

ЛИНЕЙНА АЛГЕБРА И АНАЛИТИЧНА ГЕОМЕТРИЯ 2015 септ

Внимание: „ a “ е цяло положително число съответстващо на последната цифра от факултетния ви номер.

I. Пресметнете следната детерминанта:

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & a & 3 \\ 0 & 2 & -1 & 1 \end{vmatrix}$$

II. Да се реши системата:

$$\begin{cases} x + 5ay + z = 2 \\ 2x - y + z = 3 \\ 5x + 2y + az = a + 5 \end{cases}$$

При какви стойности на a системата няма решение?

III. Дадени са векторите $\vec{A} = (2a, -5\lambda, 3)$ и $\vec{B} = (2\lambda, 2, -a)$. При какви стойности на параметъра λ е изпълнено условието :

- 1) Векторите \vec{A} и \vec{B} са перпендикулярни $\vec{A} \perp \vec{B}$.
- 2) Векторите \vec{A} и \vec{B} са колинерани $\vec{A} \parallel \vec{B}$.

IV. Да се намери ъгъла между правите g и q зададени чрез уравненията:

$$g: x + (a+1)y + 1 = 0 \quad \text{и} \quad q: \frac{x-5}{a+1} = 1-y$$

V. Да се намери разстоянието от точка $M(0, -3a)$ до правата $g: x - y + 4 = 0$.

VI. Да се намери вектор \vec{A} , който е перпендикулярен на равнината σ , т.е. $(\vec{A} \perp \sigma)$, която минава през следните три точки $P_1(1, a, 3)$, $P_2(3, -1, 1)$, и $P_3(4, -1, 2)$.

Всяка вярно решена задача носи 10 точки.

Общо 60 т

РЕШЕНИЯ

I. Детерминантата е

$$\det = 4a + 21$$

II. Решенията на системата са

$$\{x = 1; y = 0; z = 1\}$$

Системата е несъвместима за

$$-10a^2 + 24a + 7 = 0, \text{ т.е за } a = -0.2669, a = 2.6629$$

III. За да се изпълни условието $\vec{A} \perp \vec{B}$ трябва

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = 0 \Rightarrow 4a\lambda - 10\lambda - 3a = 0 \Rightarrow \lambda = \frac{3a}{4a-1}$$

За да се изпълни условието $\vec{A} \parallel \vec{B}$ трябва

$$\vec{A} \times \vec{B} = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2a & -5\lambda & 3 \\ 2\lambda & 2 & -a \end{vmatrix} = 0$$

, т.е

$5\lambda a - 6 = 0, 6\lambda - 2a^2 = 0, 4a + 10\lambda^2 = 0$, т.е едновременно трябва
 $\lambda = 6 / (5a), \lambda = a^2 / 3, \lambda^2 = -4a / 10$, т.е не съществува такава λ за
 целочислени положителни стойности на a , т.е $\lambda \in \emptyset$.

IV. Нормалните уравнения на правите са

$$g: x + (a+1)y + 1 = 0 \text{ и } q: x + (a+1)y - (a+6) = 0$$

$$\cos \varphi = \frac{1 \cdot 1 + (a+1)(a+1)}{\sqrt{1^2 + (a+1)^2} \cdot \sqrt{1^2 + (a+1)^2}} = 1, \text{ т.е } g \parallel q$$

V. Уравнението на правата

$$l: \frac{x-0}{1} = \frac{y+3a}{-1}, \text{ минаваща през т. } M(0, -2a) \text{ и } \perp g: x - y + 4$$

$$M_2 = \left(-2 - \frac{3}{2}a, 2 - \frac{3}{2}a\right)$$

им точка е . Разстоянието е

$$d = \sqrt{(0 - (-2 - 3a/2))^2 + (-3a - (2 - 3a/2))^2} = (3a/2 + 2)\sqrt{2}$$

VI. Векторът минаващ през трите точки е:

$$\vec{n} = (\vec{P}_1\vec{P}_2 \times \vec{P}_1\vec{P}_3) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -1-a & -2 \\ 3 & -1-a & -1 \end{vmatrix} = \{-(1+a), -4, 1+a\}$$

Уравнението на равнината е $-(1+a)x - 4y + (1+a)z + c = 0$