3.5), (20min, 3.8)

Използвайте **формула за числено диференциране напред** (за $t=0$), **назад** (за $t=20$) и **централна разлика** (за междинните точки), за да оцените скоростта на реакцията $P'(t)$ във всеки момент от време. Построете графика. Оценете грешката.

Задача 11. Абсорбационна доза

При планиране на **лъчетерапия** е изключително важно да се определи точно абсорбираната доза (D) във всяка точка от облъчвания обем. Приемаме, че D е функция на дълбочината (x) и страничното изместване (y).

Измерванията на абсорбираната доза (D, в Грей Gy) са взети в четири точки от правоъгълна мрежа в даден срез на тъканта:

X (дълбочина cm)	Y=1 cm	Y=3 cm
X = 2 cm	D(2,1)=3 Gy	D(2,3)=3.5 Gy
X=4 cm	D(4,1)=2.5 Gy	D(4,3)=2.9 Gy

Използвайте **двумерна Лагранжова интерполация** (билинейна интерполация), за да определите **абсорбираната доза D(3, 2)** в точка с дълбочина $x = 3$ cm и странично изместване $y = 2$ cm.

Може да използвате функцията `interp2()` на МАТЛАВ или на ръка.

Задача 12. Изчисляване на Средна Температура в Туморна Област (Хипертермия)

Хипертермията е метод за лечение на рак, при който туморната тъкан се загрява до високи температури (приблизително 42-45 °C градуса по Целзий) за определен период от време. За да се постигне ефективно лечение, е критично да се знае **средната температура** в целевата област, тъй като прегряването на здрава тъкан или недостатъчното загряване на тумора са нежелани.

Разпределението на температурата $T(x, y)$ в °C в правоъгълна туморна област R е измерено в мрежа 5×5 след прилагане на нагряване. Областта R е дефинирана като $R = [0, 6] \times [0, 6] \text{ cm}^2$.

Размерите на стъпките са: $h_x=1.5 \text{ cm}$, $h_y=1.5 \text{ cm}$

$T(x,y) \text{ } ^\circ\text{C}$	$y=0$	$y=1.5$	$y=3$	$y=4.5$	$y=6$
$x=0$	40.0	41.5	42.0	41.5	40.0
$x=1.5$	41.0	42.5	43.0	42.5	41.0
$x=3$	41.5	43.0	44.0	43.0	41.5
$x=4.5$	41.0	42.5	43.0	42.5	41.0
$x=6$	40.0	41.5	42.0	41.5	40.0

Средната температура (T_{cp}) в тази област се изчислява чрез следния двоен интеграл:

$$T_{cp} = \frac{1}{\text{площ}(R)} \iint_R T(x, y) dA = \frac{1}{(6-0).(6-0)} \int_0^6 \int_0^6 T(x, y) dx dy$$

Използвайте **двойния метод на Симпсън** за числено интегриране