Лекция 3

§3. Матрична алгебра. Формули на Крамер

1. Матрична алгебра. Матриците могат да се събират и умножават по определение правила. Всяка матрица може да се ***умножава с число поелементно***, при което се получава матрица от същия тип. Ако

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{21} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}, \text{ то } \lambda A=\begin{pmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} & \cdots & \lambda a_{1n} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{21} & \cdots & \lambda a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda a_{m1} & \lambda a_{m2} & \cdots & \lambda a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Например, ако

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \text{ то } 2A=\begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 \\ -2 & 6 & 2 \end{pmatrix}.$$

Еднотипните матрици могат да се ***събират поелементно***, при което отново се получава матрица от същия тип. Ако

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{21} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \text{ и } B=\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{21} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{mn} \end{pmatrix},$$

то

$$A\pm B=\begin{pmatrix} a_{11}\pm b_{11} & a_{12}\pm b_{12} & \cdots & a_{1n}\pm b_{1n} \\ a_{21}\pm b_{21} & a_{22}\pm b_{22} & \cdots & a_{2n}\pm b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}\pm b_{m1} & a_{m2}\pm b_{m2} & \cdots & a_{mn}\pm b_{mn} \end{pmatrix}.$$

Например, ако

$$A=\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} \text{ и } B=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \text{ то } A+B=\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 4 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}.$$

Матрицата, от даден тип $(m\times n)$, която се състои само от нули се нарича ***нулева матрица*** и има същото значение като числото нула при операцията събиране.

Въведените по-горе операции в пространството от еднотипните матрици $K_{m\times n}$ (над полето K) го превръщат в ***линейно пространство***, при наличието на следните елементарни свойства.

1) $(A+B)+C=A+(B+C)$ (асоциативност на събирането).

2) $A+B=B+A$ (комутативност на събирането).

3) $A+\mathbf{0}=\mathbf{0}+A=A$.

4) $A+(-A)=(-A)+A=\mathbf{0}$, където $-A=(-1)A$.

5) $(\lambda+\mu)A=\lambda A+\mu A$.

6) $\lambda(A+B)=\lambda A+\lambda B$.

7) $\lambda(\mu A)=(\lambda\mu)A$.

Две матрици A от тип $(m\times s)$ и B от тип $(s\times n)$ могат да се умножават по правилото "***ред по стълб***", при което се получава матрица C от тип $(m\times n)$. Елементите на матрицата произведение $C=AB$ се дават по формулата

$$(3.1)\qquad c_{ij}=\sum_{k=1}^{s}a_{ik}b_{kj}=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+\dots+a_{is}b_{sj}.$$

За да получим елемента c_{ij} трябва да вземем елементите от i-тия ред на левия множител A, да ги умножим със съответните елементи от j-тия стълб на десния множител B и да съберем получените произведения, което оправдава и наименованието на тази операция като умножение "ред по стълб". Например, ако

$$A=\begin{pmatrix}1 & 0 & -1\\ 2 & -1 & 1\end{pmatrix} \text{ и } B=\begin{pmatrix}1 & 0 & -1\\ 2 & 1 & 1\\ -1 & 3 & 2\end{pmatrix}, \text{ то } AB=\begin{pmatrix}2 & -3 & -3\\ -1 & 2 & -1\end{pmatrix}.$$

За да бъде възможно умножението трябва да бъде налице следното ***условие за съгласуваност***. Броят на стълбовете на левия множител трябва да бъде равен на броя на редовете на десния множител. В противен случай умножението не може да се извърши. В последния пример произведението BA не съществува понеже броят на стълбовете на B е различен от броя на редовете на A.

Да разгледаме друг пример. Нека A е матрица от тип (1×3), а B е матрица от тип (3×1), определени както следва

$$A=\begin{pmatrix}1 & 3 & -1\end{pmatrix} \text{ и } B=\begin{pmatrix}2\\ -2\\ 1\end{pmatrix}.$$

Тогава произведението AB е матрица от тип (1×1), т.е. число, $AB=-5$, докато произведението BA е матрица от тип (3×3),

$$BA=\begin{pmatrix}2 & 6 & -2\\ -2 & -6 & 2\\ 1 & 3 & -1\end{pmatrix}.$$

Този пример показва, че в общия случай двете произведения AB и BA (ако съществуват) са различни. Ако и двата множителя A и B са квадратни матрици от ред n, то можем да образуваме и двете произведения AB и BA, понеже в този случай не възниква проблем със съгласуваността на множителите. И тук в общия случай $AB\neq BA$, т.е. умножението на матрици не е комутативно, което обаче не изключва възможността в отделни случаи да има равенство.

Ако A и B са квадратни матрици от ред n и $AB=BA$, то се казва, че A и B са комутативни.

Непосредствено се проверява, че ако A е матрица от тип $(m\times n)$, то е изпълнено

$$E_mA=AE_n=A,$$

където E_n е единичната матрица от ред n, а E_m е единичната матрица от ред m. В частност, ако A е квадратна матрица от ред n, то $E_nA=AE_n=A$. По този начин в пространството на квадратните матрици $M_n(K)$, единичната матрица има същата роля както числото 1 при умножението на числа.

Твърдение 3.1. ***Умножението на матрици е асоциативно***. Ако A е $(m\times p)$ матрица, B е $(p\times q)$ матрица, а C е $(q\times n)$ матрица, то

$$(AB)C=A(BC).$$

Доказателство. Да положим $D'=(AB)C$ и $D''=A(BC)$. Тогава прилагайки последователно формулата (3.1), за елементите на D' и D'' получаваме

$$d'_{ij} = \sum_{\alpha=1}^{p} \sum_{\beta=1}^{q} a_{i\alpha} b_{\alpha\beta} c_{\beta j} = d''_{ij} .$$

Елементите на тройното произведение се получават чрез пълно сумиране по вътрешните индекси, независимо последователността на умножение. ■

Асоциативното свойство на умножението се запазва и при повече множители. Ако A, B, C и D са съгласувани за умножение матрици, то произведението $ABCD$ е едно и също независимо от реда на последователните умножения, например

$(AB)(CD) = (A(BC))D = A(B(CD))$ и т.н.

Тук е важно само да не се сменят местата на множителите, даже когато са изпълнени условия за съгласуваност, например ако всичките матрици са квадратни от един и същ ред.

Следните свойства на умножението са практически очевидни, когато алгебричните операции могат да бъдат извършени.

1) $\lambda(AB) = (\lambda A)B = A(\lambda B)$.

2) $(A+B)C = AC + BC$.

3) $C(A+B) = CA + CB$.

4) $(AB)^T = B^T A^T$.

Последното свойство се обобщава за повече множители. Например ако A, B и C са съгласувани за умножение матрици, то $(ABC)^T = C^T B^T A^T$, т.е. транспонирането на произведение е еквивалентно на произведението от транспонираните матрици но взети в обратен ред.

Едно от най-важните свойства на матричното произведение се съдържа в

Теорема 3.1. Нека A и B са квадратни матрици от ред n. Тогава

(3.2) $\det(AB) = (\det A)(\det B)$.

Доказателство. Да положим $C = AB$ и да разгледаме следните преобразувания, които са обратими и не променят верността на формулата (3.2), която трябва да докажем.

П1) Смяна местата на два реда в матрицата A, което съответства на смяна местата на същите два реда при C.

П2) Умножаване един ред на матрицата A с число и прибавянето му към друг ред на A, което съответства на същото преобразуваните по редове при матрицата C.

П3) Пренареждане стълбовете на матрицата A и пренареждане по същия начин редовете на B, което не променя матрицата C.

За да докажем теоремата ще прилагаме последователно **П1, П2** и **П3** докато формулата (3.2) стане лесна за непосредствено доказване.

Според твърдение 2.6, прилагайки по подходящ начин **П1, П2** и **П3** върху A (което води до съответните промени в B и C) ще стигнем до един от двата случая.

1) Преобразуваната матрица A съдържа нулев ред, следователно $\det A$=0. Тогава редът със същия номер в матрицата C също ще бъде нулев и $\det C = 0$, което доказва формулата (3.2).

2) Преобразуваната матрица A е диагонална (с различни от нула елементи по главния диагонал)

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix} \text{ и } \det A = \lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_n .$$

В този случай редовете на матрицата произведение $C = AB$ се получават от редовете на матрицата B след умножение със съответните по номера диагонални елементи на A. Сега от основните свойства на детерминантите получаваме

$$\det C = \lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_n \det B = (\det A)(\det B),$$

което доказва теоремата и в този случай. ■

2. Обратна матрица. Квадратната матрица A от ред n се нарича ***обратима***, когато съществува квадратна матрица B от ред n, за която

$$AB = BA = E_n,$$

където E_n е единичната матрица от ред n. В този случай матрицата B се нарича ***обратна*** на A и се бележи с A^{-1}.

Обратната матрица, когато съществува, е ***единствена***. Ако B_1 и B_2 са две матрици, за които $AB_1 = B_1 A = AB_2 = B_2 A = E_n$, то след умножение на равенството $AB_1 = E_n$ отляво с B_2 получаваме $B_2 AB_1 = B_2 E_n = B_2$, откъдето отчитайки, че $B_2 A = E_n$, намираме $E_n B_1 = B_2$, следователно $B_1 = B_2$.

Ако матрицата A е обратима, то $AA^{-1} = E_n$ и съгласно теорема 3.1

$$(\det A)(\det A^{-1}) = \det(AA^{-1}) = \det E_n = 1,$$

следователно по необходимост $\det A \neq 0$. По нататък ще се убедим, че това условие е същевременно и достатъчно.

Да разгледаме ***присъединената матрица*** A^*, която се образува от адюнгираните количества на матрицата A по следния начин

$$A^* = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}.$$

Адюнгираните количества на елементите на първия ред на A образуват първия стълб на A^*, адюнгираните количества на елементите на втория ред на A образуват втория стълб на A^* и т.н.

Според теорема 2.1, ако елементите на един ред умножим по техните адюнгирани количества и съберем получените произведения, ще получим стойността на детерминантата, а съгласно свойство 7, ако елементите на един ред умножим по адюнгираните количества на елементите на друг ред и съберем получените произведения, ще получим нула. Сега непосредствено се проверява, че за всяка квадратна матрица е изпълнено

$$AA^* = \begin{pmatrix} \det A & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \det A & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \det A \end{pmatrix} = A^* A. \tag{3.3}$$

Нека $\det A \neq 0$ и да положим

$$B = \frac{1}{\det A} A^*.$$

Тогава отчитайки (3.3) получаваме

$$AB = BA = \frac{1}{\det A} AA^* = \frac{1}{\det A}\begin{pmatrix} \det A & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \det A & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \det A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} = E_n ,$$

което показва, че в този случай матрицата A е обратима с обратна B. По този начин доказахме

Теорема 3.2. Квадратната матрица A от ред n е обратима тогава и само тогава, когато $\det A \neq 0$. В този случай

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} A^* = \begin{pmatrix} \frac{A_{11}}{\det A} & \frac{A_{21}}{\det A} & \cdots & \frac{A_{n1}}{\det A} \\ \frac{A_{12}}{\det A} & \frac{A_{22}}{\det A} & \cdots & \frac{A_{n2}}{\det A} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{A_{1n}}{\det A} & \frac{A_{2n}}{\det A} & \cdots & \frac{A_{nn}}{\det A} \end{pmatrix}. \blacksquare$$

Например на намерим обратната на матрицата

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Тук $\det A = -4 \neq 0$, следователно матрицата е обратима. За да намерим нейната обратна първо пресмятаме адюнгираните количества. Имаме

$$A_{11} = (-1)^{1+1}\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -3, \; A_{12} = (-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = -1, \; A_{13} = (-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = -1,$$

$$A_{21} = (-1)^{2+1}\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -4, \; A_{22} = (-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 0, \; A_{23} = (-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = -4,$$

$$A_{31} = (-1)^{3+1}\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 1, \; A_{32} = (-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -1, \; A_{33} = (-1)^{3+3}\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = -1.$$

Сега по теорема 3.2 получаваме

$$A^{-1} = \frac{1}{-4}\begin{pmatrix} -3 & -4 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \\ -1 & -4 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{4} & 1 & -\frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & 1 & \frac{1}{4} \end{pmatrix}.$$

Обратимостта на една матрица изцяло зависи от стойността на нейната детерминанта. По тази причина, ако детерминантата на една квадратна матрица е равна на нула, то матрицата се нарича ***особена***.

Твърдение 3.2. Нека A и B са обратими квадратни матрици. Тогава тяхното произведение AB също е обратима матрица, при което $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

Доказателство. Матриците A и B са обратими, което означава, че $\det A \neq 0$ и $\det B \neq 0$. Съгласно теорема 3.1, $\det(AB) = (\det A)(\det B) \neq 0$, следователно матрицата AB също е обратима. Да положим $C = B^{-1}A^{-1}$. Тогава

$$(AB)C = (AB)(B^{-1}A^{-1}) = ABB^{-1}A^{-1} = A(BB^{-1})A^{-1} = AEA^{-1} = AA^{-1} = E,$$