следователно $(AB)^{-1} = C = B^{-1}A^{-1}$. ■

Горното твърдение се обобщава и за повече множители. Например, ако A, B и C са обратими матрици, то произведението ABC също е обратима матрица, при което $(ABC)^{-1} = C^{-1}B^{-1}A^{-1}$ и т.н.

Следващото твърдение дава връзка между операциите транспониране и обръщане на матрица.

Твърдение 3.3. Нека A е обратима квадратна матрица. Тогава нейната транспонирана A^T също е обратима матрица, при което $\left(A^T\right)^{-1} = \left(A^{-1}\right)^T$.

Доказателство. Матрицата A е обратима, което означава, че $\det A \neq 0$. Съгласно твърдение 2.3, $\det A^T = \det A \neq 0$, следователно матрицата A^T също е обратима. Да положим $C = \left(A^{-1}\right)^T$. Тогава

$$A^T C = A^T \left(A^{-1}\right)^T = \left(A^{-1}A\right)^T = E^T = E,$$

следователно $\left(A^T\right)^{-1} = C = \left(A^{-1}\right)^T$. ■

3. Формули на Крамер. Да разгледаме ***линейната система*** от n уравнения със също толкова на брой неизвестни x_1, x_2, ..., x_n

$$\begin{aligned} & a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ & a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ & a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{aligned} \tag{3.4}$$

Под решене на тази система се разбира всяка наредена съвкупност от n на брой числа, които след заместване в неизвестните удовлетворяват всичките уравнения на системата. Константите a_{ij}, $1 \le i, j \le n$, се наричат ***коефициенти*** на системата, а b_i, $1 \le i \le n$, се наричат ***свободни коефициенти***. Коефициентите на системата (3.4), нейните свободни коефициенти и съвкупността на неизвестните величини могат да се представят съответно като квадратна матрица A от ред n и два вектор-стълба с n елемента по следния начин

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}, \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix},$$

с помощта на които системата линейни уравнения (3.4) може да се запише в матрично-векторен вид

$$Ax = b. \tag{3.5}$$

Ако $n = 1$, то равенството (3.5) се превръща в просто линейно уравнение $ax = b$, където a и b са някакви числа, а x е търсеното неизвестно, което уравнение има решение когато коефициентът a е различен от нула. В този случай решението се записва във вида $x = a^{-1}b$. В общия случай системата (3.5) също се решава лесно, ако $\det A \neq 0$. Тогава матрицата A е обратима и като умножим (3.5) отляво с обратната A^{-1}, получаваме $A^{-1}Ax = A^{-1}b$, откъдето отчитайки равенството $A^{-1}A = E_n$, за решението на системата (3.5) по необходимост намираме формулата

$$x = A^{-1}b, \tag{3.6}$$

за която веднага се проверява, че наистина определя решение на системата (3.4), понеже $A\left(A^{-1}b\right)=\left(AA^{-1}\right)b=E_n b=b$. Съгласно теорема 3.2, в разгърнат вид, това матрично равенство има следната форма

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \frac{1}{\det A}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix},$$

следователно

$$x_1 = \frac{b_1A_{11}+b_2A_{21}+\cdots+b_nA_{n1}}{\det A} = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ b_2 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_n & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}}{\det A} = \frac{\Delta_1}{\Delta},$$

$$x_2 = \frac{b_1A_{12}+b_2A_{22}+\cdots+b_nA_{n2}}{\det A} = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & b_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & b_n & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}}{\det A} = \frac{\Delta_2}{\Delta},$$

...

$$x_n = \frac{b_1A_{1n}+b_2A_{2n}+\cdots+b_nA_{nn}}{\det A} = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & b_n \end{vmatrix}}{\det A} = \frac{\Delta_n}{\Delta}.$$

По този начин доказахме следната

Теорема 3.3. Нека матрицата на коефициентите на линейната система (3.4) е обратима, $\det A \neq 0$. Тогава тази система има (при това единствено) решение, което се задава по формулите ***(формули на Крамер)***

$$x_k = \frac{\Delta_k}{\Delta},\ k=1,2,\ldots,n,$$

където $\Delta=\det A$, а детерминантата Δ_k се получава като k-тия стълб на Δ заменим със стълба на свободните коефициенти. ■

Например да решим следната система

$$x+y+z=6$$
$$2x-y+z=3$$
$$x-y+2z=5$$

Поради малкия брой на неизвестните, те са означени с x, y и z, вместо x_1, x_2 и x_3. Изобщо индексирането е целесъобразно означение само при голям брой употребени величини в съответния запис. За детерминантата на системата пресмятаме

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = -5 \neq 0,$$

следователно решението, което е единствено, може да се намери по формулите на Крамер, съгласно които

$$x=\frac{\begin{vmatrix}6 & 1 & 1\\ 3 & -1 & 1\\ 5 & -1 & 2\end{vmatrix}}{-5}=\frac{-5}{-5}=1\,,\quad y=\frac{\begin{vmatrix}1 & 6 & 1\\ 2 & 3 & 1\\ 1 & 5 & 2\end{vmatrix}}{-5}=\frac{-10}{-5}=2\,,\quad z=\frac{\begin{vmatrix}1 & 1 & 6\\ 2 & -1 & 3\\ 1 & -1 & 5\end{vmatrix}}{-5}=\frac{-15}{-5}=3\,.$$

Ако всичките свободни коефициенти са нули, то системата се нарича ***хомогенна***. Очевидно, една хомогенна система винаги има решение, което се състои само от нули. Ако обаче детерминантата на една хомогенна система е различна от нула, то тази система няма друго решение.

Твърдение 3.4. Нека матрицата на коефициентите на хомогенната система линейни уравнения

$$\begin{aligned} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n&=0\\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n&=0\\ &\ldots\\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{nn}x_n&=0 \end{aligned}\tag{3.7}$$

е обратима, т.е. $\det A\neq 0$. Тогава тази система има само нулевото решение.

Доказателство. Понеже $\det A\neq 0$, за решенията на (3.7) можем да приложим формулите на Крамер. В този случай обаче всяка от детерминантите Δ_k има нулев стълб, следователно $\Delta_k=0$, $k=1,2,\ldots,n$, и съответно $x_k=0$, $k=1,2,\ldots,n$. ■

От основната теорема на алгебрата следва, че един полином от степен n не може да има повече от n на брой различни корени. Сега ще докажем този факт като следствие от твърдение 3.4.

Твърдение 3.5. Нека

$$f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$$

е полином, за който съществуват $n+1$ на брой числа x_0, x_1, ..., x_n такива, че $f(x_k)=0$, за всяко $k=0,1,\ldots,n$. Тогава $f(x)$ е тъждествено равен на нула.

Доказателство. По условие имаме

$$\begin{aligned} a_0+a_1x_0+\cdots+a_{n-1}x_0^{n-1}+a_nx_0^n&=0\\ a_0+a_1x_1+\cdots+a_{n-1}x_1^{n-1}+a_nx_1^n&=0\\ \cdots\qquad\cdots\qquad\cdots&\\ a_0+a_1x_n+\cdots+a_{n-1}x_n^{n-1}+a_nx_n^n&=0 \end{aligned}$$

което можем да разглеждаме като хомогенна система от $n+1$ на брой линейни уравнения относно неизвестните a_0, a_1, ..., a_{n-1}, a_n с детерминанта, чиято транспонирана представлява детерминанта на Вандермонд $VDM(x_0,x_1,\ldots,x_n)$. Тази детерминанта е различна от нула, понеже числата x_0, x_1, ..., x_n се предполагат различни по между си. Сега от твърдение 3.4 следва, че въпросната система има само нулевото решение, $a_0=a_1=\cdots=a_{n-1}=a_n=0$, т.е. всичките коефициенти на дадения полином $f(x)$ са равни на нула. ■

3. Собствени значения и собствени вектори. Нека A е квадратна матрица от ред n (с реални или комплексни елементи). Ако λ е някакво число (реални или комплексно), а $\vec{\mathbf{v}}\neq\vec{\mathbf{0}}$ е някакъв вектор (с реални или комплексни координати), при което е налице равенството $A\vec{\mathbf{v}}=\lambda\vec{\mathbf{v}}$,

$$(3.8)\qquad \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix},$$

то се казва, че λ е ***собствено значение*** за матрицата A със ***собствен вектор*** $\vec{\mathbf{v}}$.

Равенството (3.8) може да се схваща като хомогенна система линейни уравнения

$$(3.9)\qquad \begin{pmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}-\lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix},\ (A-\lambda E_n)\vec{\mathbf{v}} = \vec{\mathbf{0}},$$

която по определение има ненулево решение. Сега от общите свойства на такива системи се вижда, че ако λ е собствено число, то $\det(A-\lambda E_n)=0$, т.е. λ е корен на ***характеристичния полином*** $\chi(z)=\det(A-zE_n)$ на матрицата A, което означава, че λ удовлетворява ***характеристичното уравнение*** $\chi(z)=0$. Обратното също е вярно и също следва от основните свойства на хомогенните системи. Ако λ е корен на характеристичното уравнение, то $\det(A-\lambda E_n)=0$ и следователно хомогенната система (3.9) има ненулево решение, което се явява собствен вектор за матрицата A, отговарящ на собственото значение λ.

Характеристичният полином има степен точно n, следователно има n на брой корена, отчитайки тяхната кратност. Според основаната теорема на алгебрата можем да запишем

$$\chi(z) = (-1)^n (z-\lambda_1)(z-\lambda_2)\cdots(z-\lambda_n),$$

където λ_1, λ_2, ..., λ_n са корените на полинома, които както вече установихме се явяват собствените значения на матрицата A. В това представяне е отчетен фактът, че старшият коефициент на характеристичния полином е равен на $(-1)^n$. Полагайки $z=0$, намираме

$$\chi(0) = (-1)^n(-\lambda_1)(-\lambda_2)\cdots(-\lambda_n) = \lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n.$$

От друга страна $\chi(0)=\det(A-0E_n)=\det A$. По този начин доказахме

Твърдение 3.6. Произведението на всичките собствени значения на дадена матрица е равно на стойността на нейната детерминанта. ■

Нека U е $(n\times n)$ матрица с реални елементи, за която $UU^T = E_n$, т.е. $U^{-1}=U^T$. Такива матрици се наричат ***ортогонални***. В частност, ако U е ортогонална, то $\det U = \pm 1$, понеже

$$1 = \det E_n = \det(UU^T) = (\det U)(\det U^T) = (\det U)^2.$$

Например матрицата

$$U = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$$

е ортогонална.