Интерполационни сплайни

Постановка на задачата

Нека $y = f(x)$ е функция, дефинирана в интервала $[a,b]$ и е известна таблица от стойностите $y_i = f(x_i)$ на функцията в точките (възлите) $a \le x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n \le b$. В общия случай възлите са неравноотстоящи, като стъпките между тях ще означаваме с $h_k = x_k - x_{k-1}$. Нека таблицата има вида:

x_i	x_0	x_1	…	x_i	…	x_n
y_i	y_0	y_1	…	y_i	…	y_n

Интерполационният сплайн $S_k(f,x)$ от ред k е функция със следните свойства:

(1) $S_k(f,x)$ е полином $f_i(x)$ от степен k във всеки подинтервал $[x_{i-1},x_i]$, $i=\overline{1,n}$.

(2) $S_k(f,x)$ интерполира функцията, т.е. $S_k(f,x_i) = y_i$, $i=\overline{0,n}$,

(3) $S_k(f,x)$ и производните му до ред (k-1) са непрекъснати навсякъде в $[a,b]$.

Когато сплайните удовлетворяват и други допълнителни свойства, те се намират по единствен начин. Най-използвани са сплайните от ред k = 1, 2 и 3, които се наричат съответно линеен, квадратичен и кубичен сплайн.

Линеен сплайн

Тук k = 1, т.е. във всеки подинтервал $[x_{i-1},x_i]$, $i=\overline{1,n}$, сплайнът $S_1(f,x)$ е полином от първа степен (отсечка), която съгласно интерполационното условие (2) свързва точките (x_{i-1},y_{i-1}) и (x_i,y_i). Тъй като през две точки минава само една отсечка, то линейният сплайн е единствен. Като се интерполира таблицата са всеки подинтервал, получаваме по-долу дадените формули за пресмятане на коефициентите на линейния сплайн по изходна таблица с данни. Графиката на сплайна е начупена линия.

Обща формула на линеен сплайн	Коефициенти на сплайна
$S_1(f,x)=\begin{cases} f_1 = a_1 + b_1(x-x_0)\ , & x\in[x_0,x_1] \\ \dots & \\ f_i = a_i + b_i(x-x_{i-1})\ , & x\in[x_{i-1},x_i] \\ \dots & \\ f_n = a_n + b_n(x-x_{n-1})\ , & x\in[x_{n-1},x_n] \end{cases}$	$a_i = y_{i-1},$ $b_i = \dfrac{y_i - y_{i-1}}{h_i}, \quad i=\overline{1,n}$

Нека сме изчислили коефициентите на линейния сплайн по горните формули и x' е произволна точка от $[a,b]$. За да намерим приближената стойност на функцията $y=f(x)$, (т.е. $y(x')$) най-напред определяме в кой подинтервал $[x_{i-1},x_i]$ се намира x', след което заместваме $x=x'$ в съответния ред на $S_1(f,x)$.

Квадратичен сплайн

При k = 2 съгласно свойство (1) търсеният сплайн във всеки подинтервал $[x_{i-1},x_i]$ е полином от втора степен (част от парабола) и коефициентите му са $3n$ на брой. За тяхното определяне се използва интерполационното свойство (2), откъдето получаваме $2n$ уравнения и свойство (3) за непрекъснатост на първата производна, което дава още n-1 уравнения за всички междинни вътрешни точки $x_1,x_2,...,x_{n-1}$. Едно условие остава свободно, т.е. квадратичният сплайн не е единствен и се определя със задаване на едно допълнително условие. Формулите за вида и пресмятането на коефициентите на $S_2(x)$ са приведени на следната таблица, където за определеност свободното условие е зададено в левия край на интервала с $b_1=\gamma_1$. Ако $b_1=\gamma_1=0$ сплайнът се нарича **<u>естествен.</u>** Процедурата на изчисляване на коефициентите му е рекурентна.

Обща формула на квадратичен сплайн	Коефициенти на сплайна
$S_2=\begin{cases} f_1 = a_1 + b_1(x-x_0)+c_1(x-x_0)^2, & x\in[x_0,x_1] \\ \dots & \\ f_i = a_i + b_i(x-x_{i-1})+c_i(x-x_{i-1})^2, & x\in[x_{i-1},x_i] \\ \dots & \\ f_n = a_n + b_n(x-x_{n-1})+c_n(x-x_{n-1})^2, & x\in[x_{n-1},x_n] \end{cases}$	$a_i = y_{i-1},$ $b_1=\gamma_1,$ $b_{i+1} = -b_i + 2\dfrac{y_i - y_{i-1}}{h_i},$ $c_i = \dfrac{b_{i+1}-b_i}{2h_i}, \quad i=\overline{1,n}$

Кубичен сплайн

По аналогия се построява и сплайнът от трета степен, който се определя с намирането на $4n$ коефициенти по условия (1)-(3). Тъй като освен интерполационното свойство (2) тук се изисква непрекъснатост на $S_3'(x)$ и $S_3''(x)$ се формират $4n$-2 условия и две условия остават свободни. Следователно кубичният сплайн е единствен при задаване на две допълнителни условия. В таблицата по-долу те са означени с γ_1 и γ_2. По-точно тук разглеждаме условията: $S_3''(a) = 2c_1 = l_1 = \gamma_1$ и $S_3''(b) = 2c_n + 6d_n h_n = l_{n+1} = \gamma_2$.

Ако $\gamma_1 = \gamma_2 = 0$ сплайнът се нарича **естествен** кубичен сплайн.

Ще отбележим, че дадените тук представяния на сплайните не са единствени. Освен това могат да се задават редица други типове допълнителни условия, например $S_3'(a) = \gamma_1$ и $S_3'(b) = \gamma_2$, както и различни комбинации с по-горните условия, периодични условия и др.

Обща формула на кубичен сплайн
$S_3 = \begin{cases} f_1 = a_1 + b_1(x - x_0) + c_1(x - x_0)^2 + d_1(x - x_0)^3, & x \in [x_0, x_1] \\ \dots \\ f_i = a_i + b_i(x - x_{i-1}) + c_i(x - x_{i-1})^2 + d_i(x - x_{i-1})^3, & x \in [x_{i-1}, x_i] \\ \dots \\ f_n = a_n + b_n(x - x_{n-1}) + c_n(x - x_{n-1})^2 + d_n(x - x_{n-1})^3, & x \in [x_{n-1}, x_n] \end{cases}$

Коефициенти на кубичния сплайн

$$a_i = y_{i-1}, \quad b_i = \frac{y_i - y_{i-1}}{h_i} - \frac{h_i}{6}(l_{i+1} + 2l_i), \quad i = \overline{1,n}$$

$$c_i = \frac{l_i}{2}, \quad d_i = \frac{l_{i+1} - l_i}{6h_i}, \quad i = \overline{1,n-1}$$

Тук помощните коефициенти l_i са решения на следната тридиагонална система линейни алгебрични уравнения с преобладаващ главен диагонал:

$$\left| \begin{array}{lllll} l_1 & & & & = \gamma_1 \\ h_1 l_1 & +2(h_1 + h_2) l_2 & +h_2 l_3 & & = 6\left(\dfrac{y_2 - y_1}{h_2} - \dfrac{y_1 - y_0}{h_1}\right) \\ & & \dots & & \\ & h_{i-1} l_{i-1} & +2(h_{i-1} + h_i) l_i & +h_i l_{i+1} & = 6\left(\dfrac{y_i - y_{i-1}}{h_i} - \dfrac{y_{i-1} - y_{i-2}}{h_{i-1}}\right) \\ & & & \dots & \\ & & & l_{n+1} & = \gamma_2 \end{array} \right.$$

Коефициенти на кубичния сплайн в случай на равноотстоящи възли
$h = x_i - x_{i-1}, \quad i = \overline{1,n}$ $a_i = y_{i-1}, \quad b_i = \dfrac{y_i - y_{i-1}}{h} - \dfrac{h}{6}(l_{i+1} + 2l_i), \quad i = \overline{1,n}$ $c_i = \dfrac{l_i}{2}, \quad d_i = \dfrac{l_{i+1} - l_i}{6h}, \quad i = \overline{1,n-1}$

Помощните коефициенти l_i се намират от системата:

$$\left|\begin{array}{lllll} l_1 & & & & = \gamma_1 \\ l_1 & +4l_2 & +l_3 & & = 6\,\dfrac{y_0 - 2y_1 + y_2}{h^2} \\ & & \ldots\ldots & & \\ & l_{i-1} & +4l_i & +l_{i+1} & = 6\,\dfrac{y_i - 2y_{i-1} + y_{i-2}}{h^2} \\ & & & \ldots\ldots & \\ & & & l_{n+1} & = \gamma_2 \end{array}\right.$$

Пример 1. Дадена е следната таблица от стойности на функцията $y = f(x)$:

x_i	3,0	4,5	7,0	9,0
y_i	2,5	1,0	2,5	0,5

Да се построи указаният сплайн и с негова помощ да се намерят приближените стойности на функцията в точките: $z_1 = 4$ и $z_2 = 5$:

а) линеен сплайн

б) естествен квадратичен сплайн

в) естествен кубичен сплайн

Решение:

Изчисляваме стъпките: $h_1 =$ 4,5 - 3 = 1,5; $h_2 =$7 - 4,5 = 2,5; $h_3 =$ 9 – 7 = 2.

а) По формулите за S_1 пресмятаме последователно коефициентите a_i, b_i:

при $i = 1$, интервал [3,0; 4,5]: $a_1 = y_0 = 2{,}5$, $b_1 = \dfrac{y_1 - y_0}{h_1} = \dfrac{1 - 2{,}5}{1{,}5} = -1$;

при $i = 2$, интервал [4,5; 7]: $a_2 = y_1 = 1$, $b_2 = \dfrac{y_2 - y_1}{h_2} = \dfrac{2{,}5 - 1}{2{,}5} = 0{,}6$;

при $i = 3$, интервал [7; 9]: $a_3 = y_2 = 2{,}5$, $b_3 = \dfrac{y_3 - y_2}{h_3} = \dfrac{0{,}5 - 2{,}5}{2} = -1$.

Нанасяме коефициентите и получаваме следната таблица:

i	a_i	b_i	Линеен сплайн $S_1(f,x)$ от пример 1а)
1	2,5	-1,0	$f_1 = 2{,}5-(x-3)$ при $x \in [3;\ 4{,}5]$
2	1,0	0,6	$f_2 = 1+0{,}6(x-4{,}5)$ при $x \in [4{,}5;\ 7]$
3	2,5	-1,0	$f_3 = 2{,}5-(x-7)$ при $x \in [7;\ 9]$

За да изчислим приближената стойност на функцията в точката $z_1 = 4$ с помощта на сплайна, определяме, че тя се намира в първия интервал и ще се апроксимира по формулата за f_1. Тогава

$$f(4) \approx f_1(4) = a_1 + b_1(z_1 - x_0) = 2{,}5 + (-1)(4-3) = 1{,}5\,.$$

Аналогично $f(5) \approx f_2(5) = a_2 + b_2(z_2 - x_1) = 1 + 0{,}6(5-4{,}5) = 1{,}3$.

Графиката на сплайна е показана на фиг.1. – S_1 .

Лесно може да се установи, че сплайнът е вярно определен. В случая на линеен сплайн за целта трябва само да се провери дали той минава през точките y_i, i = 1,2,3,4 и е непрекъснат. Наистина $S_1(3) = f_1(3) = 2{,}5$, $S_1(4{,}5) = f_2(4{,}5) = 1$ и $S_1(7) = f_2(7) = 2{,}5$, Освен това: $f_1(4{,}5) = 2{,}5 + (-1).(4{,}5-3) = 2{,}5 - 1{,}5 = 1 = f_2(4{,}5)$, $f_2(7) = 1 + (0{,}6).(2{,}5) = 1 + 1{,}5 = 2{,}5 = f_3(7)$ и $f_3(9) = 2{,}5 + (-1).(9-7) = 2{,}5 - 2 = 0{,}5$.

б) В случая на естествен квадратичен сплайн S_2 изчисленията се извършват по рекурентните формули от съответната таблица. за a_i, b_i, c_i при $i = 1, 2, 3$ и $\gamma_1 = 0$:

i	a_i	b_i	c_i	Квадратичен сплайн $S_2(f,x)$ от пример 1б)
1	2,5	0,0	-0,6667	$f_1 = 2{,}5 - 0{,}6667(x-3)^2$ при $x \in [3;4{,}5]$
2	1,0	-2,0	1,0400	$f_2 = 1 - 2(x-4{,}5) + 1{,}04(x-4{,}5)^2$ при $x \in [4{,}5;7]$
3	2,5	3,2	-2,1000	$f_3 = 2{,}5 + 3{,}2(x-7) - 2{,}1(x-7)^2$ при $x \in [7;9]$
4	-	-5,2	-	-

Приближението на функцията в точката $z_1 = 4$ се намира от

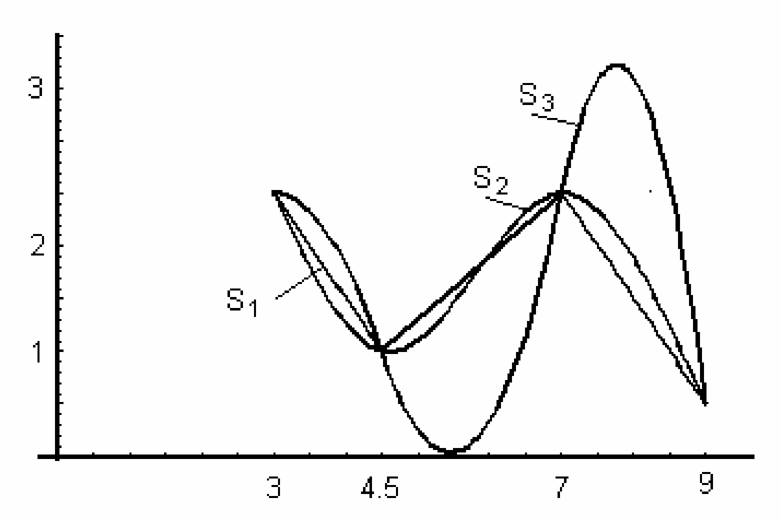
$$f(4) \approx f_1 = a_1 + b_1(z_1 - x_0) + c_1(z_1 - x_0)^2 = 2{,}5 - 0{,}6667(4-3)^2 = 1{,}8333\,.$$

Аналогично за другата точка $z_2 = 5$ получаваме

$$f(5) \approx f_2 = a_2 + b_2(z_2 - x_1) + c_2(z_2 - x_1)^2 = 1 - 2(5-4{,}5) + 1{,}04(5-4{,}5)^2 = 0{,}26\ .$$

в) Нека сега да построим и естествения кубичен сплайн S_3. За целта образуваме линейната система за помощните коефициенти l_i, където i = 1, 2, 3, 4 и $\gamma_1 = \gamma_2 = 0$:

$$\begin{cases} l_1 & & & = 0 \\ h_1 l_1 + 2(h_1+h_2) l_2 + h_2 l_3 & & & = 6\left(\dfrac{y_2-y_1}{h_2} - \dfrac{y_1-y_0}{h_1}\right) \\ h_2 l_2 + 2(h_2+h_3) l_3 + h_3 l_4 & & & = 6\left(\dfrac{y_3-y_2}{h_3} - \dfrac{y_2-y_1}{h_2}\right) \\ l_4 & & & = 0 \end{cases}.$$



Фиг. 1. Графики на получените сплайни от задача 1а), 1б) и 1в).

Като заместим конкретните данни стигаме до системата:

$$\begin{cases} 8 l_2 + 2{,}5 l_3 = 9{,}6 \\ 2{,}5 l_2 + 9 l_3 = -9{,}6 \end{cases}.$$

Решавайки тази система, за помощните коефициенти намираме:

$l_1 = 0,\ l_2 = 1{,}6791,\ l_3 = -1{,}5331,\ l_4 = 0$.

След заместване във формулите, за коефициентите получаваме таблицата:

i	l_i	a_i	b_i	c_i	d_i
1	0,0000	2,5	-1,4198	0,0000	0,1866
2	1,6791	1,0	-0,1605	0,8395	-0,2141
3	-1,5331	2,5	0,0221	-0,7666	0,1278
4	0,0000	-	-	0,0000	-

С помощта на тези коефициенти търсеният кубичния сплайн се записва във вида:

Таблица на кубичния сплайн $S_3(f,x)$ от пример 1в)	
$f_1 = 2{,}5 - 1{,}4198(x-3) + 0{,}1866(x-3)^3$	при $x \in [3;\ 4{,}5]$
$f_2 = 1 - 0{,}1605(x-4{,}5) + 0{,}8395(x-4{,}5)^2 - 0{,}2141(x-4{,}5)^3$	при $x \in [4{,}5; 7]$
$f_3 = 2{,}5 + 0{,}0221(x-7) - 0{,}7666(x-7)^2 + 0{,}1278(x-7)^3$	при $x \in [7; 9]$

Както и в предишните случаи, за да получим приближени значения в точките $z_1 = 4$ и $z_2 = 5$ с помощта на кубичния сплайн заместваме в общите формули, в зависимост от интервала, в който се намира точката. За първата точка имаме

$$f(4) \approx f_1(4) = a_1 + b_1(z_1 - x_0) + c_1(z_1 - x_0)^2 + d_1(z_1 - x_0)^3 =$$

$$2{,}5 - 1{,}4198.(4-3) + 0.(4-3)^2 + 0{,}1866.3^3 = 1{,}2668 \ .$$

За втората точка -

$$f(5) \approx f_2(5) = a_2 + b_2(z_2 - x_1) + c_2(z_2 - x_1)^2 + d_2(z_2 - x_1)^3 =$$

$$1 - 0{,}1605.(5-4{,}5) + 0{,}8395.(5-4{,}5)^2 - 0{,}2141.(5-4{,}5)^3 = 1{,}1029 \,.$$

Автор: Снежана Гочева-Илиева, snow@pu.acad.bg