Глава 5

Числено интегриране на системи обикновени диференциални уравнения

Въведение

Едва ли е необходимо да убеждаваме читателя в изключителното значение на диференциалните уравнения при изследване на най-разнообразни процеси в естествознанието и техниката. Няма да бъде преувеличение ако кажем, че това е най-често използваният инструмент в научно-изследователската дейност. Затова посвещаваме отделна глава на функциите и методите, предоставени ни от MATLAB, за числено интегриране на *обикновени диференциални уравнения* (ОДУ).

Решаването на една задача от този тип, в най-общия случай, включва следните основни етапи:

1) Съставяне на диференциалните уравнения, описващи изучавания процес. За целта се използват основни закони, теореми и уравнения от съответната област, както и диференциални зависимости между отделните величини;
2) Привеждане на диференциалните уравнения, чрез подходящи субституции, към система диференциални уравнения от първи ред. Тази операция се нарича *канонизиране* на диференциалните уравнения;
3) Съставяне на файл-функцията, пресмятаща десните части на канонизираната система диференциални уравнения, т.е. на първите производни на новите зависими променливи;
4) Избор на подходящи опции, или, казано с езика на MATLAB, избор на подходящи стойности на *свойствата* (properties), управляващи изчислителния процес;
5) Написване, при необходимост, на функциите, пресмятащи *масовата* матрица, матрицата на Якоби и др., в съответствие с избраните стойности на *свойствата* от предишната точка;
6) Съставяне на главната програма, в която се въвеждат стойности на физическите параметри, началните условия, вика се една от седемте MATLAB-функции за числено интегриране (Solvers) със съответните действителни аргументи и опции и се визуализират получените резултати с подходящи графики.

5.1. Канонизиране на диференциалните уравнения

Функциите за числено интегриране на ОДУ в MATLAB, както и повечето подобни процедури в други програмни системи или езици, са предназначени за решаване на системи диференциални уравнения от *първи* ред:

(5.1)
$$\left| \begin{array}{l} y_1' = f_1(x, y_1, y_2, ..., y_n) \\ y_2' = f_2(x, y_1, y_2, ..., y_n) \\ .... \\ y_n' = f_n(x, y_1, y_2, ..., y_n) \end{array} \right.$$

Това съвсем не означава, че с тях не можем да интегрираме и уравнения от по-висок ред. Последните лесно се трансформират с подходящи субституции в уравненията от първи ред (5.1). Ще разгледаме как се извършва канонизирането в следните два основни случая:

5.1.1. Едно обикновено диференциално уравнение от n-ти ред, разрешено спрямо старшата производна

Диференциалното уравнение от n-ти ред

(5.2)
$$y^{(n)}(x) = f(x, y, y', y'', ..., y^{(n-1)})$$

с помощта на субституциите

(5.3)
$$y = y_1, \quad y' = y_2, \quad y'' = y_3, ..., \quad y^{(n-1)} = y_n$$

се свежда към следната система от n диференциални уравнения от първи ред:

(5.4)
$$\left| \begin{array}{l} y_1' \quad = y_2 \\ y_2' \quad = y_3 \\ .... \\ y_{n-1}' = y_n \\ y_n' \quad = f(x, y_1, y_2, ..., y_n) \end{array} \right.$$

5.1.2. Система ОДУ от втори ред, разрешени относно вторите производни

Системата диференциални уравнения от втори ред

(5.5)
$$\left| \begin{array}{l} \ddot{q}_1 = f_1(t, q_1, q_2, ..., q_n, \dot{q}_1, \dot{q}_2, ..., \dot{q}_n) \\ \ddot{q}_2 = f_2(t, q_1, q_2, ..., q_n, \dot{q}_1, \dot{q}_2, ..., \dot{q}_n) \\ .... \\ \ddot{q}_n = f_n(t, q_1, q_2, ..., q_n, \dot{q}_1, \dot{q}_2, ..., \dot{q}_n) \end{array} \right.$$

чрез субституциите

$$\left| \begin{array}{l} q_1 = y_1, \quad q_2 = y_2, ..., \quad q_n = y_n \\ \dot{q}_1 = y_{n+1}, \dot{q}_2 = y_{n+2}, ..., \dot{q}_n = y_{2n} \end{array} \right. \tag{5.6}$$

се свежда към следната система диференциални уравнения от първи ред:

$$\left| \begin{array}{l} \dot{y}_1 = y_{n+1} \\ \dot{y}_2 = y_{n+2} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \dot{y}_n = y_{2n} \\ \dot{y}_{n+1} = f_1(t, y_1, y_2, ..., y_n, y_{n+1}, y_{n+2}, ..., y_{2n}) \\ \dot{y}_{n+2} = f_2(t, y_1, y_2, ..., y_n, y_{n+1}, y_{n+2}, ..., y_{2n}) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \dot{y}_{2n} = f_n(t, y_1, y_2, ..., y_n, y_{n+1}, y_{n+2}, ..., y_{2n}) \end{array} \right. \tag{5.7}$$

Възможни са случаи, когато системата диференциални уравнения от втори ред не е решена спрямо вторите производни. В такъв случай, ако уравненията са повече от две, е безсмислено да се опитваме да ги решим аналитично [20], [54]. Това ще доведе до грамадни изрази и само ще усложни и забави решението. Най-добре е решаването на системата спрямо вторите производни да се извършва числено на всяка стъпка от интегрирането в самата файл-функция. Как става това ще видим в следващия раздел 5.2.