Глава 3

Криволинейни интеграли

1. Криви в равнината

Крива (или *параметрично зададена крива*) в равнината се нарича образът на всяко изображение от вида $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^2$, т.е.

$$\gamma = \{(x, y) : \ x = x(t), \ y = y(t), \ t \in [a, b]\}\,, \tag{3.1}$$

където $x : [a, b] \to \mathbb{R}$ и $y : [a, b] \to \mathbb{R}$ са непрекъснати функции.

Независимата променлива t се нарича параметър на кривата γ.

Ако функциите $x(t)$ и $y(t)$ са частично гладки (гладки) то кривата γ се нарича частично гладка (гладка).

Точката с координати $(x(a), y(a))$ се нарича начало на кривата γ, а точката $(x(b), y(b))$ край на кривата γ.

Ако $(x(a), y(a)) = (x(b), y(b))$, казваме, че γ е затворена крива.

Нека γ_1 и γ_2 са две криви в равнината:

$$\gamma_1 = \{(x, y) : \ x = x_1(t), \ y = y_1(t), \ t \in [a_1, b_1]\},$$
$$\gamma_2 = \{(x, y) : \ x = x_2(t), \ y = y_2(t), \ t \in [a_2, b_2]\}.$$

Казваме, че гладките криви γ_1 и γ_2 са *еквивалентни*, ако съществува взаимно еднозначна диференцируема функция $\phi : [a_1, b_1] \to [a_2, b_2]$ такава, че:

(1) $\phi'(t) \neq 0$, за всяко $t \in [a_1, b_1]$.
(2) $\gamma_2(\phi(t)) = \gamma_1(t)$, т.е.

$$x_2(\phi(t)) = x_1(t) \quad \text{и} \quad y_2(\phi(t)) = y_1(t),$$

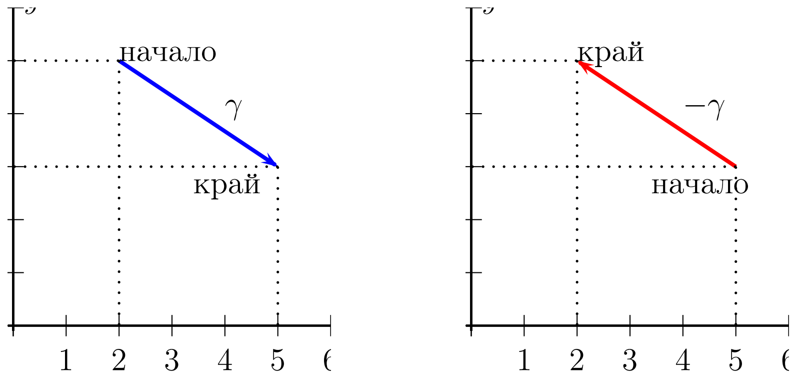
за всяко $t \in [a_1, b_1]$.

В този случай ϕ се нарича репараметризация на γ_1.

Еквивалентните криви имат еднакъв образ в $\mathbb{R}^2$.

Две еквивалентни криви се наричат *еднакво ориентирани* (*обратно ориентирани*) ако за тяхната репараметризация ϕ е валидно неравенството $\phi'(t) > 0$ ($\phi'(t) < 0$), за всяко $t \in [a_1, b_1]$. Еднакво ориентираните криви имат еднакъв образ в $\mathbb{R}^2$ и една и съща посока.

Ако γ е крива, то с $-\gamma$ ще означаваме обратно ориентираната крива на γ. Нека отбележим, че началото (краят) на кривата γ е край (начало) на



Фигура 3.1.

$-\gamma$. За кривата γ, зададена с равенство (3.1), обратно ориентираната крива е

$$-\gamma = \{(x,y):\ x = x(-t+a+b),\ y = y(-t+a+b),\ t \in [a,b]\},$$

Казваме, че кривата γ е зададена *явно*, ако $x(t) = t$ (или $y(t) = t$), т.е.

$$\gamma = \{(x,y):\ x = t,\ y = y(t),\ t \in [a,b]\} = \{(x,y): y = y(x),\ x \in [a,b]\}$$

или

$$\gamma = \{(x,y):\ x = x(t),\ y = t,\ t \in [a,b]\} = \{(x,y): x = x(y),\ y \in [a,b]\}.$$

Казваме, че кривата γ е зададена *неявно посредством функцията* $\Phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, ако $x = x(t)$ и $y = y(t)$ е единственото решение на уравнението $\Phi(x,y) = 0$.

Пример 3.1. Нека

$$\gamma = \{(x,y): x(t) = 3t-1,\ y(t) = -2t+7,\ t = [1,2]\}.$$

Началото на γ е точката $(x(1), y(1)) = (2,5)$, а краят на γ е точката $(x(2), y(2)) = (5,3)$.

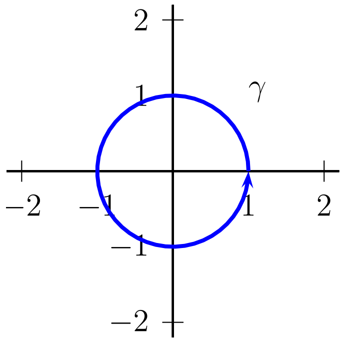
Обратно ориентираната крива $-\gamma$ е

$$-\gamma = \{(x,y): x(t) = 3(-t+3)-1 = -3t+8,$$
$$y(t) = -2(-t+3)+7 = 2t+1,\ t \in [1,2]\}.$$

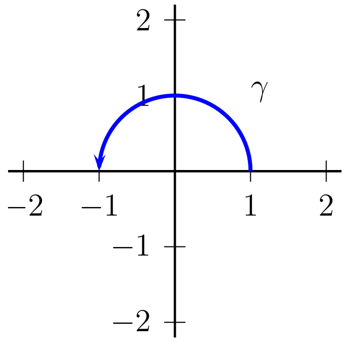
Графиките на кривите γ и $-\gamma$ са изобразени на фигура 3.1

Пример 3.2. Да разгледаме окръжността

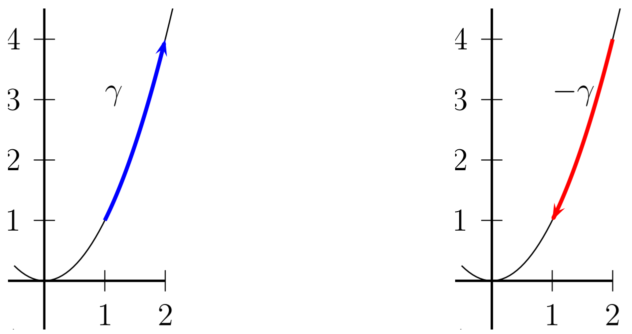
$$\gamma = \{(x,y):\ x^2+y^2 = 1\}.$$



Фигура 3.2.



Фигура 3.3.



Фигура 3.4.

Параметричното представяне на γ е

$$\gamma = \{(x, y) : \ x(t) = \cos t, \ y(t) = \sin t, \ t \in [0, 2\pi]\}.$$

Графикът на γ е изобразен на фигура 3.2.

Параметричното представяне на полуокръжността $x^2 + y^2 = 1$, $y > 0$ е (вж. фигура 3.3)

$$\gamma = \{(x, y) : \ x(t) = \cos t, \ y(t) = \sin t, \ t \in [0, \pi]\}.$$

Параметричното представяне на окръжността $(x-2)^2+(y+4)^2 = 16$ е

$$\gamma = \{(x, y) : \ x(t) = 2 + 4\cos t, \ y(t) = -4 + 4\sin t, \ t \in [0, 2\pi]\}.$$

Пример 3.3. Параметричното представяне на дъгата $\gamma : y = x^2$, $x \in [1,2]$ от параболата $y = x^2$ е (вж. фигура 3.4)

$$\gamma = \{(x,y) :\ x(t) = t,\ y(t) = t^2,\ t \in [1,2]\}.$$

Обратно ориентираната крива $-\gamma$ е

$$\gamma = \left\{(x,y) :\ x(t) = -t+3,\ y(t) = (-t+3)^2,\ t \in [1,2]\right\}.$$

Задача 3.1. Да се запишат параметрично кривите γ и $-\gamma$ и да се начертаят графиките им, ако:

(1) $\gamma : \left(\frac{x}{2}\right)^2 + \left(\frac{y}{3}\right)^2 = 1,\ x < 0;$

(2) $\gamma : xy = 1,\ x \in [2,3],\ y > 0;$

(3) $\gamma : y^2 - x = 4,\ x \in [0,1],\ y < 0;$

(4) $\gamma : y = -3x + 2,\ x \in [-1.5, 1.5];$

(5) $\gamma : (x-1)^2 + y^2 = 1,\ x \in \left[\frac{\pi}{2}, 2\pi\right].$

2. Криволинейни интеграли от I-ви род

Нека Ω е област в $\mathbb{R}^2$ и $f : \Omega \to \mathbb{R}$ е непрекъсната функция.

Нека γ е явно зададена крива в Ω:

$$\gamma = \{(x,y) :\ x \in [a,b],\ y = g(x)\},$$

където: $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ е гладка функция.

Тогава:

$$\int\limits_\gamma f(x,y)ds = \int\limits_a^b f(x,g(x))\sqrt{1 + (g'(x))^2}dx. \tag{3.2}$$

Нека γ е параметрично зададена крива в Ω:

$$\gamma = \left\{(x,y) :\ x = x(t),\ y = y(t),\ t \in [a,b]\right\},$$

където: $x, y : [a,b] \to \mathbb{R}$ са гладки функции.

Тогава:

$$\int\limits_\gamma f(x,y)ds = \int\limits_a^b f(x(t),y(t))\sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}dt. \tag{3.3}$$

Свойства на криволинейни интеграли:

(1) Линейност:

$$\int_\gamma \alpha f(x,y) + \beta g(x,y) ds = \alpha \int_\gamma f(x,y) ds + \beta \int_\gamma g(x,y) ds,$$

където α и β са реални числа.

(2) Адитивност (ако краят на γ_1 е начало на γ_2):

$$\int_{\gamma_1 \cup \gamma_2} f(x,y) ds = \int_{\gamma_1} f(x,y) ds + \int_{\gamma_2} f(x,y) ds.$$

(3) Монотонност:

$$\text{ако} \quad f(x,y) \leq g(x,y), \quad \text{то} \quad \int_\gamma f(x,y) ds \leq \int_\gamma g(x,y) ds.$$

(4) Теорема за средната стойност:

$$\text{съществува } (\xi, \eta) \in \gamma \text{ така, че} \int_\gamma f(x,y) ds = f(\xi, \eta)|\gamma|,$$

където с $|\gamma|$ е означена дължината на кривата γ.

В частност:

$$|\gamma| = \int_\gamma ds. \tag{3.4}$$

(5) Интегралът не зависи от промяна на параметризацията на кривата γ. В частност:

$$\int_\gamma f(x,y) ds = \int_{-\gamma} f(x,y) ds.$$

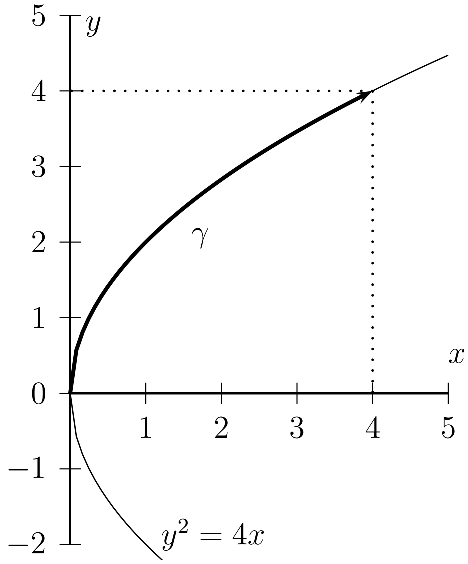
Пример 3.4. Да се пресметне

$$J = \int_\gamma y ds,$$

където кривата γ е зададена чрез $y^2 = 4x$, $x \in [0,4]$ и $y \geq 0$ (вж. фигура 3.7).

Решение. Кривата γ е зададена явно:

$$\gamma = \{(x,y) : \ y = 2\sqrt{x}, \ x \in [0,4]\}.$$



Фигура 3.5.

Използуваме формула (3.2):

$$\int\limits_\gamma y ds = \int\limits_0^4 2\sqrt{x}\sqrt{1+\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2}dx$$

$$=2\int\limits_0^4 \sqrt{x+1}dx$$

$$=\frac{20}{3}\sqrt{5}-\frac{4}{3}.$$

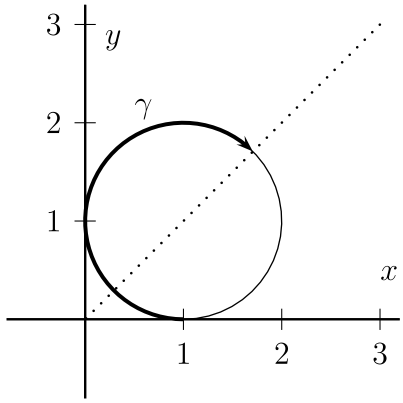
□

Пример 3.5. Да се пресметне

$$I=\int\limits_\gamma y^2 ds,$$

където кривата γ е зададена параметрично (вж. фигура 3.6):

$$\gamma: \begin{cases} x(t) = 1-\sin t, \\ y(t) = 1-\cos t, \end{cases} \quad t\in\left[0,\frac{5\pi}{4}\right].$$



Фигура 3.6.

Решение. Използуваме (3.3):

$$\begin{aligned}\int\limits_{\gamma} y^2 ds &= \int\limits_0^{5\frac{\pi}{4}} (1-\cos t)^2 \sqrt{((1-\sin t)')^2 + ((1-\cos t)')^2} dt \\ &= \int\limits_0^{5\frac{\pi}{4}} (1-\cos t)^2 dt \\ &= \int\limits_0^{5\frac{\pi}{4}} \left(\frac{3}{2} - 2\cos t + \frac{1}{2}\cos 2t\right) dt \\ &= \frac{3}{2}t - 2\sin t + \frac{1}{2}\cos t \sin t \Big|_0^{5\frac{\pi}{4}} \\ &= \frac{1}{4} + \frac{15}{8}\pi + \sqrt{2}.\end{aligned}$$

□

Задача 3.2. Да се пресметнат интегралите:

(1) $J = \int\limits_{\gamma} (x-y) ds$, където $\gamma: \ x = 3t-1, \ y = 2t+5, \ t \in [0,1]$.

(2) $K = \int\limits_{\gamma} (x+y) ds$, където $\gamma: \ x = 3t+2, \ y = 4t+7, \ t \in [0,1]$.

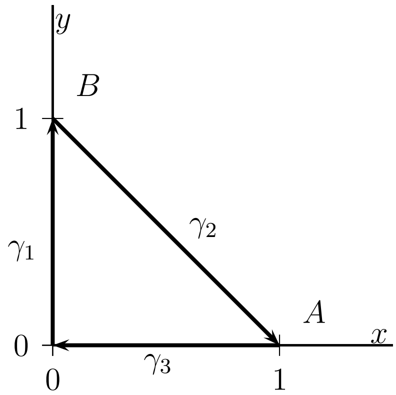
Отговори:

(1) $-\frac{11\sqrt{13}}{2}$; (2) $\frac{105}{2}$.

Пример 3.6. Да се пресметне

$$J = \int\limits_{\gamma} (x+y)ds,$$

където кривата γ е контурът на триъгълника с върхове $O(0,0)$, $B(0,1)$ и $A(1,0)$ (вж. фигура 3.7).



Фигура 3.7.

Решение. За пресмятането на интеграла ще използваме свойството адитивност. Нека с γ_1, γ_2 и γ_3 означим отсечките OB, BA и AO съответно. Тогава:

$$J = \int\limits_{\gamma} (x+y)ds = \int\limits_{\gamma_1} (x+y)ds + \int\limits_{\gamma_2} (x+y)ds + \int\limits_{\gamma_3} (x+y)ds.$$

Върху отсечката γ_1: $x = 0$, $y = t$, $t \in [0,1]$. Следователно

$$\int\limits_{\gamma_1} (x+y)ds = \int\limits_0^1 tdt = \frac{1}{2}.$$

Върху отсечката γ_3: $x = t$, $y = 0$, $t \in [0,1]$. Следователно

$$\int\limits_{\gamma_3} (x+y)ds = \int\limits_0^1 tdt = \frac{1}{2}.$$

Отсечката γ_2 лежи върху правата $x + y = 1$. Ето защо $x = t$, $y = 1 - t$, $t \in [0, 1]$. Следователно

$$\int\limits_{\gamma_2} (x+y)ds = \int\limits_0^1 (t+1-t)\sqrt{2}dt = \sqrt{2}.$$

Следователно $J = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \sqrt{2} = 1 + \sqrt{2}$. □

Задача 3.3. Да се пресметне интегралът

$$J = \int\limits_{\gamma} xyds,$$

където кривата γ е контурът на правоъгълника с върхове $O(0,0)$, $A(4,0)$, $B(4,2)$ и $C(0,2)$.

Задача 3.4. Да се пресметне интегралът

$$J = \int\limits_{\gamma} (x-y)ds,$$

където $\gamma : x^2 + y^2 = 4x$.

Упътване:
От равенството $x^2+y^2 = 4x$, лесно получаваме $(x-2)^2+y^2 = 2^2$. Параметричното представяне на окръжността γ е $x(t) = 2 + 2\cos t$, $y(t) = 2\sin t$, $t \in [0, 2\pi]$.

Задача 3.5. Пресметнете интегралите:

(1) $I = \int\limits_{\gamma} y^2 ds,$

където $\gamma : x(t) = t - \sin t,\ y(t) = 1 - \cos t,\ t \in [0, 2\pi]$;

(2) $I = \int\limits_{\gamma} x^2 + y^2 ds,$

където $\gamma : x(t) = \cos t + t\sin t,\ y(t) = \sin t - t\cos t,\ t \in [0, 2\pi]$;

(3) $I = \int\limits_{\gamma} xyds,$

където $\gamma : x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = 1$;

(4) $I = \int\limits_{\gamma} \sqrt{x^2+y^2}ds,$

където $\gamma : x^2 + y^2 = 4x$;

(5) $I = \int\limits_{\gamma} x^2 ds,$

където $\gamma : x^2 + y^2 = 4,\ y \geq 0$;

Отговори:

(1) $I = \frac{256}{15}$; (2) $I = 2\pi^2(1+2\pi^2)$; (3) $I = 4$; (4) $I = 32$; (5) $I = 32\pi$;

3. Приложения

3.1. Геометрична интерпретация. Нека γ е крива в областта Ω. Дължината на кривата γ е

$$|\gamma| = \int\limits_{\gamma} ds. \tag{3.5}$$

3.2. Приложения в механиката. Нека върху кривата γ е разпределена маса с линейна плътност $\rho(x,y)$. Тогава:

Масата на кривата γ е

$$m = \int\limits_{\gamma} \rho(x,y)ds. \tag{3.6}$$

Координатите на центъра на тежестта на γ са

$$\left(\frac{1}{m} \int\limits_{\gamma} x\rho(x,y)ds, \quad \frac{1}{m} \int\limits_{\gamma} y\rho(x,y)ds \right). \tag{3.7}$$

Пример 3.7. Нека $\gamma = \{(x,y) : y = x^2,\ x \in [1,2]\}$. Да се определи дължината $|\gamma|$ на кривата γ.

Решение. Използваме формула (3.5):

$$|\gamma| = \int\limits_{\gamma} ds = \int\limits_{1}^{2} \sqrt{1 + \left((x^2)'\right)^2}dx = \int\limits_{1}^{2} \sqrt{1+4x}dx = \frac{9}{2} - \frac{5\sqrt{5}}{6}. \qquad \square$$

Пример 3.8. Нека $\gamma = \{(x, y) : y^2 = 2x,\ x \in [0, 1]\}$. Да се определи масата на дъгата γ, ако нейната линейна плътност $\rho(x, y)$ в точката (x, y) е равна на $|y|$.

Решение. От формула (3.6), директно получаваме:

$$\int\limits_{\gamma} \rho(x, y) ds = \int\limits_{\gamma} |y| ds = 2 \int\limits_{0}^{\frac{1}{2}} \sqrt{2x} \sqrt{1 + \frac{1}{2x}} dx = \frac{2}{3}(2\sqrt{2} - 1). \quad \square$$

Пример 3.9. Да разгледаме хомогенната окръжност

$$\gamma = \{(x, y) :\ x^2 + y^2 = 1\} = \{(x, y) :\ x = \cos t,\ y = \sin t,\ t \in [0, 2\pi]\}$$

(т.е. върху окръжността γ е разпределена маса с линейна плътност $\rho(x, y) = 1$).

Да се определят координатите на центъра на тежестта на γ.

Решение. Масата на окръжността е

$$m = \int\limits_{\gamma} \rho(x, y) ds = \int\limits_{\gamma} ds = |\gamma| = 2\pi.$$

Координатите на центъра на тежестта (M_x, M_y) на γ са

$$M_x = \frac{1}{m} \int\limits_{\gamma} x\rho(x, y) ds = \int\limits_{\gamma} x ds = \int\limits_{0}^{2\pi} \cos t dt = 0.$$

и

$$M_x = \frac{1}{m} \int\limits_{\gamma} y\rho(x, y) ds = \int\limits_{\gamma} y ds = \int\limits_{0}^{2\pi} \sin t dt = 0. \qquad \square$$

Задача 3.6. Да се пресметнат дължините на следните криви:

(1) $\gamma : x(t) = 3t,\ y(t) = 3t^2,\ t \in [0, 2]$;

(2) $\gamma : x(t) = e^{-t} \cos t,\ y(t) = e^{-t} \sin t,\ t \in [0, 1]$;

(3) $\gamma : x^2 + y^2 = 4(x + y)$;

Задача 3.7. Да се пресметне масата на кривата

$$\gamma : x(t) = 2 \cos t,\ y(t) = 4 \sin t,\ t \in [0, 2\pi],$$

ако линейната плътност в точката (x, y) е $\rho(x, y) = |y|$.

Задача 3.8. Да се пресметне масата на кривата

$$\gamma : y^2 = 4x,\ x \in [0, 1],$$

ако линейната плътност в точката (x, y) е $\rho(x, y) = |y|$.

4. Криволинейни интеграли от II-ри род

Нека Ω е област в $\mathbb{R}^2$, $P, Q : \Omega \to \mathbb{R}$ са непрекъснати функции.

Нека γ е явно зададена крива в Ω:

$$\gamma = \{(x, y) :\ y = g(x),\ x \in [a, b]\},$$

където: $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ е гладка функция.

Тогава:

$$\int\limits_{\gamma} P(x, y)dx + Q(x, y)dy = \int\limits_{a}^{b} \big(P(x, g(x)) + Q(x, g(x))g'(x)\big)\, dx. \tag{3.8}$$

Нека γ е параметрично зададена крива в Ω:

$$\gamma = \{(x, y) : x = x(t),\ y = y(t),\ t \in [a, b]\},$$

където: $x, y : [a, b] \to \mathbb{R}$ са гладки функции.

Тогава:

$$\int\limits_{\gamma} P(x, y)dx + Q(x, y)dy$$

$$= \int\limits_{a}^{b} \big(P(x(t), y(t))x'(t) + Q(x(t), y(t))y'(t)\big)\, dt. \tag{3.9}$$

Забележка 3.1. Прието е криволинейният интеграл върху затворена крива γ да се записва чрез символа $\oint$, т.е.

$$\oint\limits_{\gamma} P(x, y)dx + Q(x, y)dy.$$

Условия за независимост на криволинейния интеграл от кривата на интегриране. Нека γ е крива в областта Ω и нека точката A е началото на γ, а точката B е краят на γ. Казваме, че криволинейният интеграл *не зависи от кривата на интегриране*, ако за всяка частично-гладка крива γ_1, с начало A и край B е валидно равенството

$$\int\limits_{\gamma_1} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \int\limits_{\gamma} P(x,y)dx + Q(x,y)dy.$$

Теорема 3.1. *Нека Ω е едносвързана област в $\mathbb{R}^2$, γ е частично гладка крива в Ω, $P, Q : \Omega \to \mathbb{R}$ са непрекъснато диференцируеми функции.*

Тогава, следните твърдения са еквивалентни:

(1) *Интегралът*

$$\int\limits_{\gamma} P(x,y)dx + Q(x,y)dy$$

не зависи от кривата на интегриране.

(2) *За всяка затворена крива γ в Ω е валидно равенството*

$$\oint\limits_{\gamma} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0. \tag{3.10}$$

(3) *Валидно е равенството*

$$\frac{\partial P(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial Q(x,y)}{\partial x}, \tag{3.11}$$

за всяка точка $(x,y) \in \Omega$.

(4) *Съществува гладка функция $u : \Omega \to \mathbb{R}$, такава, че*

$$du(x,y) = P(x,y)dx + Q(x,y)dy, \tag{3.12}$$

за вско $(x,y) \in \Omega$. Валидна е формулата

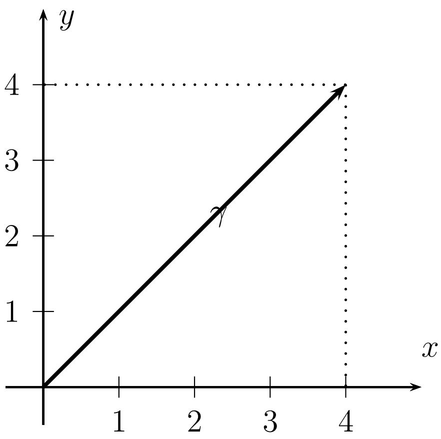
$$\int\limits_{\gamma} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = u(x_2,y_2) - u(x_1,y_1), \tag{3.13}$$

където $\gamma = \{(x,y) : x = x(t),\ y = y(t),\ t \in [t_1,t_2]\}$; $x_i = x(t_i)$, $y_i = y(t_i)$, $i = 1,2$.

Пример 3.10. Да се пресметне

$$J = \int\limits_{\gamma} xydx + (y-x)dy,$$

където кривата γ е зададена чрез $y = x$, $x \in [0,4]$ (вж. фигура 3.8).



Фигура 3.8.

Решение. Използуваме формула (3.8):

$$\int\limits_{\gamma} xydx + (y-x)dy = \int\limits_0^4 (x\,x + (x-x))\,dx$$
$$= \int\limits_0^4 x^2dx = \left.\frac{x^3}{3}\right|_0^4 = \frac{64}{3}. \qquad \square$$

Пример 3.11. Да се пресметне стойността на криволинейния интеграл

$$J = \int\limits_{\gamma} -x\cos y dx + y\sin x dy,$$

където γ е отсечката съединяваща точките $O(0,0)$ и $A(\pi, 2\pi)$.

Решение. Уравнението на правата през точките $O(0,0)$ и $A(\pi, 2\pi)$ е $y = 2x$. Ето защо

$$\gamma = \{(x,y):\ y = 2x,\ x \in [0, 2\pi]\}.$$

Използуваме формула (3.8):

$$\int\limits_{\gamma} -x\cos y dx + y\sin x dy = \int\limits_{0}^{\pi} (-x\cos 2x + 4x\sin x)\, dx$$

$$= \int\limits_{0}^{\pi} xd\left(-\frac{\sin 2x}{2} - 4\cos x\right)$$

$$= \left(-x\frac{\sin 2x}{2} - 4x\cos x\right)\Bigg|_{0}^{\pi}$$

$$+ \int\limits_{0}^{\pi} \left(\frac{\sin 2x}{2} + 4\cos x\right) dx$$

$$= 4\pi - \frac{\cos 2x}{4}\Bigg|_{0}^{\pi} + 4\sin x\Bigg|_{0}^{\pi} = 4\pi. \qquad \square$$

Пример 3.12. Да се пресметне

$$J = \int\limits_{\gamma} (x^2 - 2xy)dx + (2xy + y^2)dy,$$

където γ е дъга от параболата $y = x^2$ с начало точката $A(1,1)$ и край $B(2,4)$.

Решение. Очевидно

$$\gamma = \{(x,y): \ y = x^2, \ x \in [1,2]\}.$$

Използуваме формула (3.8):

$$\int\limits_{\gamma} (x^2 - 2xy)dx + (2xy + y^2)dy = \int\limits_{1}^{2} (x^2 - 2x^3) + (2x^3 + x^4)dx$$

$$= \int\limits_{1}^{2} (2x^5 + 4x^4 - 2x^3 + x^2)dx$$

$$= \frac{1219}{30}. \qquad \square$$

Задача 3.9. Да се пресметнат интегралите:

(1) $I = \int\limits_{\gamma} xy dx$, където $\gamma : y(x) = \sin x,\ x \in [0, \pi]$;

(2) $I = \int\limits_{\gamma} \left(x - \frac{1}{y}\right) dy$, където $\gamma : y(x) = x^2,\ x \in [1, 2]$;

(3) $I = \int\limits_{\gamma} x dy - y dx$, където $\gamma : y = x^3,\ x \in [0, 2]$;

(4) $I = \int\limits_{\gamma} \frac{y}{x} dx + dy$, където $\gamma : y(x) = \ln x,\ x \in [1, e]$;

(5) $I = \int\limits_{\gamma} 2xy dx + x^2 dy$, където $\gamma : y(x) = \frac{x^2}{4},\ x \in [0, 2]$;

Отговори:
(1) $I = \pi$; (2) $I = \frac{14 - 3\ln 4}{3}$; (3) $I = 8$; (4) $I = \frac{3}{2}$; (5) $I = 4$;

Задача 3.10. Да се пресметнат интегралите:

(1) $I = \int\limits_{\gamma} (x^2 + y^2) dx$, където γ е контурът на правоъгълника с върхове $(1, 1)$, $(1, 5)$, $(3, 5)$ и $(3, 1)$;

(2) $I = \int\limits_{\gamma} (3x^2 - y) dx + (1 - 2x)^2 dy$, където γ е контурът на триъгълника с върхове $(0, 0)$, $(1, 0)$ и $(1, 1)$;

(3) $I = \int\limits_{\gamma} (x^2 + y^2) dx + (x^2 - y^2) dy$, където γ е контурът на триъгълника с върхове $(0, 0)$, $(1, 0)$ и $(1, 1)$;

Отговори:
(1) $I = -48$; (2) $I = -\frac{1}{2}$; (3) $I = 0$.

Пример 3.13. Да се пресметне

$$I = \oint_\gamma (3x^2y + y)dx + (x^3 + x)dy,$$

където γ е произволна затворена крива в $\mathbb{R}^2$.

Решение. Очевидно

$$P(x,y) = 3x^2y + y \quad \text{и} \quad Q(x,y) = x^3 + x.$$

Тогава

$$\frac{\partial P(x,y)}{\partial y} = 3x^2 + 1 \quad \text{и} \quad \frac{\partial Q(x,y)}{\partial x} = 3x^2 + 1.$$

Следователно $\frac{\partial P(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial Q(x,y)}{\partial x}$, т.е. интегралът не зависи от кривата на интегриране. Ето защо от теорема 3.1, твърдение (2) получаваме $I = 0$. □

Пример 3.14. Да се пресметне

$$I = \int_\gamma (3x^2y + y)dx + (x^3 + x)dy,$$

където γ е отсечката която съединява точките $(0,0)$ и $(2,3)$.

Решение. Използваме разсъжденията от предния пример за да се убедим, че интегралът I не зависи от кривата на интегриране.

От теорема 3.1 следва, че съществува гладка функция $u(x,y)$ такава, че

$$du(x,y) = P(x,y)dx + Q(x,y)dy. \tag{$*$}$$

От друга страна, от дефиницията на пълен диференциал:

$$du(x,y) = \frac{\partial u(x,y)}{\partial x}dx + \frac{\partial u(x,y)}{\partial y}dy$$

и равенство (*) следва, че

$$\begin{aligned} \frac{\partial u(x,y)}{\partial x} &= P(x,y), \\ \frac{\partial u(x,y)}{\partial y} &= Q(x,y), \end{aligned}$$

т.е.

$$(**) \qquad \frac{\partial u(x,y)}{\partial x} = 3x^2y + y,$$

$$(***) \qquad \frac{\partial u(x,y)}{\partial y} = x^3 + x,$$

Интегрираме (**):

$$u(x,y) = \int \left(3x^2y + y\right) dx = 3y\frac{x^3}{3} + yx + C_1(y) = x^3y + xy + C_1(y),$$

където изрично ще отбележим, че функцията $C_1(y)$ зависи от независимата променлива y и не зависи от x.

От равенството (***) следва, че

$$x^3 + x + C_1'(y) = x^3 + x,$$

т.е. $C_1'(y) = 0$ или $C_1(y) = C$, $C = const$.

Ето защо $u(x,y) = x^3y + xy + C$.

За пресмятането на интеграла I използваме формула (3.13):

$$I = u(2,3) - u(0,0) = 2^3\,3 + 2\,3 = 30.$$

Забележка 3.2. Един "по-лесен" метод за определяне на функцията $u(x,y)$:

$$\begin{aligned}\left(3x^2y + y\right) dx + \left(x^3 + x\right) dy &= \left(3x^2ydx + x^3dy\right) + (ydx + xdy)\\ &= d(x^3y) + d(xy)\\ &= d\left(x^3y + xy\right)\\ &= du(x,y).\end{aligned}$$

□

Задача 3.11. Да се докаже, че интегралите не зависят от кривата на интегриране:

(1) $I = \int\limits_\gamma xdy + ydx;$

(2) $I = \int\limits_\gamma xdx + ydy;$

(3) $I = \int\limits_\gamma (x^4 + 4xy^3)\,dx + (6x^2y^2 - 5y^4)\,dy;$

(4) $I = \int\limits_\gamma 2xydx + x^2dy;$

(5) $I = \int\limits_{\gamma} (x^2 + 2xy - y^2)\, dx + (x^2 - 2xy - y^2)\, dy.$

Задача 3.12. Да се пресметне

$$J = \int\limits_{\gamma} xdy + ydx,$$

където $\gamma : x^2 + y^2 = 2.$

Отговор: 0.

Задача 3.13. Да се пресметне

$$J_1 = \int\limits_{\gamma_1} \frac{xdy + ydx}{x^2 + y^2}, \quad J_2 = \int\limits_{\gamma_2} \frac{xdy + ydx}{x^2 + y^2}, \quad J_3 = \int\limits_{\gamma_3} \frac{xdy + ydx}{x^2 + y^2}$$

където $\gamma_1 : (x-4)^2 + (y-4)^2 = 1$, $\gamma_2 : (x)^2 + (y-1)^2 = 1$ и $\gamma_3 : x^2 + y^2 = 1$.

Упътване. Проверете дали дефиниционната област на подинтегралиня израз е едносвързано множество, т.е. дали може да се приложи теорема 3.1.

Задача 3.14. Докажете, че интегралите не зависят от кривата на интегриране и пресметнете тяхните стойности:

(1) $\int\limits_{(-1,2)}^{(2,3)} xdy + ydx;$

(2) $\int\limits_{(0,1)}^{(3,-4)} xdx + ydy;$

(3) $\int\limits_{(0,1)}^{(2,3)} (x + y)dx + (x - y)dx;$

(4) $\int\limits_{(1,-1)}^{(1,1)} (x - y)(dx - dy);$

(5) $\int\limits_{(-2,-1)}^{(3,0)} (x^4 + 4xy^3)dx + (6x^2y^2 - 5y^4)dy;$

(6) $\int\limits_{(1,\pi)}^{(2,\pi)} \left(1 - \frac{y^2}{x^2}\cos\frac{y}{x}\right) dx + \left(\sin\frac{y}{x} + \frac{y}{x}\cos\frac{y}{x}\right) dy.$

5. Приложение: Работа на сила

Нека F е непрекъснато векторно поле в областта $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, т.е. $F(x,y) = (F_1(x,y), F_2(x,y))$ е изображение от Ω в $\mathbb{R}^2$ и функциите $F_1 : \Omega \to \mathbb{R}$ и $F_2 : \Omega \to \mathbb{R}$ са непрекъснати.

Нека $\gamma = \{(x,y) :\ x = x(t),\ y = y(t),\ t \in [a,b]\}$ е непрекъсната крива в Ω.

Тогава работата на векторното поле F върху γ (или върху точка, която се движи по γ) е

$$W = \int\limits_{\gamma} F_1(x,y)dx + F_2(x,y)dy.$$

Пример 3.15. Дадено е векторно поле

$$F(x,y) = (x, 3xy)$$

и отсечката $\gamma = \{(x,y) :\ x = 1-t,\ y = 4+t,\ t \in [0,1]\}$, с краища $(1,4)$ и $(0,5)$.

Да се пресметне работата на полето F.

Решение. Работата на векторното поле F върху γ е

$$W = \int\limits_{\gamma} (x)\,dx + (3xy)\,dy = \int\limits_{0}^{1} ((1-t) + 3(1-t)(4+t))\,dt = 7. \quad \Box$$

6. Формула на Грийн

Нека γ е затворена частично гладка крива в $\mathbb{R}^2$, която е граница на ограничената и едносвързана област Ω и нека γ е параметризирана в положителна посока (т.е. областта Ω остава в "ляво" при движение по γ).

Нека $P, Q : \Omega \to \mathbb{R}$ са непрекъснато диференцируеми функции в $\bar{\Omega}$. Тогава

$$\oint\limits_{\gamma} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \iint\limits_{\Omega} \left(\frac{\partial Q(x,y)}{\partial x} - \frac{\partial P(x,y)}{\partial y}\right) dxdy. \qquad (3.14)$$

Формулата (3.14) се нарича формула на Грийн[1].

[1]George Green (1793-1841)

Пример 3.16. Нека γ е правоъгълникът с върхове $(0,0)$, $(4,0)$, $(4,6)$ и $(0,6)$ ориентиран в положителна посока.

Да се пресметне

$$\oint_{\gamma} (x - xy)dx + y^2 dy.$$

Решение. Използуваме формулата на Грийн, където

$$P(x,y) = x - xy$$

и

$$Q(x,y) = y^2.$$

Очевидно

$$\frac{\partial Q(x,y)}{\partial x} = 0, \quad \text{и} \quad \frac{\partial P(x,y)}{\partial y} = -x.$$

Тогава

$$\oint_{\gamma} (x - xy)dx + y^2 dy = \iint_{\Omega} (0 - (-x))\, dxdy = \int_0^4 6xdx = 48. \quad \square$$

Пример 3.17. Да се пресметне

$$I = \oint_{\gamma} \frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2},$$

където γ е затворена (положително ориентирана) гладка крива, без самопресичания и която не огражда координатното начало.

Решение. Тогава, от формулата на Грийн непосредствено следва, че

$$I = \iint_{\Omega} \left(\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{x}{x^2 + y^2} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{y}{x^2 + y^2} \right) \right) dxdy$$

$$= \iint_{\Omega} \frac{y^2 - x^2 + x^2 - y^2}{\left(x^2 + y^2\right)^2} dxdy = 0. \quad \square$$