## 2 Комплексни числа и полиноми

### 1. Числени множества (преговор)

**• естествени (натурални) числа**
$N = \{1, 2, 3, \ldots, n, \ldots\}$
събиране, умножение

**• цели числа**
$Z = \{0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots, \pm n, \ldots\}$
събиране, умножение, изваждане

**• рационални числа**
$Q = \{r = \dfrac{p}{q} : p \in Z, q \in N\}$
събиране, умножение, изваждане, деление

$r \in Q \Leftrightarrow r$ е крайна десетична дроб или безкрайна периодична дроб.

Примери:
$\dfrac{3}{4} = 0,75, \quad \dfrac{2}{3} = 0,666\cdots = 0,(6),$
$0,125 = \dfrac{125}{1000} = \dfrac{1}{8},$

$0,(23) = 0,232323\ldots$
$= \dfrac{23}{100} + \dfrac{23}{10000} + \dfrac{23}{1000000} + \cdots = \dfrac{\frac{23}{100}}{1 - \frac{1}{100}} = \dfrac{23}{99}.$

Геометрично тълкуване: Всички отсечки, които са съизмерими с единичната отсечка, имат дължина – рационално число. Дължините на отсечките, които са несъизмерими с единичната отсечка, не се изразяват с рационални числа.

Пример: $r = \sqrt{2}$ не е рационално число.

Така се стига до въвеждането на ирационалните числа, които се изразяват с безкрайни непериодични дроби.

Пример: $\pi = 3,141592\ldots$

**• реални числа**
$R = \{\text{рационални}\} \cup \{\text{ирационални}\}$

$x \in R \leftrightarrow M(x)$

Пример: Уравнението

$$x^2 + 1 = 0$$

няма решение $x \in R$. Налага се въвеждането на ново числено множество така, че всички квадратни уравнения да имат решение в това множество.

### 2. Комплексни числа. Модул и аргумент

**• имагинерна единица** $i = \sqrt{-1} \quad (i^2 = -1)$
**• комплексно число** се нарича израз от вида

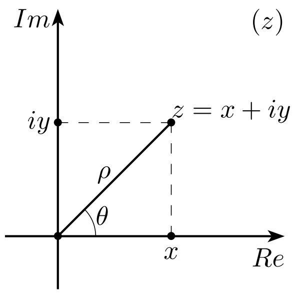
$$z = x + iy = x + yi,$$

където $x, y$ са реални числа.

$x = Re\, z$ – **реална част** на $z$;
$y = Im\, z$ – **имагинерна част** на $z$.

Пример: $z = 3 - 2i, \quad Re\, z = 3, \quad Im\, z = -2.$

Множеството от комплексни числа се означава с $C$.




$z \leftrightarrow (x, y) \leftrightarrow$ точка $M(x, y)$ от равнината.
$(z)$ – **комплексна равнина**

Точка в равнината може да се представи и с полярните си координати $\rho, \theta$:

$\rho = |z|$ – **модул** на $z$;
$\theta = \arg z$ – **аргумент** на $z$.

$$x = \rho\cos\theta, \quad y = \rho\sin\theta,$$
$$z = \rho(\cos\theta + i\sin\theta).$$

(**тригонометрична форма на комплексно число**)

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$\rho$ се определя еднозначно за всяко $z$.

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{y}{x}$$

$z = 0$ няма аргумент. $\theta$ се определя нееднозначно за всяко $z \neq 0$:

$$\theta = \theta_0 + 2k\pi, \quad k \in Z,$$

където $\theta_0 \in (-\pi, \pi]$ и се нарича **главна стойност на аргумента**.

Пример: $\theta = \dfrac{7\pi}{2} \quad (> \pi)$ не!
$\dfrac{7\pi}{2} - 2\pi = \dfrac{3\pi}{2} > \pi$ не!
$\dfrac{3\pi}{2} - 2\pi = -\dfrac{\pi}{2} \in (-\pi, \pi] \Rightarrow \theta_0 = -\dfrac{\pi}{2}$.

$\arg(4) = 0$,
$\arg(-2) = \pi$,
$\arg(3i) = \dfrac{\pi}{2}$,
$\arg(-2i) = -\dfrac{\pi}{2}$.

## 3. Действия с комплексни числа

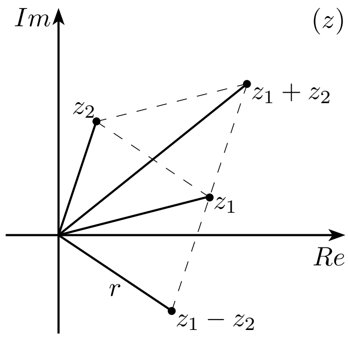
$z = x + iy \qquad z = \rho(\cos\theta + i\sin\theta)$;
$z_1 = x_1 + iy_1 \quad z_1 = \rho_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_2)$;
$z_2 = x_1 + iy_2 \quad z_2 = \rho_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$.

• **събиране и изваждане**

$$z_1 \pm z_2 = (x_1 \pm x_2) + i(y_1 \pm y_2). \qquad (1)$$

Пример:
$5 - 2i - (2 - 4i) = (5 - 2) + (-2 + 4)i = 3 + 2i$.

Геометрично тълкуване:




$r = |z_1 - z_2|$ е разстоянието между $z_1$ и $z_2$.

• **умножение**
$(3 - i)(2 - i) = 6 - 3i - 2i + i^2$
$= 6 - 1 + (-3 - 2)i = 5 - 5i$.

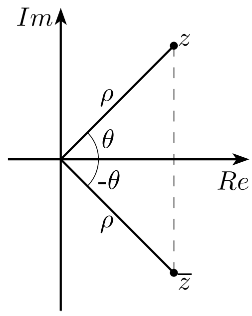
$$z_1 z_2 = \rho_1\rho_2\big[\cos(\theta_1 + \theta_2) + i\sin(\theta_1 + \theta_2)\big]. \quad (2)$$

• **степенуване**

$$z^n = \rho^n(\cos n\theta + i\sin n\theta). \qquad (3)$$

• **деление**

Ако $z = x + iy$, то $\bar{z} = x - iy$ се нарича **спрегнато** на $z$.
Геометрично тълкуване:




Имаме, че
$|\bar{z}| = |z|, \quad \arg\bar{z} = -\arg z$,
$z\bar{z} = |z|^2 = x^2 + y^2$ – реално число.

Пример:
$\dfrac{3 - i}{2 + i} = \dfrac{(3 - i)(2 - i)}{(2 + i)(2 - i)} = \dfrac{5 - 5i}{4 + 1} = \dfrac{5 - 5i}{5} = 1 - i$.

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{\rho_1}{\rho_2}\big[\cos(\theta_1 - \theta_2) + i\sin(\theta_1 - \theta_2)\big]. \qquad (4)$$

• **коренуване** (**формула на Моа̀вър**)

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{\rho}\Big[\cos\frac{\theta + 2k\pi}{n} + i\sin\frac{\theta + 2k\pi}{n}\Big], \quad (5)$$

където $k = 0, 1, \ldots, n - 1$.

Пример: $\sqrt[3]{-1} = ?$
$|-1| = 1, \quad \arg(-1) = \pi, \; \rho = 1, \; \theta = \pi$

$$-1 = 1(\cos\pi + i\sin\pi)$$

$$\sqrt[3]{-1} = \sqrt[3]{1}[\cos\frac{\pi + 2k\pi}{3} + i\sin\frac{\pi + 2k\pi}{3}]$$

$z_0 = \cos\dfrac{\pi}{3} + i\sin\dfrac{\pi}{3} = \dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$,
$z_1 = \cos\pi + i\sin\pi = -1$,
$z_2 = \cos\dfrac{5\pi}{3} + i\sin\dfrac{5\pi}{3} = \dfrac{1}{2} - i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

Пример: $z^4 = 1$

$$z = \sqrt[4]{1} = \sqrt[4]{1}[\cos\frac{0 + 2k\pi}{4} + i\sin\frac{0 + 2k\pi}{4}],$$

$z_0 = \cos 0 + i\sin 0 = 1$,
$z_1 = \cos\dfrac{\pi}{2} + i\sin\dfrac{\pi}{2} = i$,
$z_2 = \cos\pi + i\sin\pi = -1$,
$z_3 = \cos\dfrac{3\pi}{2} + i\sin\dfrac{3\pi}{2} = -i$.

Пример: $z^2 + 4 = 0, \quad z = \sqrt{-4}, \quad z_{1,2} = \pm 2i.$

Пример: $z^2 + 2z + 2 = 0,$
$z_{1,2} = -1 \pm \sqrt{1-2} = -1 \pm i.$

Задачи: $z^2 + 4z + 13 = 0, \;\; z^4 + 6z^2 - 27 = 0.$

## 4. Полиноми: определение, събиране, изваждане и умножение на полиноми

Нека $n \geq 0$ е цяло число.

**Определение 1.** *Израз от вида*

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 \quad (a_n \neq 0), \quad (6)$$

*където $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_1, a_0$ са дадени числа, се нарича* ***полином от степен*** *$n$* ***относно*** *$x$.*

Числата $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_1, a_0$ се наричат **коефициенти** на полинома; $a_n$ се нарича **старши коефициент** на полинома; $a_0$ – **свободен член** на полинома; $n$ – **степен** на полинома;

Коефициентите $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_1, a_0$ и променливата $x$ могат да бъдат както реални, така и комплексни числа.

Ако поне едно от тези числа е комплексно, то полиномът се нарича **комплексен**. Ако всички тези числа са реални, то полиномът се нарича **реален**.

Полиномът (6) се записва още така

$$P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0. \quad (7)$$

При фиксирано $x$ се получава **стойността на полинома** $P_n(x)$.

Пример: Ако $P(x) = x^3 - 5x + 6$, то

$$P(2) = 2^3 - 5 \cdot 2 + 6 = 8 - 10 + 6 = 4.$$

**• събиране и изваждане**

$$(x^2+2x-1)+(x^4-3x^2+7x) = x^4-2x^2+9x-1,$$
$$(x-1) - (x^3 + 2x - 4) = x - 1 - x^3 - 2x + 4$$
$$= -x^3 - x + 3.$$

**• умножение**

$$(x^3 - 2x^2 + x)(x^4 - 3x^2 + 4)$$
$$= x^7 - 3x^5 + 4x^3 - 2x^6 + 6x^4 - 8x^2 + x^5 - 3x^3 + 4x$$
$$= x^7 - 2x^6 - 2x^5 + 6x^4 + x^3 - 8x^2 + 4x.$$

## 5. Основни теореми

**Определение 2.** *Полиномът $P_n(x)$ се нарича* ***нулев****, ако $P_n(x) = 0$ при всяко $x \in R$.*

**Теорема 1.** *Полиномът $P_n(x)$ е нулев*
$\Leftrightarrow a_0 = a_1 = \cdots = a_n = 0.$

**Определение 3.** *Казваме, че два полинома са* ***равни****, ако получават равни стойности при всяко $x \in R$.*

**Теорема 2.** *Два полинома са равни $\Leftrightarrow$ имат една и съща степен и коефициентите пред еднаквите степени са равни.*

**Определение 4.** *Казваме, че $x = a$ е* ***нула на полинома*** *$P_n(x)$, ако*

$$P_n(a) = 0. \quad (8)$$

В този случай се казва още, че $x = a$ е **корен на уравнението** $P_n(x) = 0$.

**Теорема 3** (Основна теорема на алгебрата). *Всеки полином от степен $n \geq 1$ с произволни коефициенти (реални или комплексни) има поне една нула (реална или комплексна).*

**Теорема 4.** *Всеки полином*

$$P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

*от степен $n \geq 1$ се разлага на множители във вида*

$$P_n(x) = a_n (x - x_1)^{k_1} (x - x_2)^{k_2} \cdots (x - x_s)^{k_s}, \quad (9)$$

*където $x_1, x_2, \ldots, x_s$ са различните нули на $P_n(x)$; $k_1, k_2, \ldots, k_s$ са естествени числа и*

$$k_1 + k_2 + \cdots + k_s = n.$$

Числото $k_j$ се нарича **кратност** на нулата (корена) $x_j$.

Пример: $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2).$

**Теорема 5.** *Ако стойностите на два полинома от степен $n$ съвпадат при $n+1$ различни стойности на $x$, то тези полиноми са равни.*

**Теорема 6.** *Ако $\alpha + i\beta$ е нула на полином с реални коефициенти, то $\alpha - i\beta$ също е нула на този полином.*

**Следствие 1.** *Ако в разложението (9) на полином с реални коефициенти има множител $(x - \alpha - i\beta)^s$, то той ще има и множител $(x - \alpha + i\beta)^s$.*

Освен това, полиномът

$$(x-\alpha-i\beta)(x-\alpha+i\beta) = (x-\alpha)^2 - i^2\beta^2$$
$$= (x-\alpha)^2 + \beta^2 = x^2 + px + q$$

няма реални нули ($D = p^2 - 4q < 0$).

Тогава разложението (9) на полином с реални коефициенти има вида

$$P_n(x) = a_n(x-a)^{k_1} \cdots (x^2+px+q)^{s_1} \cdots , \quad (10)$$

където $x^2 + px + q$ няма реални нули.

## 6. Деление на полиноми

**Теорема 7.** *За всеки два полинома $P_n(x)$ и $f_m(x)$ ($m \geq n$) съществува точно една двойка полиноми $q_{m-n}(x)$ и $r_s(x)$ ($0 \leq s \leq n-1$) такива, че*

$$f_m(x) = P_n(x) q_{m-n}(x) + r_s(x). \quad (11)$$

Равенство (11) може да се запише още във вида

$$\frac{f_m(x)}{P_n(x)} = q_{m-n}(x) + \frac{r_s(x)}{P_n(x)}. \quad (12)$$

Казваме, че при това деление полиномът
$f_m(x)$ е **делимо**;
$P_n(x)$ – **делител**;
$q_{m-n}(x)$ – **частно**;
$r_s(x)$ – **остатък**.

Ако $r_s(x) \equiv 0$, то делението е без остатък и се нарича **точно**.

Ако делителят е полином от вида $x - a$, то

$$f_m(x) = (x-a) q_{m-1}(x) + r, \quad (13)$$

където $r = f_m(a)$.

Делението на полиноми се извършва по два метода:

• **метод на неопределените коефициенти**;

• **метод на непосредствено деление**.

Пример: Да се раздели полиномът
$f_4(x) = x^4 + 3x^3 + 4x^2 - 3x + 1$
на полинома $P_2(x) = x^2 + x - 2$.
Процесът на непосредствено деление може да се представи в следната схема:

$$\begin{array}{rl|l}
- & x^4 + 3x^3 + 4x^2 - 3x + 1 & x^2 + x - 2 \\ \cline{3-3}
 & x^4 + \phantom{3}x^3 - 2x^2 & x^2 + 2x + 4 \\ \cline{2-2}
- & 2x^3 + 6x^2 - 3x + 1 & \\
 & 2x^3 + 2x^2 - 4x & \\ \cline{2-2}
- & 4x^2 + \phantom{4}x + 1 & \\
 & 4x^2 + 4x - 8 & \\ \cline{2-2}
 & -3x + 9 &
\end{array}$$

Процесът приключва, когато след поредното изваждане получената разлика е полином от степен, която е по-малка от степента на делителя. В случая това стана, когато получихме полинома $-3x + 9$, който е от степен $s = 1 < 2$ – степента на делителя. Частното е полиномът $q_2(x) = x^2 + 2x + 4$, а остатъкът е $r_1(x) = -3x + 9$. Съгласно формула (12) може да запишем

$$\frac{x^4 + 3x^3 + 4x^2 - 3x + 1}{x^2 + x - 2} = x^2 + 2x + 4 + \frac{-3x + 9}{x^2 + x - 2} \cdot$$

## 7. Правило на Хо̀рнер

От (13) следва, че когато полином $f_m(x)$ се дели на полином от вида $x - a$, то

$$\frac{f_m(x)}{x-a} = q_{m-1}(x) + \frac{r}{x-a} \cdot \quad (14)$$

Намирането на частното $q_{m-1}(x)$ и остатъка $r$ става лесно, като се приложи **правилото на Хорнер**, както е показано в следния пример.

Пример: Да се раздели полиномът
$f_4(x) = x^4 - x^2 + 2x - 3$ на $x - 2$.
Имаме, че $a = 2$. Съставяме таблицата

| | 1 | 0 | −1 | 2 | −3 |
|---|---|---|---|---|---|
| $a = 2$ | | | | | |

в първия ред на която са записани коефициентите на делимото $f_4(x)$. Ако липсва някоя степен, то на съответното място в таблицата записваме 0. Следва попълването на втория ред на таблицата, като прилагаме правилото на Хорнер, както е показано по-долу:

| | 1 | 0 | −1 | 2 | −3 |
|---|---|---|---|---|---|
| $a = 2$ | 1 | $0 + 2 \cdot 1$ <br> $= 2$ | $-1 + 2 \cdot 2$ <br> $= 3$ | $2 + 2 \cdot 3$ <br> $= 8$ | $-3 + 2 \cdot 8$ <br> $= 13$ |

Получава се таблицата

| | 1 | 0 | −1 | 2 | −3 |
|---|---|---|---|---|---|
| $a = 2$ | 1 | 2 | 3 | 8 | $13 = r$ |

Последното число от втория ред показва остатъка $r = 13$, а подчертаните числа от втория ред съвпадат с коефициентите на частното $q_3(x) = x^3 + 2x^2 + 3x + 8$. Тогава

$$\frac{x^4 - x^2 + 2x - 3}{x - 2} = x^3 + 2x^2 + 3x + 8 + \frac{13}{x - 2}\,.$$

## 8. Приложения на правилото на Хорнер

• Пресмятане на стойността на полином при $x = a$.
Ако разделим по Хорнер полинома $f_m(x)$ на $x - a$, то в последната клетка от втория ред на таблицата се получава остатъкът $f_m(a) = r$.
Пример: $f(x) = 2x^4 - 7x^3 - 15x + 8 \quad f(5) = ?$

| | 2 | −7 | 0 | −15 | 8 |
|---|---|---|---|---|---|
| 5 | 2 | 3 | 15 | 60 | $308 = r$ |

Следователно $f(5) = 308$.
Ще отбележим, че пресмятането с компютър на стойностите на полином от степен $n$ се извършва по правилото на Хорнер, понеже тогава се извършват само $n$ умножения, докато по стандартния начин на пресмятане умноженията са от порядъка на $\dfrac{n^2}{2}\,$.
• Разлагане на полином по степените на $x = a$.
Даден е полиномът

$$P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0.$$

Да се намери представянето му във вида

$$P_n(x) = A_n(x - a)^n + \cdots + A_1(x - a) + A_0.$$

Коефициентите $A_n, \ldots, A_1, A_0$ на новия полином се получават като се приложи $n + 1$ пъти правилото на Хорнер, както е показано в следния пример.
Пример: Полиномът $x^4 + 2x^3 - 3x^2 - 4x + 1$ да се разложи по степените на $x + 1$.

Прилагаме 5 пъти правилото на Хорнер

| | 1 | 2 | −3 | −4 | 1 |
|---|---|---|---|---|---|
| −1 | 1 | 1 | −4 | 0 | $1 = A_0$ |
| −1 | 1 | 0 | −4 | $4 = A_1$ | |
| −1 | 1 | −1 | $-3 = A_2$ | | |
| −1 | 1 | $-2 = A_3$ | | | |
| −1 | $1 = A_4$ | | | | |

и получаваме

$$x^4 + 2x^3 - 3x^2 - 4x + 1 \\ = (x+1)^4 - 2(x+1)^3 - 3(x+1)^2 + 4(x+1) + 1.$$

• Проверка дали $x = a$ е нула на полинома и намиране на нейната кратност.

Пример: Да се провери дали $x = -1$ е нула на полинома $P(x) = x^6 - 6x^4 - 4x^3 + 9x^2 + 12x + 4$?

| | 1 | 0 | −6 | −4 | 9 | 12 | 4 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| −1 | 1 | −1 | −5 | 1 | 8 | 4 | 0 |
| −1 | 1 | −2 | −3 | 4 | 4 | 0 | |
| −1 | 1 | −3 | 0 | 4 | 0 | | |
| −1 | 1 | −4 | 4 | 0 | | | |
| −1 | 1 | −5 | 9 | | | | |

Забелязва се, че при първите четири деления на $P(x)$ с $x + 1$ остатъкът е равен на 0, а при петото деление остатъкът е $9 \neq 0$. Следователно $x = -1$ е 4 – кратна нула на този полином. Освен това, коефициентите на частното от делението на $P(x)$ с $(x + 1)^4$ се получават в петия ред на таблицата: $1, -4,\ 4$. Затова

$$P(x) = (x + 1)^4(x^2 - 4x + 4) = (x + 1)^4(x - 2)^2.$$

Допълнително заключаваме, че $x = 2$ е двукратна нула на $P(x)$.

## 9. Разлагане на дробна рационална функция на сума на елементарни дроби

Нека е дадена рационална дроб, т.е. дроб от вида

$$\frac{Q_m(x)}{P_n(x)} = \frac{b_m x^m + \cdots + b_1 x + b_0}{a_n x^n + \cdots + a_1 + a_0},$$

където $m \geq 0,\ n \geq 1,\ a_n \neq 0,\ b_m \neq 0$.

Ако $m < n$, дробта се нарича **правилна**.

Ако $m \geq n$, дробта се нарича **неправилна**.

**Теорема 8.** *Нека полиномите $P_n(x)$ и $Q_m(x)$ са с реални коефициенти и $m < n$. Нека $P_n(x)$ се разлага на множители във вида*

$$P_n(x) = a_n(x - a)^k \cdots (x^2 + px + q)^s \cdots .$$

*Тогава*

$$\frac{Q_m(x)}{P_n(x)} = \frac{A_1}{x - a} + \cdots + \frac{A_k}{(x - a)^k} + \cdots \\ + \frac{M_1 x + N_1}{x^2 + px + q} + \cdots + \frac{M_s x + N_s}{(x^2 + px + q)^s} + \cdots \tag{15}$$

Дробите, участващи в разложение (15), се наричат **елементарни**.

Намирането на константите $A_1, \dots, A_k, \dots, M_1, \dots, M_s, N_1, \dots, N_s, \dots$ става по метода на неопределените коефициенти, който се прилага както в следните примери.

Пример: Да се разложи на сума от елементарни дроби рационалната дроб

$$\frac{x^2+2}{(x+1)(x-2)^2}\,.$$

Дробта е правилна и се разлага във вида

$$\frac{x^2+2}{(x+1)(x-2)^2} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-2} + \frac{C}{(x-2)^2}\,.$$

Привеждаме под общ знаменател и приравняваме числителите от двете страни на полученото равенство:

$$A(x-2)^2 + B(x+1)(x-2) + C(x+1) = x^2+2,$$

$$A(x^2-4x+4) + B(x^2-x-2) + C(x+1) = x^2+2,$$

Разкриваме скобите и правим приведение:

$$(A+B)x^2 + (-4A-B+C)x + 4A - 2B + C = x^2+2.$$

Сравняваме коефициентите пред еднаквите степени на $x$ в двата полинома и получаваме системата:

$$\begin{array}{r|l} x^2: & A + B = 1 \\ x: & -4A - B + C = 0 \\ 1: & 4A - 2B + C = 2 \end{array}$$

Решаваме тази система и намираме

$$A = \frac{1}{3},\ B = \frac{2}{3},\ C = 2.$$

Следователно

$$\frac{x^2+2}{(x+1)(x-2)^2} = \frac{1}{3(x+1)} + \frac{2}{3(x-2)} + \frac{2}{(x-2)^2}\,.$$

Пример: Да се разложи на сума от елементарни дроби рационалната дроб

$$\frac{x^6+x^5-x^2}{x^4-1}\,.$$

Понеже дробта е неправилна, първо отделяме цялата част с непосредствено деление:

$$\begin{array}{rl|l} - & x^6 + x^5 - x^2 & x^4 - 1 \\ \cline{3-3} & x^6 - x^2 & x^2 + x \\ \cline{2-2} - & x^5 & \\ & x^5 - x & \\ \cline{2-2} & x & \end{array}$$

Тогава

$$\frac{x^6+x^5-x^2}{x^4-1} = x^2 + x + \frac{x}{x^4-1}\,.$$

Понеже
$x^4-1 = (x^2-1)(x^2+1) = (x-1)(x+1)(x^2+1)$,
то правилната част се разлага във вида

$$\frac{x}{x^4-1} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1} + \frac{Mx+N}{x^2+1}\,.$$

След извършване на събирането и приравняването на числителите получаваме

$$A(x+1)(x^2+1) + B(x-1)(x^2+1)$$
$$+(Mx+N)(x-1)(x+1) = x,$$
$$A(x^3+x^2+x+1) + B(x^3-x^2+x-1)$$
$$+(Mx+N)(x^2-1) = x,$$
$$Ax^3 + Ax^2 + Ax + A + Bx^3 - Bx^2 + Bx - B$$
$$+Mx^3 + Nx^2 - Mx - N = x.$$

Сравняваме коефициентите пред еднаквите степени на $x$ в двата полинома и получаваме системата:

$$\begin{array}{r|l} x^3: & A + B + M = 0 \\ x^2: & A - B + N = 0 \\ x: & A + B - M = 1 \\ 1: & A - B - N = 0 \end{array}$$

Решаваме тази система и намираме

$$A = \frac{1}{4},\ B = \frac{1}{4},\ M = -\frac{1}{2},\ N = 0.$$

Следователно

$$\frac{x}{x^4-1} = \frac{1}{4(x-1)} + \frac{1}{4(x+1)} - \frac{x}{2(x^2+1)}\,.$$

и

$$\frac{x^6+x^5-x^2}{x^4-1} = x^2 + x + \frac{1}{4(x-1)} + \frac{1}{4(x+1)} - \frac{x}{2(x^2+1)}\,.$$