

Лекция 16

§16. Криволинейни интеграли от първи и втори род

1. Криволинеен интеграл от първи род. Нека $\gamma: \mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$, $\alpha \leq t \leq \beta$, е гладка крива с начална точка $A = \mathbf{r}(\alpha)$ и крайна точка $B = \mathbf{r}(\beta)$ (Рис. 16.1).

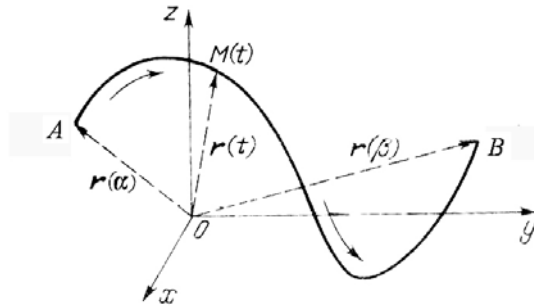


Рис. 16.1.

Тогава дължината на участъка от кривата от началната точка A до точката $M = \mathbf{r}(t)$ се дава от формулата

$$(16.1) \quad s = s(t) = \int_{\alpha}^t |\dot{\mathbf{r}}(\theta)| d\theta = \int_{\alpha}^t \sqrt{\dot{x}^2(\theta) + \dot{y}^2(\theta) + \dot{z}^2(\theta)} d\theta,$$

която е строго монотонно растяща функция, понеже $\dot{s} = |\dot{\mathbf{r}}| > 0$ (кривата е гладка), следователно има обратна, $t = t(s)$, чрез която кривата може да се запише $\gamma: \mathbf{r} = \mathbf{r}(t(s)) = \mathbf{r}(s)$, $0 \leq s \leq l$, където $l = s(\beta)$ е дължината на γ . В този случай казваме, че γ е представена чрез своя *естествен параметър* s .

Казано нестрого, ако "разпънем" кривата γ за двата края A и B , то величината s се превръща в променлива на числова ос, която съдържа изправената крива. От тук идва и названието *ректифицируеми*, т.е. могат да се "изправят", за кривите, които имат дължина.

Определение 16.1. Криволинейният интеграл от първи род от функцията $f(x, y, z)$ върху гладката крива γ се дефинира чрез формулата

$$(16.2) \quad \int_{\gamma} f(x, y, z) ds = \int_0^l f(x(s), y(s), z(s)) ds, \quad l = \mu(\gamma) = s(\beta),$$

когато съществува интегралът в дясната страна на равенството.

Когато кривата γ е частично гладка, интегралът над γ се определя като сбор от интегралите по съставлящите гладки дъги.

Нека $\tau = \{s_k\}_{k=1}^n$ е едно интегрално деление на интервала $[0, l]$ и нека $\xi_k \in [s_{k-1}, s_k]$, $k = 1, 2, \dots, n$. Да означим $A_k = \mathbf{r}(s_k)$, $k = 0, 1, \dots, n$, ($A_0 = A$, $A_n = B$) $M_k = \mathbf{r}(\xi_k)$, $k = 1, 2, \dots, n$ (Рис. 16.2).

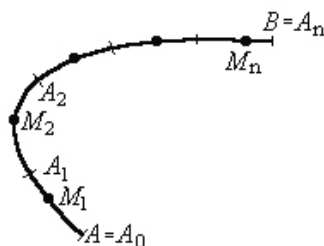


Рис. 16.2.

Тогава римановата интегрална сума за дясната страна от равенството (16.2) има вида

$$(16.3) \quad r(\varphi, \tau) = \sum_{k=1}^n f(M_k) \Delta s_k,$$

където $\Delta s_k = s_k - s_{k-1} = \mu(\gamma_k)$, се явява дължината на участъка γ_k от γ , между точките A_{k-1} и A_k , $k = 1, 2, \dots, n$. Интегралната сума (16.3) може да се схваща като образувана по следния начин. Извършваме (интегрално) деление на кривата γ на елементарни дъги $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n$ посредством точките на деление $A = A_0, A_1, A_2, \dots, A_n = B$, след което от всяка дъга γ_k избираме по една точка $M_k \in \gamma_k$, $k = 1, 2, \dots, n$, и сумираме величините $f(M_k) \mu(\gamma_k)$. По този начин става ясно, че криволинейният интеграл от първи род се определя независимо от начина на параметризация на γ , когато въпросната параметризация представя γ като гладка крива. От това тълкуване следват и някои механични приложения на този интеграл.

Например, ако разглеждаме γ като материална нишка с плътност на разпределение на масата $\rho(x, y, z)$, то масата на нишката се дава по формулата

$$M = \int_{\gamma} \rho ds,$$

а координатите на центъра на тежестта G ,

$$G_x = \frac{1}{M} \int_{\gamma} x \rho ds, \quad G_y = \frac{1}{M} \int_{\gamma} y \rho ds, \quad G_z = \frac{1}{M} \int_{\gamma} z \rho ds.$$

От формулата (16.2) следва и начина на пресмятане на интеграла. Нека гладката крива γ е зададена с параметрично уравнение $\gamma: \mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$, $\alpha \leq t \leq \beta$. Тогава като направим смяна на променливите $s = s(t)$, $\alpha \leq t \leq \beta$, отчитайки връзката (16.1), получаваме формулата

$$(16.4) \quad \int_{\gamma} f(x, y, z) ds = \int_{\alpha}^{\beta} f(x(t), y(t), z(t)) \sqrt{\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t) + \dot{z}^2(t)} dt.$$

Дотук формално разгледахме случая на пространствена крива. Криволинейни интегрални от първи род се дефинира за **равнинна крива** по напълно аналогичен начин. За да получим съответните определения и свойства е достатъчно в разсъжденията да отстраним изразите, касаещи третата променлива z .

Например да пресметнем интеграла

$$I = \int_{\gamma} xy ds,$$

където кривата γ е частта от окръжността $x^2 + y^2 = 4$, разположена в първи квадрант (Рис. 16.3).

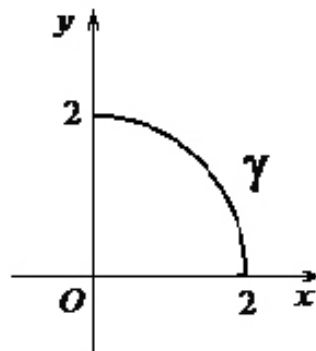


Рис. 16.3.

Тук можем да представим параметрично γ както следва,

$$\gamma : \begin{cases} x = 2 \cos t \\ y = 2 \sin t \\ 0 \leq t \leq \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

По формулата (16.4) пресмятаме

$$I = \int_0^{\pi/2} 4 \cos t \sin t \sqrt{4 \cos^2 t + 4 \sin^2 t} dt = 8 \int_0^{\pi/2} \cos t \sin t dt = 4.$$

Криволинейният интеграл от първи род е непосредствено обобщение на определения интеграл на функция на една променлива и притежава всички характерни свойства на интеграла. И тук, когато $f(x, y, z) \equiv 1$, стойността на интеграла е равна на мярката на множеството, над което се интегрира,

$$\int_{\gamma} ds = \mu(\gamma).$$

Верността на тази формула следва веднага от определенията на интеграла и дължина на крива.

Линейност. Интегралът от линейната комбинация е равен на съответната линейна комбинация от интеграли, ако $f = \lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 + \dots + \lambda_n f_n$, то

$$\int_{\gamma} f ds = \lambda_1 \int_{\gamma} f_1 ds + \lambda_2 \int_{\gamma} f_2 ds + \dots + \lambda_n \int_{\gamma} f_n ds.$$

Адитивност. Ако гладката или частично гладката крива $\gamma = \gamma_1 \gamma_2 \dots \gamma_n$ е композиция на такива криви $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n$, където началото на γ_2 съвпада с края на γ_1 , и т.н., то

$$\int_{\gamma} f ds = \int_{\gamma_1} f ds + \int_{\gamma_2} f ds + \dots + \int_{\gamma_n} f ds.$$

Позитивност. Ако функцията f е положителна над γ , то

$$\int_{\gamma} f(x, y, z) ds \geq 0.$$

Теорема за средните стойности. Нека $f(x, y, z)$ е непрекъснатата над γ , а функцията $g(x, y, z)$ не си сменя знака над γ . Тогава

$$\int_{\gamma} f(x, y, z) g(x, y, z) ds = f(\xi, \eta, \zeta) \int_{\gamma} g(x, y, z) ds,$$

за някоя точка $(\xi, \eta, \zeta) \in \gamma$. Когато $g(x, y, z) \equiv 1$, получаваме

$$\int_{\gamma} f(x, y, z) ds = f(\xi, \eta, \zeta) \mu(\gamma),$$

за някоя точка $(\xi, \eta, \zeta) \in \gamma$.

Оценка на интеграла. Нека за някои константи m, M и C да бъде изпълнено $m \leq f(x, y, z) \leq M$ и $|f(x, y, z)| \leq C$, за всяко $(x, y, z) \in \gamma$. Тогава

$$m \mu(\gamma) \leq \int_{\gamma} f(x, y, z) ds \leq M \mu(\gamma) \quad \text{и} \quad \left| \int_{\gamma} f(x, y, z) ds \right| \leq C \mu(\gamma).$$

2. Криволинеен интеграл от втори род. Нека е дадена гладката крива γ с параметрично уравнение $\gamma: \mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$, $\alpha \leq t \leq \beta$, което в разгърнат вид изглежда по следния начин

$$(16.5) \quad \gamma: \begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \\ z = \chi(t) \\ \alpha \leq t \leq \beta \end{cases}$$

Параметризацията представя не само кривата като съвкупност от точки, а и задава върху нея **ориентация**, свързана с това как се обхожда кривата при нарастване на параметъра. От формулите (16.5) се подразбира, че началната точка на γ е $A = \mathbf{r}(\alpha)$, а крайната е $B = \mathbf{r}(\beta)$, при което с нарастване на параметъра t от левия край на интервала α до десния край β , текущата точка $M = \mathbf{r}(t)$ обхожда точките на γ , започвайки от A и свършвайки в B . На основа представянето (16.5), ориентацията може да бъде променена в противоположна например по следния начин

$$(16.6) \quad \gamma^{-1}: \begin{cases} x = \varphi(-t) \\ y = \psi(-t) \\ z = \chi(-t) \\ -\beta \leq t \leq -\alpha \end{cases}$$

Началната точка в (16.6) се задава при стойност на параметъра $t = -\beta$, което веднага се вижда, че отговаря на точката B от параметризацията (16.5), а крайната за стойност на параметъра $t = -\alpha$, което веднага се вижда, че отговаря на точката A от параметризацията (16.5). Символът γ^{-1} показва, че става дума за крива, която съвпада с γ като множество от точки но има противоположна на γ ориентация.

Във всяка точка от кривата $M = \mathbf{r}(t)$ може да се определи допирателен вектор

$$\dot{\mathbf{r}}(t) = \dot{x}(t)\mathbf{i} + \dot{y}(t)\mathbf{j} + \dot{z}(t)\mathbf{k} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\mathbf{r}(t + \Delta t) - \mathbf{r}(t)}{\Delta t}$$

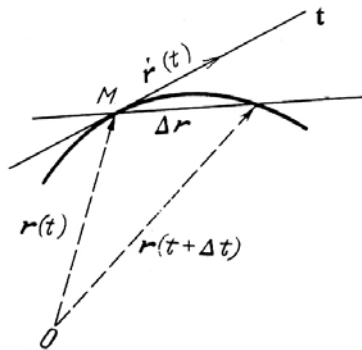


Рис. 16.4.

и **единичен** допирателен вектор

$$\boldsymbol{\tau} = \frac{\dot{\mathbf{r}}}{|\dot{\mathbf{r}}|} = \frac{\dot{x}}{|\dot{\mathbf{r}}|}\mathbf{i} + \frac{\dot{y}}{|\dot{\mathbf{r}}|}\mathbf{j} + \frac{\dot{z}}{|\dot{\mathbf{r}}|}\mathbf{k}.$$

Допирателната права в точката \mathbf{r}_0 има уравнение $\mathbf{t}: \mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + t\boldsymbol{\tau}_0$, $t \in \mathbb{R}$.

Когато във всяка точка $M(x, y, z)$ на едно множество E е определен вектор $\mathbf{F} = P\mathbf{i} + Q\mathbf{j} + R\mathbf{k}$, то се казва, че в E е зададено **векторно поле** с координати $P = P(x, y, z)$, $Q = Q(x, y, z)$ и $R = R(x, y, z)$. Ако върху ориентираната гладка крива γ е

зададено векторното поле $\mathbf{F}(P, Q, R)$, то можем да образуваме скаларното произведение (Рис. 16.5)

$$\mathbf{F}\boldsymbol{\tau} = P \frac{\dot{x}}{|\dot{\mathbf{r}}|} + Q \frac{\dot{y}}{|\dot{\mathbf{r}}|} + R \frac{\dot{z}}{|\dot{\mathbf{r}}|}.$$

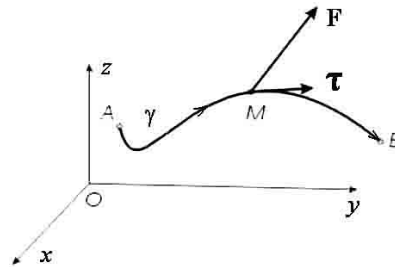


Рис. 16.5.

Определение 16.2. Криволинеен интеграл от втори род от векторното поле \mathbf{F} върху гладката крива γ се нарича криволинейният интеграл от първи род от скаларното произведение $\mathbf{F}\boldsymbol{\tau}$,

$$(16.7) \int_{\gamma} \mathbf{F}\boldsymbol{\tau} ds.$$

Когато кривата γ е частично гладка, интегралът над γ се определя като сбор от интегралите по съставлящите гладки дъги.

След познатата смяна на променливата $s = s(t)$, $\alpha \leq t \leq \beta$, отчитайки, че $|\dot{\mathbf{r}}| = \dot{s}$, интегралът от (16.7) приема вида

$$(16.8) \int_{\gamma} \mathbf{F}\boldsymbol{\tau} ds = \int_{\alpha}^{\beta} [P\dot{x} + Q\dot{y} + R\dot{z}] dt = \int_{\alpha}^{\beta} P\dot{x} dt + \int_{\alpha}^{\beta} Q\dot{y} dt + \int_{\alpha}^{\beta} R\dot{z} dt,$$

което дава основание да запишем криволинейният интеграл от втори род във формата

$$\int_{\gamma} \mathbf{F}\boldsymbol{\tau} ds = \int_{\gamma} P dx + Q dy + R dz = \int_{\gamma} \mathbf{F} d\mathbf{r},$$

където $\mathbf{F} d\mathbf{r}$ е скаларното произведение на полето $\mathbf{F} = (P, Q, R)$ с вектора на диференциалите $d\mathbf{r} = (dx, dy, dz)$.

Формулата (16.8) предлага начин за пресмятане на интеграла при всяка гладка параметризация на кривата γ . Например да разгледаме интеграла

$$I = \int_{\gamma} -y dx + x dy + z dz,$$

където γ е винтовата линия

$$\gamma: \begin{cases} x = a \cos t \\ y = a \sin t \\ z = bt \\ 0 \leq t \leq 2\pi \end{cases}$$

Съгласно формулата (16.8) пресмятаме

$$I = \int_0^{2\pi} [a^2 \sin^2 t + a^2 \cos^2 t + b^2 t] dt = 2\pi a^2 + 2b^2 \pi^2.$$

От определението следва физическото тълкуване на интеграла, свързано с работата която извършва дадена сила \mathbf{F} при преместване на материална точка по кривата γ от началната към крайната точка. Криволинейният интеграл от втори род е **линеен** и **адитивен**, но за разлика от интеграла от първи род, **зависи от**

ориентацията на кривата γ . Ако сменим ориентацията на γ , то допирателният вектор си променя посоката, $\tau_{\gamma^{-1}} = -\tau_{\gamma}$, следователно интегралът си променя знака,

$$\int_{\gamma} \mathbf{F} d\mathbf{r} = - \int_{\gamma^{-1}} \mathbf{F} d\mathbf{r}.$$

3. Формула на Грийн. В този раздел ще разглеждаме равнинни криволинейни интегралите от втори род

$$\int_{\gamma} \mathbf{F} d\mathbf{r} = \int_{\gamma} P(x, y) dx + Q(x, y) dy,$$

където $\mathbf{F} = (P, Q)$, $d\mathbf{r} = (dx, dy)$. Ще разглеждаме само гладки или частично гладки криви. Кривата $\gamma: \mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$, $\alpha \leq t \leq \beta$, се нарича **проста**, когато няма точки на самопресичане и **затворена**, когато крайната и началната точка съвпадат. Съвпадението на началната и крайната точка не се счита за самопресичане. Когато кривата е едновременно проста и затворена, се нарича **жорданова**. Една жорданова крива γ разделя равнината на две области по очевиден признак (Рис. 16.6).

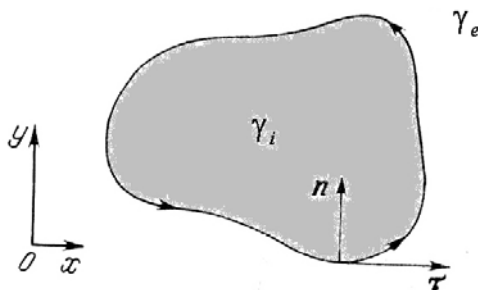


Рис. 16.16.

Едната област γ_i се нарича **вътрешност** на кривата, а другата γ_e се нарича **външност** на кривата. По този начин $\mathbb{R}^2 = \gamma \cup \gamma_i \cup \gamma_e$, което е съдържанието на една важна и изненадващо сложна за (строго) доказване **теорема на Жордан**. На рис. 16.6, вътрешността γ_i е оцветена в сиво. Жордановите криви ще предполагаме положително ориентирани, освен ако изрично не е указано противното, което означава движение на текущата точка при нарастване на параметъра в посока обратна на въртенето на часовниковата стрелка. При положителна ориентация на γ , единичният нормален вектор \mathbf{n} към γ (който образува заедно с допирателния вектор τ дясна локална координатна система) е насочен към вътрешността на кривата (Рис. 16.6).

Ориентацията на една крива е относително понятие и зависи от ориентацията на координатната система. На рис. 16.6 кривата γ е положително ориентирана, понеже самата координатна система Oxy се разглежда като положително ориентирана.

Област $D \subset \mathbb{R}^2$ се нарича отворено и линейно свързано множество, а затворена област $\bar{D} = D \cup \partial D$ се нарича обединението на областта с нейната граница. Ако областта представлява вътрешност на дадена жорданова крива γ , $D = \gamma_i$, то нейната граница е самата крива, $\partial D = \gamma$. Векторното поле $\mathbf{F}(P, Q)$ се нарича **гладко** в множеството E , когато координатните функции $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ имат непрекъснати частни производни в някакво отворено множество, което съдържа E . Символът \oint означава, че интегралът е по затворена крива.

Теорема 16.1 (Грийн). Нека γ е жорданова крива с вътрешност областта D и нека векторното поле $\mathbf{F}(P, Q)$ е гладко в затворената област $\bar{D} = D \cup \gamma$. Тогава е в сила равенството (**формула на Грийн**)

$$(16.9) \quad \oint_{\gamma} Pdx + Qdy = \iint_D \left[\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right] dx dy.$$

Доказателство. Доказателството ще проведем само за области D , които могат да се представят като крайно обединение от криволинейни трапеци от вида

$$(16.10) \quad \left. \begin{array}{l} a \leq x \leq b \\ \varphi(x) \leq y \leq \psi(x) \end{array} \right\}$$

и като крайно обединение на криволинейни трапеци от вида

$$(16.11) \quad \left. \begin{array}{l} c \leq y \leq d \\ \varphi(y) \leq x \leq \psi(y) \end{array} \right\}$$

Да разгледаме отначало случая когато $Q(x, y) \equiv 0$. Тогава (16.9) се свежда до

$$(16.12) \quad \oint_{\gamma} P(x, y) dx = - \iint_D \frac{\partial P(x, y)}{\partial y} dx dy.$$

Да предположим отначало, че областта D е криволинейния трапец (16.10) (Рис. 16.7). В този случай контурът γ се състои от четири дъги, $\gamma : PQ \cup QR \cup RS \cup SP$.

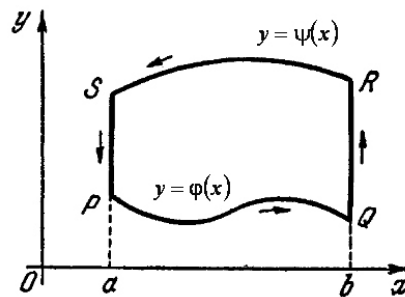


Рис. 16.7.

За дъгите PQ и $SR = RS^{-1}$ имаме следната параметризация $y = \psi(x)$

$$PQ: \begin{cases} x = x \\ y = \varphi(x) \end{cases} \text{ и } RS^{-1}: \begin{cases} x = x \\ y = \psi(x) \end{cases} \\ a \leq x \leq b \quad a \leq x \leq b$$

а по вертикалните дъги QR и SP имаме $dx = 0$, следователно

$$\int_{QR} P(x, y) dx = \int_{SP} P(x, y) dx = 0,$$

откъдето за интеграла в лявата страна на (16.12) намираме

$$(16.13) \quad \begin{aligned} \oint_{\gamma} P(x, y) dx &= \int_{PQ} P(x, y) dx + \int_{QR} P(x, y) dx + \int_{RS} P(x, y) dx + \int_{SP} P(x, y) dx = \\ &= \int_{PQ} P(x, y) dx - \int_{SR} P(x, y) dx = \int_a^b P(x, \varphi(x)) dx - \int_a^b P(x, \psi(x)) dx \end{aligned}$$

От друга страна съгласно правилото за свеждане на двойния интеграл към повторен имаме

$$\begin{aligned}
-\iint_D \frac{\partial P(x, y)}{\partial y} dx dy &= -\int_a^b \left[\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} \frac{\partial P(x, y)}{\partial y} dy \right] dx = -\int_a^b \left[P(x, y) \Big|_{\varphi(x)}^{\psi(x)} \right] dx = \\
&= -\int_a^b [P(x, \psi(x)) - P(x, \varphi(x))] dx = \int_a^b P(x, \varphi(x)) dx - \int_a^b P(x, \psi(x)) dx
\end{aligned}$$

което заедно с (16.13) доказва верността на формулата (16.12) в този случай. В общия случай областта D по предположение може да се представи като крайно обединение на криволинейни трапеци, както е показано например на рис. 16.8.

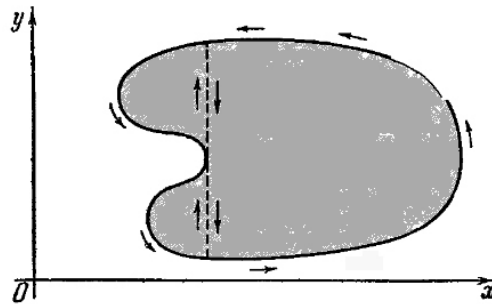


Рис. 16.8.

Тук верността на (16.12) се получава след прилагане адитивното свойство както на криволинейния интеграл от втори род така и на двойния интеграл, отчитайки, че криволинейните интеграли по допълнителните дъги взаимно се съкращават.

Разсъждавайки по аналогичен начин намираме, че

$$(16.14) \oint_{\gamma} Q(x, y) dy = \iint_D \frac{\partial Q(x, y)}{\partial x} dx dy.$$

Сега за да получим доказателство на теоремата е достатъчно да съберем почленно формулите (16.12) и (16.14). ■

Формулата (16.9) може да се използва например за намиране лица на области. Ако положим $Q = x$ и $P \equiv 0$, то (16.9) дава

$$\oint_{\gamma} x dy = \iint_D dx dy = \mu(D).$$

Аналогично полагайки $P = -y$ и $Q \equiv 0$, получаваме друга формула

$$\oint_{\gamma} -y dx = \iint_D dx dy = \mu(D), \text{ и т.н.}$$

4. Независимост на интеграла от пътя. Формулата на Грийн е валидна при значително по-обща предположения за областта D и кривата γ . Например нека областта D е между кривите γ_1 и γ_2 , както е показано на рис. 16.9.

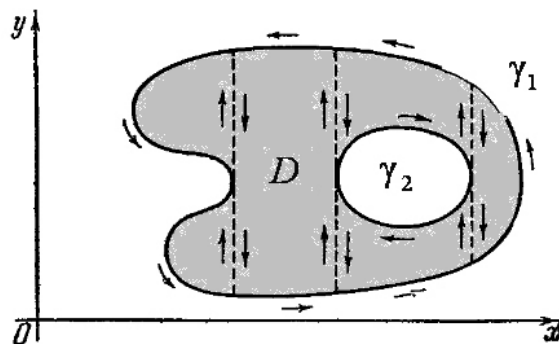


Рис. 16.9.

Границата на тази област се състои от обединението на γ_1 и γ_2 , $\gamma = \partial D = \gamma_1 \cup \gamma_2$. Да разделим D на криволинейни трапеци, както е показано на рисунката и да приложим за всеки елементарен трапец формулата на Грийн. Тогава криволинейните интеграли по допълнителните контури се съкращават и в крайна сметка получаваме отново равенството (16.9). Тук кривата γ_1 е положително ориентирана, а γ_2 е отрицателно ориентирана.

В рис. 16.9 обаче областта D не е едносвързана. Една област $D \subset \mathbb{R}^2$ се нарича **едносвързана**, когато заедно с всяка своя жорданова крива $\gamma \subset D$, съдържа и нейната вътрешност, $\gamma_i \subset D$.

Нека диференциалната форма $Pdx + Qdy$ е породена от пълния диференциал на някаква гладка функция, $dU = Pdx + Qdy$, което означава, че $U'_x = P$ и $U'_y = Q$. Тогава криволинейният интеграл от втори род по кривата $\gamma: \mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$, $\alpha \leq t \leq \beta$, не зависи от вида на кривата а само от началната и крайната точка, понеже

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} Pdx + Qdy &= \int_{\gamma} U'_x dx + U'_y dy = \\ &= \int_{\alpha}^{\beta} [U'_x(x(t), y(t))\dot{x}(t) + U'_y(x(t), y(t))\dot{y}(t)] dt = \int_{\alpha}^{\beta} dU(x(t), y(t)) dt = \\ &= U(x(t), y(t)) \Big|_{\alpha}^{\beta} = U(x(\beta), y(\beta)) - U(x(\alpha), y(\alpha)) \end{aligned}$$

В този случай функцията $U(x, y)$ се нарича **потенциал** на формата $Pdx + Qdy$ или още потенциал на векторното поле $\mathbf{F}(P, Q)$. Например да пресметнем интеграла

$$I = \int_{\gamma} ydx + xdy,$$

където γ е гладка крива с начална точка $M_0(0,0)$ и крайна $M_1(1,2)$. Тук диференциалната форма $ydx + xdy$ е пълен диференциал на функцията $U = xy$, следователно

$$I = xy \Big|_{(0,0)}^{(1,2)} = 1 \cdot 2 - 0 \cdot 0 = 2.$$

Ако формата има потенциал, $Pdx + Qdy = dU$, то интегралът по всяка затворена крива е нула, понеже стойността на U в началната и крайната точка (които съвпадат) е една и съща.

Твърдение 16.1. Нека $D \subset \mathbb{R}^2$ е област, а функциите $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ са непрекъснати в D . Тогава криволинейният интеграл

$$\int_{\gamma} Pdx + Qdy$$

не зависи от вида на кривата $\gamma \subset D$, а само от началната и от крайната точки, тогава и само тогава, когато диференциалната форма $Pdx + Qdy$ има потенциал, което означава, че съществува някаква гладка в D функция $U(x, y)$, за която $U'_x(x, y) = P(x, y)$ и $U'_y(x, y) = Q(x, y)$, за всяко $(x, y) \in D$.

Доказателство. Остава да покажем, че ако интегралът не зависи от вида на кривата, то съществува функция $U(x, y)$ с описаните свойства. Да фиксираме една точка $M_0(x_0, y_0) \in D$ и да положим

$$U(x, y) = \int_{\gamma} Pdx + Qdy = \int_{M_0}^M Pdx + Qdy,$$

където γ е коя да е частично гладка крива с начало в точката M_0 и край в точката $M(x, y)$. По предположение интегралът не зависи по пътя, следователно даденото определение за $U(x, y)$ е коректно. Тогава съгласно адитивното свойство на интеграла за диференчното частно намираме

$$(16.15) \frac{U(x + \Delta x, y) - U(x, y)}{\Delta x} = \frac{1}{\Delta x} \int_J P dx + Q dy,$$

където J е отсечката с начална точка (x, y) и крайна точка $(x + \Delta x, y)$. Тази отсечка има следното параметрично представяне

$$J: \begin{cases} x \rightarrow x + t\Delta x \\ y \rightarrow y \\ 0 \leq t \leq 1 \end{cases}$$

Тук $dx = \Delta x dt$ и $dy = 0$. Сега като заместим в (16.15) намираме

$$\frac{U(x + \Delta x, y) - U(x, y)}{\Delta x} = \int_0^1 P(x + t\Delta x, y) dt,$$

от което съгласно теоремата за средните стойности, получаваме

$$\frac{U(x + \Delta x, y) - U(x, y)}{\Delta x} = P(x + \xi\Delta x, y), \quad \xi \in (0, 1),$$

следователно

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{U(x + \Delta x, y) - U(x, y)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} P(x + \xi\Delta x, y) = P(x, y).$$

Последното по определение означава, че $U'_x(x, y) = P(x, y)$. Аналогично се доказва, че $U'_y(x, y) = Q(x, y)$. ■

Като диференцираме равенството $U'_x(x, y) = P(x, y)$ по променливата y получаваме $U''_{xy}(x, y) = P'_y(x, y)$, а като диференцираме равенството $U'_y(x, y) = Q(x, y)$ по променливата x получаваме $U''_{yx}(x, y) = Q'_x(x, y)$. Следователно, ако интегралът не зависи от пътя, то по необходимост навсякъде в областта е налице равенството

$$(16.16) Q'_x(x, y) = P'_y(x, y).$$

Може да се докаже, че условието за независимост на интеграла от пътя е еквивалентно на условието интегралът да бъде равен на нула по всяка затворена (частично гладка) крива. Последното заключени е интуитивно ясно поради следните съображения. Нека γ_1 и γ_2 са две криви с общо начало и общ край. Тогава кривата $\gamma = \gamma_1\gamma_2^{-1}$ е затворена, а от свойствата на интеграла имаме

$$(16.17) \oint_{\gamma} P dx + Q dy = \int_{\gamma_1} P dx + Q dy - \int_{\gamma_2} P dx + Q dy.$$

Ако интегралът по всяка затворена крива е равен на нула, то ще бъде равен на нула в частност и по кривата $\gamma = \gamma_1\gamma_2^{-1}$, следователно от (16.17) намираме

$$\int_{\gamma_1} P dx + Q dy = \int_{\gamma_2} P dx + Q dy,$$

което означава, че стойността на интеграла е една и съща по двата пътя γ_1 и γ_2 . Да предположим сега, че интегралът не зависи от пътя и нека γ е някаква затворена частично гладка крива. Да изберем две различни точки $M_1 \in \gamma$ и $M_2 \in \gamma$. Тези две точки разделят затворената крива γ на две криви γ_1 и γ_2 с общо начало в точката M_1 и общ

край в точката M_2 , а самата крива γ според нейната ориентация може да се запише във вида $\gamma = \gamma_1\gamma_2^{-1}$ или $\gamma = \gamma_2\gamma_1^{-1}$. Понеже интегралът по предположение не зависи от пътя, имаме

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{\gamma_1} Pdx + Qdy - \int_{\gamma_2} Pdx + Qdy = \\ &= \int_{\gamma_1} Pdx + Qdy + \int_{\gamma_2^{-1}} Pdx + Qdy = \int_{\gamma_1\gamma_2^{-1}} Pdx + Qdy = \oint_{\gamma} Pdx + Qdy \end{aligned}$$

Да се върнем към необходимото условие (16.16) за независимост на интеграла от пътя. В случая на едносвързана област това условие е и достатъчно.

Теорема 16.2. Нека $D \subset \mathbb{R}^2$ е *едносвързана* област, а функциите $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ имат непрекъснати частни производни в D . В такъв случай криволинейният интеграл

$$\int_{\gamma} Pdx + Qdy$$

не зависи от пътя $\gamma \subset D$ тогава и само тогава, когато

$$Q'_x(x, y) = P'_y(x, y),$$

за всяко $(x, y) \in D$. ■

Теорема 16.2 и твърдение 16.1 откриват пред нас следната задача за *възстановяване на функция по известен пълен диференциал*. Ако $D \subset \mathbb{R}^2$ е едносвързана област и функциите $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ имат непрекъснати частни производни в D , то да се намери функция $U(x, y)$ такава, че

$$dU(x, y) = P(x, y)dx + Q(x, y)dy, \quad U'_x(x, y) = P(x, y), \quad U'_y(x, y) = Q(x, y).$$

Съгласно доказателството на твърдение 16.1, една такава функция може да се намери по формулата

$$U(x, y) = \int_{M_0}^M Pdx + Qdy,$$

където интегралът се взема по една (коя да е) частично гладка крива с начало във фиксираната точка $M_0(x_0, y_0)$ и край в текущата точка $M(x, y)$. Съществуват и други начини за търсене на $U(x, y)$ чрез техниката на неопределения интеграл.