Семинар № 9

Разлагане на рационални дроби като сбор от елементарни дроби.

Разлагане на рационални дроби. Метод на неопределените коефициенти

При разлагането на рационални дроби като сума от елементарни дроби целта ни е да превърнем дробта в сума от няколко дроби, чиито знаменатели са неразложими полиноми.

Първо трябва да определим знаменателя на дробта, която искаме да разлагаме, и да го разложим на неразложими множители.

След това целта ни е да превърнем първоначалната дроб в сума от дроби със знаменатели – определените неразложими множители.

Числителите на дробите, чиито знаменатели определихме, са неизвестни полиноми, които трябва да намерим. Това става чрез метода на неопределените коефициенти, който ще бъде демонстриран в следните примери:

Пример 1 - Когато можем да разложим знаменателя на множители от първа степен:

Да разложим дробта $\dfrac{9x-3}{x^2+x-6}$.

Нейният знаменател е $x^2+x-6=(x+3)(x-2)$ (разлагаме го, решавайки квадратното уравнение $x^2+x-6=0$).

Неразложимите множители от знаменателя са $x+3$ и $x-2$. Това са полиноми от първа степен $\Rightarrow$ целта ни е да превърнем дробта в сбор от дробите:

$$\frac{9x-3}{x^2-x-6}=\frac{9x-3}{(x+3)(x-2)}=\frac{A}{x+3}+\frac{B}{x-2}$$

A и B са полиномите, които трябва да определим. За целта привеждаме дясната част на равенството под общ знаменател:

$$\frac{9x-3}{(x-2)(x+3)}=\frac{A(x-2)}{(x+3)(x-2)}+\frac{B(x+3)}{(x-2)(x+3)}=\frac{A(x-2)+B(x+3)}{(x-2)(x+3)}$$

По този начин приравнихме знаменателите на първоначалната дроб и търсените дроби. Остава да приравним и числителите.

$$\Rightarrow\ 9x-3=A(x-2)+B(x+3)$$

$$9x-3=Ax-2A+Bx+3B$$

$$9x-3=(A+B)x-2A+3B$$

В лявата част на уравнението имаме $9x$, а в дясната $(A+B)x$. За да получим равенство, то трябва $9 = A + B$. Аналогично за членовете, в които не присъства $x \Rightarrow -3 = -2A + 3B$

$\Rightarrow$ Получаваме системата от линейни уравнения:

$$\begin{cases} A + B = 9 \\ -2A + 3B = -3 \end{cases}$$

От първото уравнение изразяваме $A = 9 - B$ и заместваме във второто:

$-2(9 - B) + 3B = -3$

$-18 + 2B + 3B = -3$

$5B = 15 \quad \Rightarrow \quad B = 3 \qquad A = 9 - B = 9 - 3 = 6$

Получихме $\mathrm{A} = 6$ и $\mathrm{B} = 3$, т. е. $\dfrac{9x-3}{x^2+x-6} = \dfrac{6}{x+3} + \dfrac{3}{x-2}$

Можем да направим проверка, ако съберем дробите от дясната страна на равенството:

$$\frac{6}{x+3} + \frac{3}{x-2} = \frac{6(x-2)}{(x+3)(x-2)} + \frac{3(x+3)}{(x-2)(x+3)} = \frac{6x-12+3x+9}{(x-2)(x+3)} = \frac{9x-3}{x^2+x-6}$$

действително получихме първоначалната дроб $\Rightarrow$ намерили сме вярното разлагане.

Пример 2 – Когато в знаменателя има неразложими множители от втора степен:

Да разложим дробата $\dfrac{2x^3+6x^2+7x+9}{x^4+x^3-x-1}$.

Първо трябва да разложим знаменателя. Ще използваме схемата на Хорнер:

Възможни корени са 1 и -1.

	1	1	0	-1	-1
1	1	$1.1 + 1 = 2$	$1.2 + 0 = 2$	$1.2 + (-1) = 1$	$1.1 + (-1) = 0$

$\Rightarrow$ 1 е корен $\Rightarrow$ $x^4 + x^3 - x - 1 = (x-1)(x^3 + 2x^2 + 2x + 1)$

Продължаваме да разлагаме със схемата на Хорнер, използвайки новополучените коефициенти. Отново възможни корени са 1 и -1.

	1	2	2	1
1	1	$1.1 + 2 = 3$	$1.3 + 2 = 5$	$1.5 + 1 = 6 \neq 0$
-1	1	$-1.1 + 2 = 1$	$-1.1 + 2 = 1$	$-1.1 + 1 = 0$

$\Rightarrow$ -1 е корен $\Rightarrow$ $(x-1)(x^3+2x^2+2x+1) = (x-1)(x+1)(x^2+x+1)$

Полиномът x^2+x+1 е неразложим (няма реални корени). Това установяваме чрез дискриминантата на уравнението: $x^2+x+1=0 \quad D=-3<0$.

$\Rightarrow$ знаменателят на дробта се разлага във вида: $x^4+x^3-x-1 = (x-1)(x+1)(x^2+x+1)$

В него участва и полином от втора степен $\Rightarrow$ дробите, които ще търсим ще бъдат:

$$\frac{2x^3+6x^2+7x+9}{x^4+x^3-x-1} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-1} + \frac{Cx+D}{x^2+x+1}$$

Над знаменателите, които са полиноми от първа степен поставяме неизвестен полином (едночлен) от нулева степен, а над знаменателя, който е полином от втора степен – търсим полином от първа степен.

По-нататък процедурата по намирането на неизвестните е както в пример 1 – по метода на неопределените коефициенти.

Първо привеждаме дясната страна на равенството под общ знаменател и опростяваме:

$$\frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-1} + \frac{Cx+D}{x^2+x+1} =$$

$$= \frac{A(x-1)(x^2+x+1)}{(x+1)(x-1)(x^2+x+1)} + \frac{B(x+1)(x^2+x+1)}{(x+1)(x-1)(x^2+x+1)} + \frac{(Cx+D)(x-1)(x+1)}{(x+1)(x-1)(x^2+x+1)} =$$

$$= \frac{A(x^3+x^2+x-x^2-x-1) + B(x^3+x^2+x+x^2+x+1) + (Cx+D)(x^2-1)}{(x+1)(x-1)(x^2+x+1)} =$$

$$= \frac{Ax^3 - A + Bx^3 + 2Bx^2 + 2Bx + B + Cx^3 - Cx + Dx^2 - D}{(x+1)(x-1)(x^2+x+1)} =$$

$$= \frac{(A+B+C)x^3 + (2B+D)x^2 + (2B-C)x + (-A+B-D)}{(x+1)(x-1)(x^2+x+1)}$$

Отново – приравнили сме знаменателите на търсените дроби с първоначалната дроб, остава да приравним и числителите:

$\Rightarrow 2x^3+6x^2+7x+9 = (A+B+C)x^3 + (2B+D)x^2 + (2B-C)x + (-A+B-D)$

$\Rightarrow$ Трябва да намерим такива числа A, B, C и D, за които горното равенство да е изпълнено.

Съставяме линейна система от уравнения като приравняваме коефициентите пред всяка от степените на x:

$$\begin{cases} A+B+C=2 & (\text{пред } x^3) \\ 2B+D=6 & (\text{пред } x^2) \\ 2B-C=7 & (\text{пред } x^1) \\ -A+B-D=9 & (\text{пред } x^0) \end{cases}$$

От първото уравнение изразяваме $C = 2 - A - B$.

От третото уравнение изразяваме $C = 2B - 7$.

$\Rightarrow\ C = 2 - A - B = 2B - 7\ \Rightarrow\ 3B = 9 - A\quad \Rightarrow A = 9 - 3B$

От второто уравнение изразяваме $D = 6 - 2B$.

Заместваме в четвъртото уравнение:

$\Rightarrow -(9-3B) + B - (6-2B) = 9$

$-9 + 3B + B - 6 + 2B = 9 \qquad 6B = 24\ \ \Rightarrow\ \ B = 4$

$\Rightarrow\ C = 2B - 7 = 2.4 - 7 = 1$

$\Rightarrow\ A = 9 - 3B = 9 - 3.4 = -3$

$\Rightarrow -A + B - D = 9 \quad D = -A + B - 9 \quad D = 3 + 4 - 9 = -2$

$$\Rightarrow\ \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-1} + \frac{Cx+D}{x^2+x+1} = \frac{-3}{x+1} + \frac{4}{x-1} + \frac{x-2}{x^2+x+1}$$

$$\frac{2x^3+6x^2+7x+9}{x^4+x^3-x-1} = \frac{-3}{x+1} + \frac{4}{x-1} + \frac{x-2}{x^2+x+1}$$

Пример 3 – Когато степента на полинома от числителя е по-голяма от степента на полинома в знаменателя

Да разложим дробта $\dfrac{x^3-x^2-42x-24}{x^2-2x-35}$.

В дробта, която трябва да разложим, степента на полинома от числителя е 3-та, а на полинома от знаменателя втора $\Rightarrow$ степента на числителя е по-голяма от тази на знаменателя. В пример 1 и 2 е обратното и методът описан в тях е за дроби, при които степента на знаменателя е по-голяма от степента на числителя.

За да можем да решим пример 3 както пример 1 и 2 трябва първо да разделим числителя на знаменателя (делене на полиноми).

$$
\begin{array}{l}
\quad x^3 - x^2 - 42x - 24 : \; x^2 - 2x - 35 = x + 1 \\
- \\
\underline{x^3 - 2x^2 - 35x} \\
\qquad x^2 - 7x - 24 \\
\quad - \\
\qquad \underline{x^2 - 2x - 35} \\
\qquad\quad -5x + 11
\end{array}
$$

$$\frac{x^3 - x^2 - 42x - 24}{x^2 - 2x - 35} = x + 1 + \frac{-5x + 11}{x^2 - 2x - 35}$$

По този начин привеждаме дробта във вид, който вече знаем как можем да разложим.

Първо разлагаме знаменателя, решавайки уравнението $x^2 - 2x - 35 = 0$

$$x_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{4 + 140}}{2} = \frac{2 \pm 12}{2} \qquad x_1 = 7 \quad x_2 = -5$$

$$\Rightarrow \; x^2 - 2x - 35 = (x - 7)(x + 5)$$

$$\Rightarrow \frac{-5x + 11}{x^2 - 2x - 35} = \frac{-5x + 11}{(x - 7)(x + 5)} = \frac{A}{x - 7} + \frac{B}{x + 5}$$

$$\frac{A}{x - 7} + \frac{B}{x + 5} = \frac{A(x + 5) + B(x - 7)}{(x - 7)(x + 5)} = \frac{(A + B)x + 5A - 7B}{(x - 7)(x + 5)}$$

$$\Rightarrow \; -5x + 11 = (A + B)x + 5A - 7B$$

$$\Rightarrow \left| \begin{array}{l} A + B = -5 \\ 5A - 7B = 11 \end{array} \right.$$

От първото уравнение изразяваме $A = -5 - B$.

Заместваме във второто уравнение $5(-5 - B) - 7B = 11 \qquad -25 - 12B = 11 \quad B = -3$

$$A = -5 - B = -5 + 3 = -2$$

$$\Rightarrow \frac{x^3 - x^2 - 42x - 24}{x^2 - 2x - 35} = x + 1 + \frac{-5x + 11}{x^2 - 2x - 35} = x + 1 + \frac{-2}{x - 7} + \frac{-3}{x + 5}$$

<u>Задача 1:</u> Разложете рационалната дроб на сума от елементарни дроби:

а) $\dfrac{7x - 24}{20x(x + 3)}$ б) $\dfrac{x}{(x + 1)(x + 4)}$ в) $\dfrac{x + 8}{x^4 - x^3 + 2x^2 - 8x}$

Решение:

а) $\dfrac{7x - 24}{20x(x + 3)} = \dfrac{A}{20x} + \dfrac{B}{x + 3}$

$$\frac{A}{20x}+\frac{B}{x+3}=\frac{A(x+3)}{20x(x+3)}+\frac{20Bx}{20x(x+3)}=\frac{Ax+3A+20Bx}{20x(x+3)}=\frac{(A+20B)x+3A}{20x(x+3)}$$

$$\Rightarrow\ 7x-24=(A+20B)x+3A$$

$$\Rightarrow\ \left|\begin{array}{l}A+20B=7\\ 3A=-24\end{array}\right.\quad\Rightarrow\ A=-8\quad -8+20B=7\quad B=\frac{15}{20}=\frac{3}{4}$$

$$\Rightarrow\ \frac{7x-24}{20x(x+3)}=\frac{-8}{20x}+\frac{3}{4(x+3)}=\frac{-4}{5x}+\frac{3}{4(x+3)}$$

б) $\dfrac{x}{(x+1)(x+4)}=\dfrac{A}{x+1}+\dfrac{B}{x+4}$

$$\frac{A}{x+1}+\frac{B}{x+4}=\frac{A(x+4)+B(x+1)}{(x+1)(x+4)}=\frac{(A+B)x+4A+B}{(x+1)(x+4)}$$

$$\Rightarrow\ \left|\begin{array}{l}A+B=1\\ 4A+B=0\end{array}\right.$$

От първото уравнение $A=1-B$.

Заместваме във второто уравнение: $4(1-B)+B=0\quad 4-3B=0\quad 3B=4\quad B=\frac{4}{3}$

$$\Rightarrow\ A=1-B=1-\frac{4}{3}=-\frac{1}{3}$$

$$\frac{x}{(x+1)(x+4)}=\frac{A}{x+1}+\frac{B}{x+4}=\frac{-\frac{1}{3}}{x+1}+\frac{\frac{4}{3}}{x+4}=-\frac{1}{3(x+1)}+\frac{4}{3(x+4)}$$

Проверка:

$$-\frac{1}{3(x+1)}+\frac{4}{3(x+4)}=\frac{-x-4+4(x+1)}{3(x+1)(x+4)}=\frac{3x}{3(x+1)(x+4)}=\frac{x}{(x+1)(x+4)}$$

в) $\dfrac{x+8}{x^4-x^3+2x^2-8x}$

Първо трябва да разложим знаменателя: $x^4-x^3+2x^2-8x=x(x^3-x^2+2x-8)$

Не можем да изнесем друг общ множител пред скоба ⇒ прилагаме схемата на Хорнер.
Възможните корени на уравнението $x^3-x^2+2x-8=0$ са ±1; ±2; ±4; ±8.

	1	-1	2	-8
1	1	$1.1+(-1)=0$	$1.0+2=2$	$1.2+(-8)=-6\neq0$
−1	1	$-1.1+(-1)=-2$	$-1.(-2)+2=4$	$-1.4+(-8)=-12\neq0$
2	1	$2.1+(-1)=1$	$2.1+2=4$	$2.4+(-8)=0$

$\Rightarrow$ 2 е корен на уравнението $\Rightarrow$ можем да разложим $x^3 - x^2 + 2x - 8$ като

$x^3 - x^2 + 2x - 8 = (x-2)(x^2 + x + 4)$

Остава да разложим $x^2 + x + 4$. За целта решаваме квадратното уравнение $x^2 + x + 4 = 0$

$D = 1 - 16 = -15 < 0 \Rightarrow$ уравнението няма реални корени $\Rightarrow$ не можем да го разложим повече.

$\Rightarrow$ окончателното разлагане на знаменателя е $x^4 - x^3 + 2x^2 - 8x = x(x-2)(x^2 + x + 4)$

$$\Rightarrow \frac{x+8}{x^4 - x^3 + 2x^2 - 8x} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-2} + \frac{Cx + D}{x^2 + x + 4}$$

$$\Rightarrow \frac{A}{x} + \frac{B}{x-2} + \frac{Cx + D}{x^2 + x + 4} = \frac{A(x^2 + x + 4)(x-2) + Bx(x^2 + x + 4) + (Cx + D)x(x-2)}{x(x-2)(x^2 + x + 4)} =$$

$$= \frac{A(x^3 - x^2 + 2x - 8) + Bx^3 + Bx^2 + 4Bx + (Cx + D)(x^2 - 2x)}{x(x-2)(x^2 + x + 4)} =$$

$$= \frac{Ax^3 - Ax^2 + 2Ax - 8A + Bx^3 + Bx^2 + 4Bx + Cx^3 - 2Cx^2 + Dx^2 - 2Dx}{x(x-2)(x^2 + x + 4)} =$$

$$= \frac{(A + C + B)x^3 + (-A + B - 2C + D)x^2 + (2A + 4B - 2D)x + (-8A)}{x(x-2)(x^2 + x + 4)}$$

$$\Rightarrow x + 8 = (A + C + B)x^3 + (-A + B - 2C + D)x^2 + (2A + 4B - 2D)x + (-8A)$$

$$\Rightarrow \left| \begin{array}{cl} A + C + B = 0 & (\text{пред } x^3) \\ -A + B - 2C + D = 0 & (\text{пред } x^2) \\ 2A + 4B - 2D = 1 & (\text{пред } x^1) \\ -8A = 8 & (\text{пред } x^0) \end{array} \right.$$

От четвъртото уравнение $\Rightarrow$ $A = -1$

Заместваме в първото уравнение $\Rightarrow$ $A + C + B = 0 \quad -1 + C + B = 0 \quad \Rightarrow C = 1 - B$

Заместваме в третото уравнение $\Rightarrow$ $2(-1) + 4B - 2D = 1 \quad \Rightarrow \quad D = \frac{4B-3}{2}$

Заместваме във второто уравнение $\Rightarrow$ $1 + B - 2(1 - B) + \frac{4B-3}{2} = 0$

$2 + 2B - 4 + 4B + 4B - 3 = 0 \qquad 10B = 5 \Rightarrow \; B = \dfrac{1}{2}$

$$D = \frac{4B - 3}{2} = \frac{\frac{4}{2} - 3}{2} = \frac{-1}{2} = -\frac{1}{2}$$

$$C = 1 - B = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{A}{x} + \frac{B}{x-2} + \frac{Cx+D}{x^2+x+4} = \frac{-1}{x} + \frac{1}{2(x-2)} + \frac{\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}}{x^2+x+4} = -\frac{1}{x} + \frac{1}{2(x-2)} + \frac{x-1}{2(x^2+x+4)}$$

Проверка:

$$-\frac{1}{x} + \frac{1}{2(x-2)} + \frac{x-1}{2(x^2+x+4)} = \frac{-2(x-2)(x^2+x+4) + x(x^2+x+4) + (x-1)x(x-2)}{2x(x-2)(x^2+x+4)} =$$

$$= \frac{-2(x^3-x^2+2x-8) + x^3+x^2+4x + (x-1)(x^2-2x)}{2x(x-2)(x^2+x+4)} =$$

$$= \frac{-2x^3+2x^2-4x+16+x^3+x^2+4x+x^3-2x^2-x^2+2x}{2x(x-2)(x^2+x+4)} = \frac{2x+16}{2x(x-2)(x^2+x+4)} =$$

$$= \frac{x+8}{x(x-2)(x^2+x+4)} = \frac{x+8}{x^4-x^3+2x^2-8x}$$

<u>Задача 2:</u> Разложете рационалната дроб на сума от елементарни дроби:

$$\frac{3x-10}{x^3-x^2-8x+12}.$$

Решение:

За да разложим знаменателя ще използваме схемата на Хорнер. Възможни рационални корени са $\pm 1;\ \pm 2;\ \pm 3;\ \pm 4;\ \pm 6;\ \pm 12.$

	1	-1	-8	12
1	$1\downarrow$	$1.1+(-1)=0$	$1.0+(-8)=-8$	$1.(-8)+12=4\neq 0$
−1	1	$-1.1+(-1)=-2$	$-1.(-2)+(-8)=-6$	$-1.(-6)+12=18\neq 0$
2	1	$2.1+(-1)=1$	$2.1+(-8)=-6$	$2.(-6)+12=0$

$\Rightarrow$ 2 е корен на уравнението $\Rightarrow$ можем да разложим $x^3-x^2-8x+12$ като

$x^3-x^2-8x+12 = (x-2)(x^2+x-6)$

Решаваме квадратното уравнение $x^2+x-6=0$

$$x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1+24}}{2} = \frac{-1 \pm 5}{2} \qquad x_1 = 2 \quad x_2 = -3$$

$$\Rightarrow x^3-x^2-8x+12 = (x-2)(x^2+x-6) = (x-2)(x-2)(x+3) = (x-2)^2(x+3)$$

Тъй като в разлагането на знаменателя имаме повтарящ се множител $(x-2) \Rightarrow$ него отчитаме като множител от втора степен, т.е. – в числителя, който ще търсим ще имаме полином от първа степен, а не от нулева:

$$\frac{3x-10}{x^3-x^2-8x+12} = \frac{Ax+B}{(x-2)^2} + \frac{C}{x+3}$$

$$\frac{Ax+B}{(x-2)^2} + \frac{C}{x+3} = \frac{(Ax+B)(x+3)+C(x-2)^2}{(x-2)^2(x+3)} = \frac{Ax^2+3Ax+Bx+3B+C(x^2-4x+4)}{(x-2)^2(x+3)} =$$

$$= \frac{Ax^2+3Ax+Bx+3B+Cx^2-4Cx+4C}{(x-2)^2(x+3)} = \frac{(A+C)x^2+(3A+B-4C)x+3B+4C}{(x-2)^2(x+3)}$$

$$\Rightarrow 3x-10 = (A+C)x^2+(3A+B-4C)x+3B+4C$$

$$\Rightarrow \left|\begin{array}{l} A+C=0 \\ 3A+B-4C=3 \\ 3B+4C=-10 \end{array}\right.$$

От първото уравнение изразяваме $A=-C$.

От третото уравнение изразяваме $B = \frac{-10-4C}{3}$.

Заместваме във второто уравнение:

$$3(-C)+\frac{-10-4C}{3}-4C=3 \qquad -21C-10-4C=9 \qquad -25C=19 \qquad C=-\frac{19}{25}$$

$$A=\frac{19}{25} \quad B=\frac{-10+4.\frac{19}{25}}{3}=-\frac{58}{25}$$

$$\Rightarrow \frac{3x-10}{x^3-x^2-8x+12} = \frac{1}{25}\left(\frac{19x-58}{(x-2)^2}+\frac{-19}{x+3}\right)$$

<u>Задача 3:</u> Разложете рационалната дроб на сума от елементарни дроби:

а) $\frac{x^3-2x^2-13x}{x^2+4x+3}$ б) $\frac{x^5-6x^3+9x-16}{x^3-3x+2}$

Решение:

а) Степента на полинома в числителя е по-голяма от степента на полинома в знаменателя $\Rightarrow$ първо трябва да разделим двата полинома:

$$-\; x^3-2x^2-13x \;:\; x^2+4x+3 = x-6$$

$$\begin{array}{l} \underline{x^3 + 4x^2 + 3x} \\ \quad -6x^2 - 16x \\ - \\ \quad \underline{-6x^2 - 24x - 18} \\ \qquad\qquad 8x + 18 \end{array}$$

$$\frac{x^3 - 2x^2 - 13x}{x^2 + 4x + 3} = x - 6 + \frac{8x + 18}{x^2 + 4x + 3}$$

Разлагаме знаменателя, решавайки уравнението $x^2 + 4x + 3 = 0$

$$x_{1,2} = \frac{-4 \pm \sqrt{16 - 12}}{2} = \frac{-4 \pm 2}{2} \qquad x_1 = -1 \qquad x_2 = -3$$

$$\Rightarrow x^2 + 4x + 3 = (x + 1)(x + 3)$$

$$\frac{8x + 18}{x^2 + 4x + 3} = \frac{8x + 18}{(x + 1)(x + 3)} = \frac{A}{x + 1} + \frac{B}{x + 3} = \frac{Ax + 3A + Bx + B}{(x + 1)(x + 3)} = \frac{(A + B)x + 3A + B}{(x + 1)(x + 3)}$$

$$\Rightarrow 8x + 18 = (A + B)x + 3A + B$$

$$\Rightarrow \left| \begin{array}{l} A + B = 8 \\ 3A + B = 18 \end{array} \right. \quad \Rightarrow \left| \begin{array}{l} A = 8 - B \\ 3A + B = 18 \end{array} \right. \quad \Rightarrow\ 3(8 - B) + B = 18 \quad -2B = -6 \qquad B = 3$$

$$\Rightarrow\ A = 8 - 3 = 5$$

$$\Rightarrow \frac{x^3 - 2x^2 - 13x}{x^2 + 4x + 3} = x - 6 + \frac{8x + 18}{x^2 + 4x + 3} = x - 6 + \frac{5}{x + 1} + \frac{3}{x + 3}$$

б) $\dfrac{x^5 - 6x^3 + 9x - 16}{x^3 - 3x + 2}$

Степента на полинома в числителя е по-голяма от степента на полинома в знаменателя $\Rightarrow$ първо трябва да разделим двата полинома:

$$\begin{array}{l} -\ x^5 - 6x^3 + 9x - 16 :\ x^3 - 3x + 2 = x^2 - 3 \\ \quad \underline{x^5 - 3x^3 + 2x^2} \\ \qquad -3x^3 - 2x^2 + 9x - 16 \\ \quad - \\ \qquad \underline{-3x^3 + 0x^2 + 9x - 6} \\ \qquad\qquad -2x^2 + 0x - 10 \end{array}$$

$$\Rightarrow\ \frac{x^5 - 6x^3 + 9x - 16}{x^3 - 3x + 2} = x^2 - 3 + \frac{-2x^2 - 10}{x^3 - 3x + 2}$$

Трябва да разложим $x^3 - 3x + 2$. Възможните рационални корени са ± 1 и ± 2.

	1	0	-3	2
1	1	$1.1+0=1$	$1.1+(-3)=-2$	$1.(-2)+2=0$

$$\Rightarrow\ x^3-3x+2=(x-1)(x^2+x-2)$$

$$x^2+x-2=0 \qquad x_{1,2}=\frac{-1\pm\sqrt{1+8}}{2}=\frac{-1\pm 3}{2} \quad x_1=-2 \qquad x_2=1$$

$$\Rightarrow\ x^3-3x+2=(x-1)(x^2+x-2)=(x-1)(x-1)(x+2)=(x-1)^2(x+2)$$

$$\Rightarrow \frac{-2x^2-10}{x^3-3x+2}=\frac{Ax+B}{(x-1)^2}+\frac{C}{x+2}$$

$$\frac{Ax+B}{(x-1)^2}+\frac{C}{x+2}=\frac{(Ax+B)(x+2)+C(x^2-2x+1)}{(x-1)^2(x+2)}=$$

$$=\frac{(A+C)x^2+(2A+B-2C)x+2B+C}{(x-1)^2(x+2)}$$

$$\Rightarrow -2x^2-10=(A+C)x^2+(2A+B-2C)x+2B+C$$

$$\Rightarrow \left|\begin{array}{c} A+C=-2 \\ 2A+B-2C=0 \\ 2B+C=-10 \end{array}\right. \quad \Rightarrow \left|\begin{array}{c} A=-2-C \\ 2A+B-2C=0 \\ B=\dfrac{-10-C}{2} \end{array}\right. \quad \Rightarrow 2(-2-C)+\frac{-10-C}{2}-2C=0$$

$$-4-2C-5-\frac{C}{2}-2C=0 \qquad -9-\frac{9C}{2}=0 \quad C=-2$$

$$\Rightarrow A=-2-(-2)=0 \quad B=\frac{-10+2}{2}=-4$$

$$\frac{x^5-6x^3+9x-16}{x^3-3x+2}=x^2-3+\frac{-2x^2-10}{x^3-3x+2}=x^2-3+\frac{-4}{(x-1)^2}+\frac{-2}{x+2}$$

Задачи за домашна работа:

Задача 1: Разложете рационалната дроб на сума от елементарни дроби:

а) $\dfrac{5x-3}{(x+2)(x-2)}$ б) $\dfrac{-5}{x^2-5x+6}$ в) $\dfrac{x^2-18x-13}{x^3+2x^2-5x-6}$ г) $\dfrac{-8}{x^3-x^2-5x-3}$

Задача 2: Разложете рационалната дроб на сума от елементарни дроби:

а) $\dfrac{x^4-2x^3-19x^2+38x+34}{x^3-6x^2+5x+12}$ б) $\dfrac{x^5-8x^4+16x^3-x^2+8x+59}{x^3-7x^2+8x+16}$