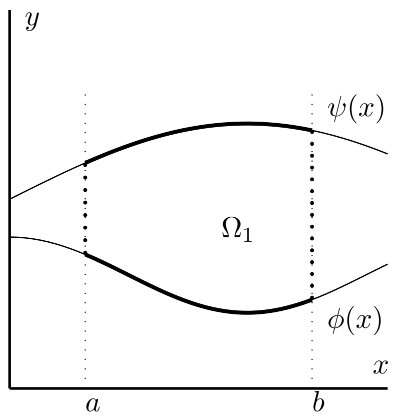
Глава 2

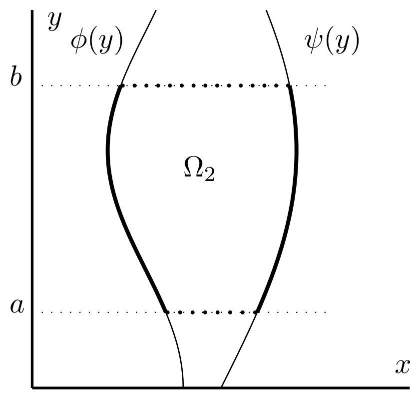
Двойни интеграли

1. Свеждане към повторен интеграл

Дефиниция 2.1. Нека функциите $\phi(x)$, и $\psi(x)$ са дефинирани и непрекъснати в интервала $[a,b]$ и нека $\phi(x) \le \psi(x)$ за всяко $x \in [a,b]$.



Фигура 2.1.



Фигура 2.2.

1. Множеството

$$\Omega_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, a \le x \le b,\ \phi(x) \le y \le \psi(x)\}$$

се нарича *криволинеен трапец* с основи успоредни на ординатата (вж. фигура 2.1).

2. Множеството

$$\Omega_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, a \le y \le b,\ \phi(y) \le x \le \psi(y)\}$$

се нарича *криволинеен трапец* с основи успоредни на абсцисата (вж. фигура 2.2).

Нека функцията $f : \Omega \to \mathbb{R}$ е дефинирана и непрекъсната в множеството Ω. Тогава:

1. Ако Ω е криволинеен трапец с основи успоредни на ординатата, то

$$\iint\limits_{\Omega} f(x,y)dxdy = \int\limits_a^b \left[\int\limits_{\phi(x)}^{\psi(x)} f(x,y)dy \right] dx. \tag{2.1}$$

2. Ако Ω е криволинеен трапец с основи успоредни на абсцисата, то

$$\iint\limits_{\Omega} f(x,y)dxdy = \int\limits_a^b \left[\int\limits_{\phi(y)}^{\psi(y)} f(x,y)dx \right] dy. \tag{2.2}$$

Забележка 2.1. Изразът $\int\limits_a^b \left[\int\limits_{\phi(x)}^{\psi(x)} f(x,y)dy \right] dx$ се записва и в следната форма: $\int\limits_a^b dx \int\limits_{\phi(x)}^{\psi(x)} f(x,y)dy$, т.е.

$$\iint\limits_{\Omega} f(x,y)dxdy = \int\limits_a^b dx \int\limits_{\phi(x)}^{\psi(x)} f(x,y)dy.$$

Аналогично:

$$\iint\limits_{\Omega} f(x,y)dxdy = \int\limits_a^b dy \int\limits_{\phi(y)}^{\psi(y)} f(x,y)dx.$$

Геометрична интерпретация. Лицето $S(\Omega)$ на множеството Ω е

$$S(\Omega) = \iint\limits_{\Omega} dxdy.$$

Свойства на двойните интеграли. Нека функциите $f = f(x,y)$ и $g = g(x,y)$ са дефинирани и непрекъснати в $\Omega \subset \mathbb{R}^2$.

1) Нека $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$ и $\Omega_1 \cap \Omega_2 = \emptyset$, тогава:

$$\iint\limits_{\Omega} f(x,y)dxdy = \iint\limits_{\Omega_1} f(x,y)dxdy + \iint\limits_{\Omega_2} f(x,y)dxdy.$$

В частност, ако $\Omega_1 \subseteq \Omega$ и $f(x,y) \geq 0$, $(x,y) \in \Omega$, то

$$\iint\limits_{\Omega_1} f(x,y)dxdy \leq \iint\limits_{\Omega} f(x,y)dxdy$$

2) Нека λ е реална константа, тогава:

$$\iint\limits_{\Omega} \lambda f(x,y)dxdy = \lambda \iint\limits_{\Omega} f(x,y)dxdy.$$

3) Валидно е равенството

$$\iint\limits_{\Omega} \big[f(x,y)+g(x,y)\big]dxdy = \iint\limits_{\Omega} f(x,y)dxdy + \iint\limits_{\Omega} g(x,y)dxdy.$$

4) Нека $f(x,y) \le g(x,y)$, за всяка точка $(x,y) \in \Omega$. Тогава

$$\iint\limits_{\Omega} f(x,y)dxdy \le \iint\limits_{\Omega} g(x,y)dxdy.$$

5) Валидно е неравенството

$$\left|\iint\limits_{\Omega} f(x,y)dxdy\right| \le \iint\limits_{\Omega} |f(x,y)|\, dxdy.$$

6) Нека $m \le f(x,y) \le M$, $m, M \in \mathbb{R}$, $(x,y) \in \Omega$ и лицето $S(\Omega)$ на множеството Ω е крайно число. Тогава

$$m\, S(\Omega) \le \iint\limits_{\Omega} f(x,y)dxdy \le M\, S(\Omega).$$

Задача 2.1. Представете аналитично множеството Ω (като криволинеен трапец или обединение на криволинейни трапеци), ако:

(1) Ω е ограничено от $x = 3$, $x = 5$, $3x - 2y + 4 = 0$ и $3x - 2y + 1 = 0$;

(2) Ω е ограничено от $x = 0$, $y = 0$ и $x + y = 2$;

(3) Ω е ограничено от $x^2 + y^2 = 1$, $x = 0$ и $y = 0$;

(4) Ω е ограничено от $x + y = 1$, $x - y = 1$ и $x = 0$;

(5) $\Omega = \{(x, y) :\ y \geq x^2,\ y \leq 4 - x^2\}$;

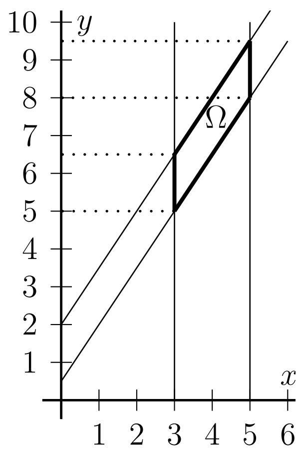
(6) $\Omega = \left\{(x, y) :\ \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} \leq 1\right\}$;

(7) $\Omega = \{(x, y) :\ (x - 2)^2 + (y - 3)^2 \leq 4\}$;

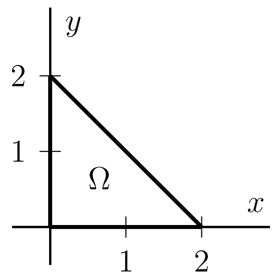
(8) Ω е ограничено от $y = x^2$ и $y = \sqrt{x}$;

(9) Ω е ограничено от $y = x$, $y = 2x$ и $x + y = 6$;

(10) Ω е ограничено от $y = x$, $y = x + 3$, $y = -2x + 1$ и $y = -2x + 5$.



Фигура 2.3.



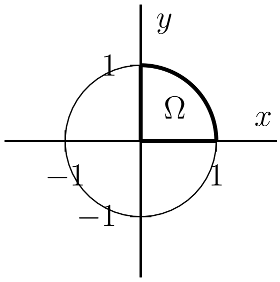
Фигура 2.4.

Отговори:

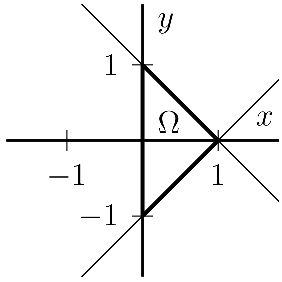
(1) $\Omega = \left\{(x, y) :\ 3 \leq x \leq 5,\ \frac{3x+1}{2} \leq y \leq \frac{3x+4}{2}\right\}$ (вж. фигура 2.3);

(2) $\Omega = \{(x, y) :\ 0 \leq x \leq 2,\ 0 \leq y \leq 2 - x\}$ (вж. фигура 2.4);

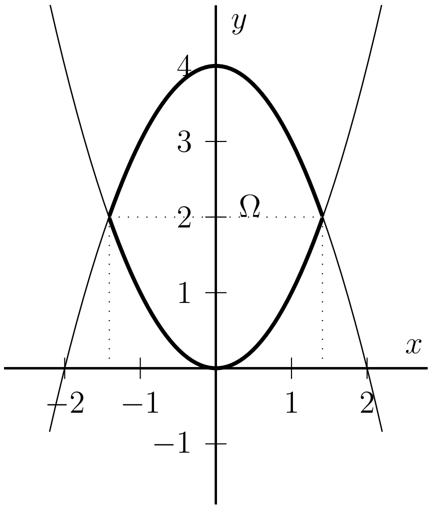
(3) $\Omega = \left\{(x, y) :\ 0 \leq x \leq 1,\ 0 \leq y \leq \sqrt{1 - x^2}\right\}$ (вж. фигура 2.5);



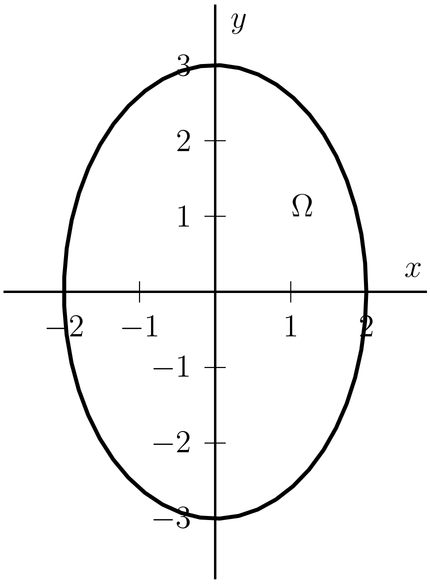
Фигура 2.5.



Фигура 2.6.



Фигура 2.7.



Фигура 2.8.

(4) $\Omega = \{(x,y):\ 0 \le x \le 1,\ x-1 \le y \le 1-x\}$ (вж. фигура 2.6);

(5) $\Omega = \left\{(x,y):\ -\sqrt{2} \le x \le \sqrt{2},\ x^2 \le y \le 4-x^2\right\}$ (вж. фигура 2.7);

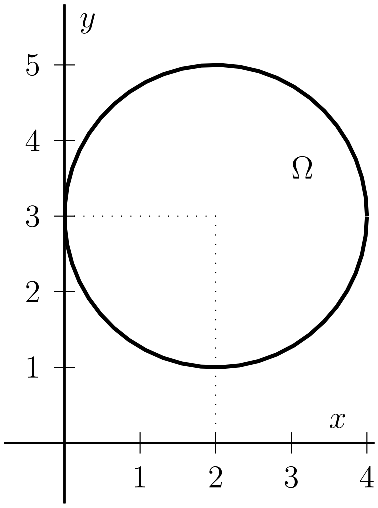
(6) $\Omega = \left\{(x,y):\ -2 \le x \le 2,\ -\frac{3}{2}\sqrt{4-x^2} \le y \le \frac{3}{2}\sqrt{4-x^2}\right\}$ (вж. фигура 2.8);

(7) $\Omega = \left\{(x,y):\ 0 \le x \le 4,\ 2-\sqrt{4x-x^2} \le y \le 3+\sqrt{4x-x^2}\right\}$ (вж. фигура 2.9);

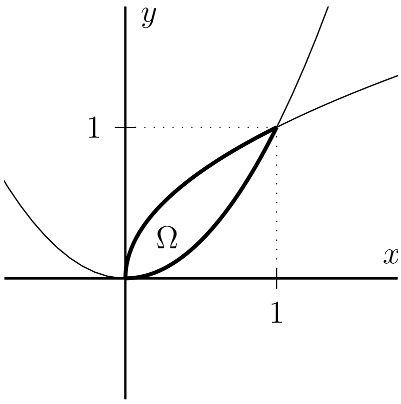
(8) $\Omega = \left\{(x,y):\ 0 \le x \le 1,\ x^2 \le y \le \sqrt{x}\right\}$ (вж. фигура 2.10);

(9) $\Omega = \{(x,y):\ 0 \le x \le 2,\ x \le y \le 2x\} \cup \{(x,y):\ 2 \le x \le 3,\ x \le y \le 6-x\}$;

(10) $\Omega = \left\{(x,y):\ -\frac{2}{3} \le x \le \frac{1}{3},\ 1-2x \le y \le x+3\right\} \cup$
$\left\{(x,y):\ \frac{1}{3} \le x \le \frac{2}{3},\ x \le y \le x+3\right\} \cup \left\{(x,y):\ \frac{2}{3} \le x \le \frac{5}{3},\ x \le y \le 5-2x\right\}$.



Фигура 2.9.

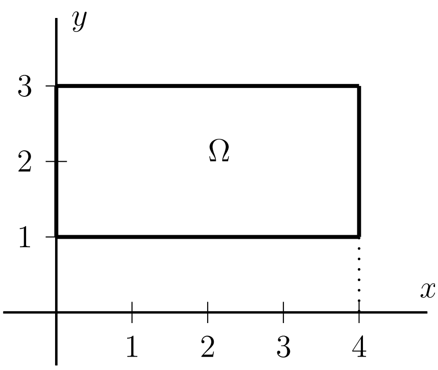


Фигура 2.10.

Пример 2.1. Да се пресметне

$$I = \iint\limits_{\Omega} y dx dy,$$

където $\Omega = \{(x, y) : \ 0 \leq x \leq 4, \ 1 \leq y \leq 3\}$ (вж. фигура 2.11).



Фигура 2.11.

Решение. Прилагаме формула (2.1):

$$I = \iint\limits_{\Omega} y dx dy = \int\limits_{0}^{4} dx \int\limits_{1}^{3} y dy = \int\limits_{0}^{4} \left[\int\limits_{1}^{3} y dy \right] dx$$

$$= \int\limits_{0}^{4} \left[\frac{y^2}{2} \Big|_{1}^{3} \right] dx = 4 \int\limits_{0}^{4} dx = 16. \qquad \square$$

Задача 2.2. Да се пресметнат интегралите:

(1) $J = \iint\limits_{\Omega} yx dx dy$, където $\Omega = \{(x, y): \ 1 \leq x \leq 2, \ 2 \leq y \leq 3\}$;

(2) $J = \iint\limits_{\Omega} (x + 2y) dx dy$,

където $\Omega = \{(x, y): \ 0 \leq x \leq 3, \ 1 \leq y \leq 2\}$;

(3) $J = \iint\limits_{\Omega} (x^3 + 1) y dx dy$,

където $\Omega = \{(x, y): \ 0 \leq x \leq 3, \ 0 \leq y \leq 2\}$;

(4) $J = \iint\limits_{\Omega} (x - 1)(y - 1) dx dy$,

където $\Omega = \{(x, y): \ 1 \leq x \leq 2, \ 2 \leq y \leq 3\}$;

(5) $J = \iint\limits_{\Omega} x(y + 1) dx dy$,

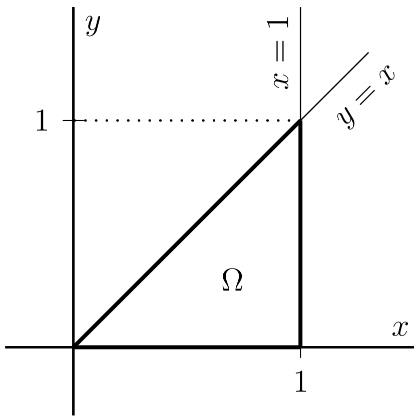
където $\Omega = \{(x, y): \ -1 \leq x \leq 2, \ -2 \leq y \leq 3\}$.

Отговори:
(1) $\frac{15}{4}$; (2) $\frac{93}{2}$; (3) $\frac{45}{8}$; (4) $\frac{3}{4}$; (5) $\frac{45}{4}$.

Пример 2.2. Да се пресметне интеграла

$$I = \iint\limits_{\Omega} xy dx dy,$$

където Ω е ограниченато множество с граница определена от правите $y = x$, $x = 1$ и $y = 0$ (вж. фигура 2.12).



Фигура 2.12.

Решение. Очевидно:

$$\Omega = \{(x, y) :\ 0 \leq x \leq 1,\ 0 \leq y \leq x\}.$$

Прилагаме формула (2.1):

$$I = \iint\limits_{\Omega} xydxdy = \int\limits_0^1 dx \int\limits_0^x xydy. \tag{$\star$}$$

Пресмятаме

$$\int\limits_0^x xydy = x\frac{y^2}{2}\Big|_{y=0}^{y=x} = x\left(\frac{x^2}{2}\right) = \frac{x^3}{2}.$$

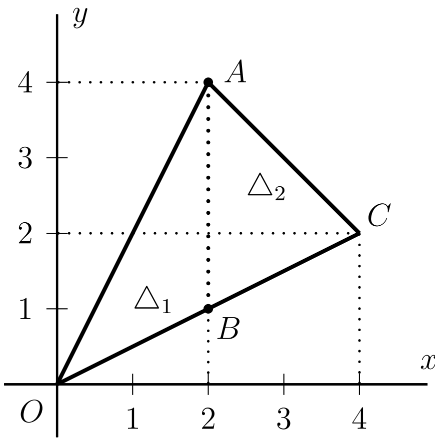
и заместваме във формула ($\star$):

$$I = \int\limits_0^1 dx \int\limits_0^x xydy = \int\limits_0^1 \frac{x^3}{2}dx\ \frac{x^4}{8}\Big|_{x=0}^{x=1} = \frac{1}{8}. \quad \square$$

Пример 2.3. Да се пресметне интеграла

$$I = \iint\limits_{\Omega} \frac{1}{(1+x+y)^2}dxdy$$

където множеството Ω е ограничено от правите $x = 2y$, $y = 2x$ и $x + y = 6$.



Фигура 2.13.

Решение. Триъгълникът Ω, ограничен от дадените прави, е изобразен на фигура 2.13. Отсечката AB разделя триъгълника Ω на два триъгълника $\triangle_1 = \triangle OAB$ и $\triangle_2 = \triangle BAC$. Тогава:

$$I = \iint\limits_{\triangle_1} \frac{1}{(1+x+y)^2} dxdy + \iint\limits_{\triangle_2} \frac{1}{(1+x+y)^2} dxdy.$$

Очевидно

$$\triangle_1 = \left\{ (x, y) :\ 0 \le x \le 2,\ \frac{x}{2} \le y \le 2x \right\}$$

и

$$\triangle_2 = \left\{ (x, y) :\ 2 \le x \le 4,\ \frac{x}{2} \le y \le 6 - x \right\}.$$

Използваме формула (2.1) и получаваме:

$$\iint\limits_{\triangle_1} \frac{1}{(1+x+y)^2} dxdy = \int\limits_0^2 dx \int\limits_{\frac{x}{2}}^{2x} \frac{1}{(1+x+y)^2} dy.$$

Но

$$\int\limits_{\frac{x}{2}}^{2x} \frac{1}{(1+x+y)^2}dy = \int\limits_{\frac{x}{2}}^{2x} \frac{1}{(1+x+y)^2}d(1+x+y)$$
$$= -\frac{1}{1+x+y}\Bigg|_{y=\frac{x}{2}}^{y=2x}.$$

Ето защо

$$\iint\limits_{\triangle_1} \frac{1}{(1+x+y)^2}dxdy = \int\limits_0^2 dx \int\limits_{\frac{x}{2}}^{2x} \frac{1}{(1+x+y)^2}dy$$
$$= \int_0^2 \left(-\frac{1}{1+x+y}\Bigg|_{y=\frac{x}{2}}^{y=2x} \right)$$
$$= \frac{2}{3}\ln\left(1+\frac{3x}{2}\right)\Bigg|_{x=0}^{x=2} - \frac{1}{3}\ln(1+3x)\Bigg|_{x=0}^{x=2}$$
$$= -\frac{1}{3}\ln 7 + \frac{2}{3}\ln 4.$$

Аналогично:

$$\iint\limits_{\triangle_2} \frac{1}{(1+x+y)^2}dxdy = \int\limits_2^4 dx \int\limits_{\frac{x}{2}}^{6-x} \frac{1}{(1+x+y)^2}dy$$
$$= -\frac{2}{7} + \frac{2}{3}\left(\ln\frac{7}{4}\right).$$

Следователно

$$I = \frac{1}{3}\ln 7 - \frac{2}{7}. \qquad \square$$

Задача 2.3. Да се пресметнат интегралите:

(1) $J = \iint\limits_{\Omega} x(y+1)dxdy,$
където $\Omega = \{(x,y):\ 0 \le x \le 2,\ 0 \le y \le x\};$

(2) $J = \iint\limits_{\Omega} xdxdy,$
където $\Omega = \{(x,y):\ 1 \le x \le 2,\ 0 \le y \le x\};$

(3) $J = \iint\limits_{\Omega} (x^2+1)y^2dxdy,$
където $\Omega = \{(x,y):\ 0 \le x \le 2,\ x \le y \le 2x\};$

(4) $J = \iint\limits_{\Omega} (x-1)(y+1)dxdy,$
където $\Omega = \{(x,y):\ 1 \le x \le 2,\ 2x \le y \le 3x\};$

(5) $J = \iint\limits_{\Omega} (y+1)dxdy,$
където $\Omega = \{(x,y):\ -1 \le x \le 3,\ 0 \le y \le 5-x\}.$

Отговори:
(1) $J = \frac{14}{3}$; (2) $J = \frac{7}{3}$; (3) $J = \frac{308}{9}$; (4) $J = \frac{35}{8}$; (5) $J = \frac{152}{2}$.

Пример 2.4. Да се пресметне интеграла

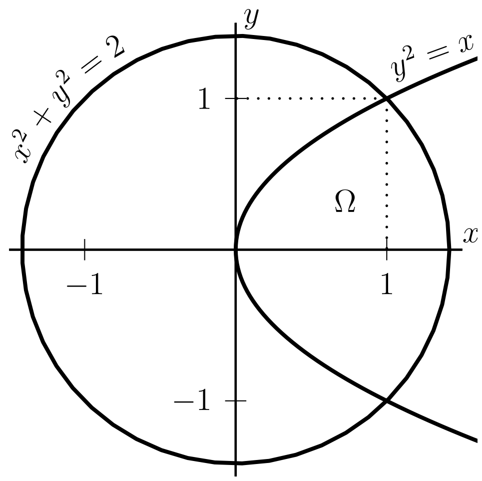
$$I = \iint\limits_{\Omega} ydxdy,$$

където множеството Ω е ограничено от кривите: $x^2 + y^2 = 2$, $y^2 = x$ и $y = 0$ $(x \ge 0,\ t \ge 0)$.

Решение. Множеството Ω е криволинеен трапец:

$$\Omega = \{(x,y):\ 0 \le y \le 1,\ y^2 \le x \le \sqrt{2-y^2}\},$$

и то е изобразено на фигура 2.14.



Фигура 2.14.

Прилагаме (2.2) и получаваме

$$I = \iint\limits_{\Omega} y dx dy = \int\limits_0^1 dy \int\limits_{y^2}^{\sqrt{2-y^2}} y dx = \int\limits_0^1 y dy \int\limits_{y^2}^{\sqrt{2-y^2}} dx$$

$$= \frac{1}{2}\int\limits_0^1 (2-y^2)^{\frac{1}{2}} dy^2 - \int\limits_0^1 y^3 dy$$

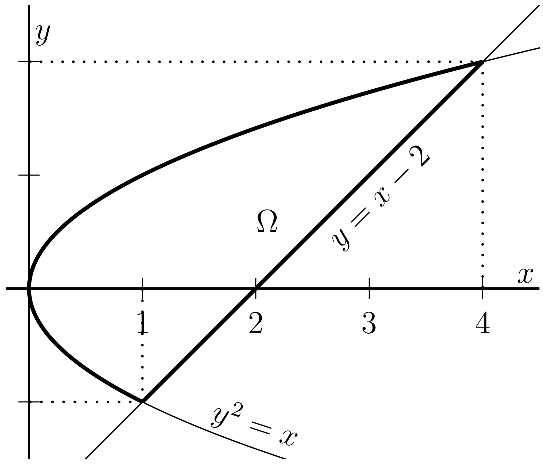
$$= -\frac{1}{3}\left(2-y^2\right)^{\frac{3}{2}}\Big|_{y=0}^{y=1} - \frac{y^4}{4}\Big|_{y=0}^{y=1}$$

$$= \int\limits_0^1 y\left(\sqrt{2-y^2}-y^2\right) dy = \frac{2}{3}\sqrt{2} - \frac{7}{12}. \qquad \square$$

Пример 2.5. Да разгледаме интеграла

$$I = \iint\limits_{\Omega} y^3 dx dy,$$

където множеството Ω е ограничено от кривите: $y^2 = x$ и $y = x - 2$ (вж. фигура 2.15).



Фигура 2.15.

Решение. Множеството Ω е криволинеен трапец с основи успоредни на абсцисата:

$$\Omega = \{(x,y): \ -1 \le y \le 2,\ y^2 \le x \le y+2\}.$$

Прилагаме (2.2) и получаваме

$$I = \iint\limits_{\Omega} y^3 dxdy = \int\limits_{-1}^{2} y^3 dy \int\limits_{y^2}^{y+2} dx$$

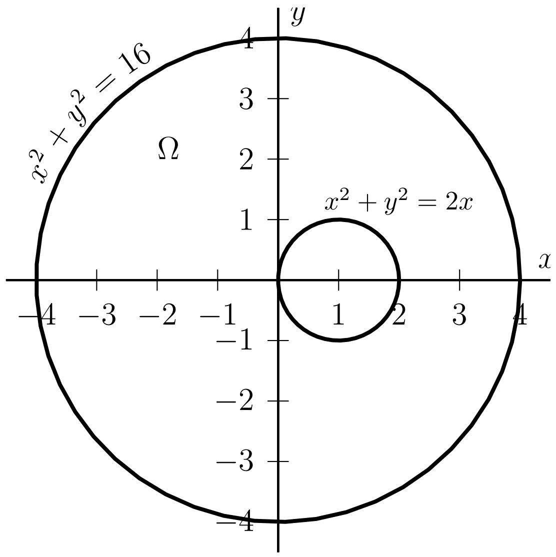
$$= \int\limits_{-1}^{2} y^3 \left(y+2-y^2\right) dy = \frac{18}{5}. \qquad \square$$

Пример 2.6. Да се пресметне интеграла

$$I = \iint\limits_{\Omega} xdxdy,$$

където множеството Ω е ограничено от кривите: $x^2+y^2 = 2x$ и $x^2+y^2 = 16$ (вж. фигура 2.16).

Решение. Множеството Ω може да бъде представено като разлика на кръга $\Omega_1:\ x^2+y^2 = 16$ и кръга $\Omega_2: x^2+y^2 = 2x$, т.е. $\Omega = \Omega_1 \setminus \Omega_2$,



Фигура 2.16.

където $\Omega_1 = \Omega \cup \Omega_2$ и $\Omega \cap \Omega_2 = \varnothing$. Ето защо

$$\iint\limits_{\Omega_1} xdxdy = \iint\limits_{\Omega} xdxdy + \iint\limits_{\Omega_2} xdxdy,$$

т.е.

$$I = \iint\limits_{\Omega} xdxdy = \iint\limits_{\Omega_1} xdxdy - \iint\limits_{\Omega_2} xdxdy.$$

Пресмятаме

$$J_1 = \iint\limits_{\Omega_1} xdxdy.$$

Очевидно

$$\Omega_1 = \{(x, y) : \ -4 \le y \le 4, \ -\sqrt{16 - y^2} \le x \le \sqrt{16 - y^2}\}.$$

Тогава

$$J_1 = \iint\limits_{\Omega_1} xdxdy = \int\limits_{-4}^{4} dy \int\limits_{-\sqrt{16-y^2}}^{\sqrt{16-y^2}} xdx = 0,$$

защото:

$$\begin{aligned}\int\limits_{-\sqrt{16-y^2}}^{\sqrt{16-y^2}} x dx = \frac{x^2}{2}\Bigg|_{x=-\sqrt{16-y^2}}^{x=\sqrt{16-y^2}} \\ &= \frac{1}{2}\left(\left(\sqrt{16-y^2}\right)^2 - \left(-\sqrt{16-y^2}\right)^2\right) \\ &= 0.\end{aligned}$$

Пресмятаме

$$J_2 = \iint\limits_{\Omega_2} x dx dy.$$

Очевидно

$$\Omega_2 = \{(x,y): \ -1 \le y \le 1,\ 1-\sqrt{1-y^2} \le x \le 1+\sqrt{1-y^2}\}.$$

Тогава

$$\begin{aligned}J_2 = &\iint\limits_{\Omega_2} x dx dy \\ &= \int\limits_{-1}^{1} dy \int\limits_{1-\sqrt{1-y^2}}^{1+\sqrt{1-y^2}} x dx \\ &= 2\int\limits_{-1}^{1} \sqrt{1-y^2} dy = \pi.\end{aligned}$$

Следователно $I = J_1 - J_2 = -\pi$. $\square$

Задача 2.4. Пресметнете интегралите:

(1) $I = \iint\limits_{\Omega} \frac{y}{x^2} dxdy$, където $\Omega = \{(x,y):\ 0 < x,\ x^3 \le y \le x^2\}$;

(2) $I = \iint\limits_{\Omega} x^2y^2 dxdy$,
където Ω е ограничена от кривите $x = y^2$ и $x = 1$;

(3) $I = \iint\limits_{\Omega} xy^2 dxdy$, където $\Omega = \{(x,y):\ x^2 + y^2 \le 1,\ x \ge 0\}$;

(4) $I = \iint\limits_{\Omega} e^{x-y} dxdy$,
където Ω е ограничена от правите $x = -1$, $x = 1$, $y = x$, $y = 2x$;

(5) $I = \iint\limits_{\Omega} (x+y) dxdy$, където $\Omega = \{(x,y):\ x^2 + y^2 \le 4,\ y \ge x\}$;

(6) $I = \iint\limits_{\Omega} xy dxdy$, където $\Omega = \{(x,y):\ x^2 + y^2 \le 25,\ 3x + y \ge 5\}$;

(7) $I = \iint\limits_{\Omega} x dxdy$,
където $\Omega = \{(x,y):\ x^2 + y^2 \le 2,\ x^2 - y^2 \le 1,\ x \ge 0,\ y \ge 0\}$;

(8) $I = \iint\limits_{\Omega} y dxdy$,
където $\Omega = \{(x,y):\ 0 \le y \le 6,\ x < 6,\ xy > 3,\ y - x - 2 < 0\}$;

(9) $I = \iint\limits_{\Omega} (2y - x) dxdy$,
където $\Omega = \{(x,y):\ y(y-x) \le 2,\ x(x+y) \le 3\}$;

(10) $I = \iint\limits_{\Omega} x^2y^2 dxdy$,
където $\Omega = \{(x,y):\ y > 0,\ xy < 1,\ x^2 - 3xy + 2y^2 < 0\}$.

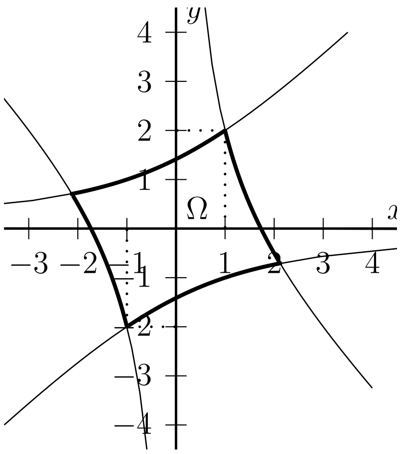
Упътване. (9) Ω е представена на фигура 2.17; (10) Ω е представена на фигура 2.18.

Отговори:
(1) $\frac{1}{15}$; (2) $\frac{4}{27}$; (3) $\frac{2}{15}$; (5) 0; (6) $\frac{135}{4}$; (7) $\frac{2}{\sqrt{2}}$; (8) $\frac{255}{4}$; (9) 0; (10) $\frac{\ln 2}{6}$.

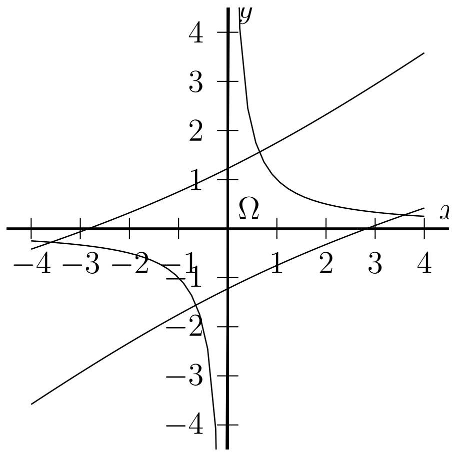
2. Смяна на променливите

Нека $\Omega_{(u,v)}$ е ограничено множество в $\mathbb{R}^2$ и нека

$$\Phi : \Omega_{(u,v)} \to \mathbb{R}^2, \qquad \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g(u,v) \\ h(u,v) \end{pmatrix}$$



Фигура 2.17.



Фигура 2.18.

е изображение от $\Omega_{(u,v)}$ в $\mathbb{R}^2$ такова, че:

(1) Изображението Φ е взаимно еднозначно.
(2) $g, h : \Omega_{(u,v)} \to \mathbb{R}$ са непрекъснато диференцируеми функции в $\Omega_{(u,v)}$.

Полагаме $\Omega_{(x,y)} = \Phi(\Omega_{(u,v)})$.

Дефиниция 2.2. Матрицата

$$\frac{\partial(g,h)}{\partial(u,v)} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial g(u,v)}{\partial u} & \dfrac{\partial g(u,v)}{\partial v} \\ \dfrac{\partial h(u,v)}{\partial u} & \dfrac{\partial h(u,v)}{\partial v} \end{pmatrix}$$

се нарича *Якобиян*[1] на изображението Φ.

Теорема 2.1 (Теорема за смяна на променливите)**.** *Нека* $f : \Omega_{(u,v)} \to \mathbb{R}$ *е непрекъсната функция и нека*

$$\frac{\partial(g,h)}{\partial(u,v)} \neq 0, \quad (u,v) \in \Omega_{(u,v)}.$$

Тогава

$$\iint\limits_{\Omega_{(x,y)}} f(x,y)dxdy = \iint\limits_{\Omega_{(u,v)}} f(g(u,v),h(u,v)) \left| \det \frac{\partial(g,h)}{\partial(u,v)} \right| dudv. \tag{2.3}$$

[1]Carl Gustav Jacob Jacobi (1804-1851)

$$\begin{tikzcd}
\Omega_{(x,y)} \arrow[r, "f"] & \mathbb{R} \\
\Omega_{(u,v)} \arrow[u, "\Phi"] \arrow[ur, "f\circ\Phi"'] &
\end{tikzcd}$$

Пример 2.7 (Полярни координати)**.** Нека

$$\Phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \qquad \left| \begin{array}{l} x = r\cos\alpha, \\ y = r\sin\alpha, \end{array} \right.$$

където $r > 0$, $\alpha \in [0, 2\pi)$.

Тогава:

$$\begin{aligned}
\det\frac{\partial(g,h)}{\partial(r,\alpha)} &= \det\begin{pmatrix} \dfrac{\partial g(x,y)}{\partial r} & \dfrac{\partial g(x,y)}{\partial \alpha} \\ \dfrac{\partial h(x,y)}{\partial r} & \dfrac{\partial h(x,y)}{\partial \alpha} \end{pmatrix} \\
&= \det\begin{pmatrix} \cos\alpha & -r\sin\alpha \\ \sin\alpha & r\cos\alpha \end{pmatrix} = r\cos^2\alpha + r\sin^2\alpha \\
&= r.
\end{aligned}$$

В този случай от формула (2.3) получаваме

$$\iint\limits_{\Omega_{(x,y)}} f(x,y)dxdy = \iint\limits_{\Omega_{(\alpha,r)}} f\big(r\cos\alpha, r\sin\alpha\big) r d\alpha dr. \tag{2.4}$$

Пример 2.8 (Обобщени полярни координати)**.** Нека

$$\Phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \qquad \left| \begin{array}{l} x = ar\cos^c\alpha, \\ y = br\sin^c\alpha, \end{array} \right.$$

където $r > 0$, $\alpha \in [0, 2\pi)$ а a, b и c са константи.

Тогава:

$$\det\frac{\partial(g,h)}{\partial(r,\alpha)} = \det\begin{pmatrix} \dfrac{\partial g(x,y)}{\partial r} & \dfrac{\partial g(x,y)}{\partial \alpha} \\ \dfrac{\partial h(x,y)}{\partial r} & \dfrac{\partial h(x,y)}{\partial \alpha} \end{pmatrix} = abcr\sin^{c-1}\alpha\cos^{c-1}\alpha.$$

В този случай от формула (2.3) получаваме

$$\iint\limits_{\Omega_{(x,y)}} f(x,y)dxdy = \iint\limits_{\Omega_{(\alpha,r)}} f\big(ar\cos^c\alpha, br\sin^c\alpha\big)|abcr\sin^{c-1}\alpha\cos^{c-1}\alpha|d\alpha dr. \quad (2.5)$$

Задача 2.5. Да се определят Якобияните на изображенията:

(1) $g(u,v) = u+v$, $h(u,v) = u-v$;

(2) $g(u,v) = u^2+v^2$, $h(u,v) = u^4+v^4$;

(3) $g(u,v) = \frac{u}{v}$, $h(u,v) = uv$;

(4) $g(u,v) = e^{\frac{u}{v}}$, $h(u,v) = e^{-\frac{v}{u}}$.

Отговори.
(1) $\det\dfrac{\partial(g,h)}{\partial(u,v)} = \det\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix} = -2$; (2) $\det\dfrac{\partial(g,h)}{\partial(u,v)} = \det\begin{pmatrix}2u & 2v\\ 4u^3 & 4v^3\end{pmatrix} = 8uv^3 - 8vu^3$;
(3) $\det\dfrac{\partial(g,h)}{\partial(u,v)} = \begin{pmatrix}\frac{1}{v} & -\frac{u}{v^2}\\ v & u\end{pmatrix} = \frac{2u}{v}$; (4) 0.

Пример 2.9. Да се пресметне интеграла

$$\iint\limits_{\Omega_{(x,y)}} \sqrt{2-x^2-y^2}dxdy,$$

където $\Omega_{(x,y)} = \{(x,y):\ x^2+y^2 \le 1\}$.

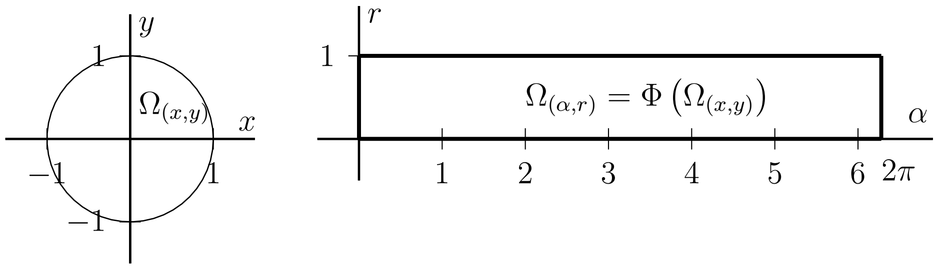
Решение. За пресмятането на този интеграл е удобно да въведем полярни координати:

$$\Phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \qquad \left| \begin{array}{l} x = r\cos\alpha, \\ y = r\sin\alpha, \end{array} \right.$$

където $r > 0$, $\alpha \in [0, 2\pi)$.

Очевидно $\Omega_{(\alpha,r)} = \Phi\left(\Omega_{(x,y)}\right) = \{(\alpha, r) :\ 0 \le \alpha < 2\pi,\ 0 < r \le 1\}$ (т.е. при полярна смяна кръгът се изобразява в правоъгълник, вж. фигура 2.19). Освен това, очевидно,

$$\sqrt{2 - x^2 - y^2} = \sqrt{2 - \sin^2\alpha - \cos^2\alpha} = 1.$$



Фигура 2.19.

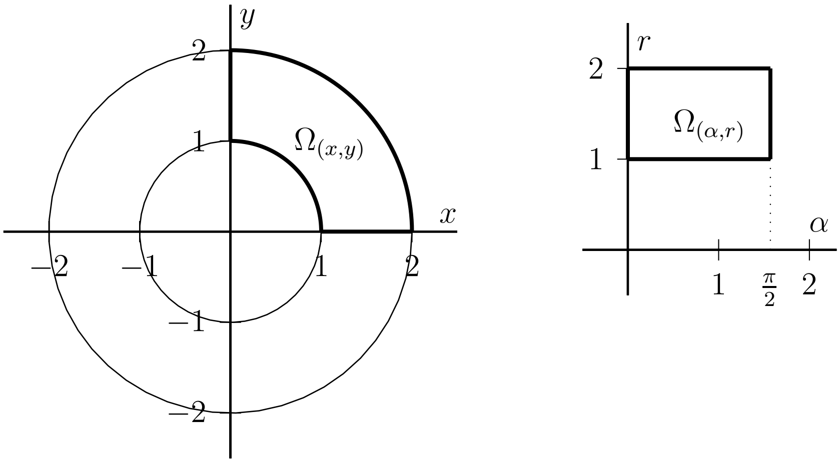
Прилагаме формула (2.4):

$$\iint\limits_{\Omega_{(x,y)}} \sqrt{1 - x^2 - y^2}\,dxdy = \iint\limits_{\Omega_{(\alpha,r)}} r d\alpha dr$$
$$= \int\limits_0^{2\pi} d\alpha \int\limits_0^1 r dr = 2\pi \frac{1}{2} = \pi. \qquad \square$$

Пример 2.10. Да се пресметне интеграла

$$I = \iint\limits_{\Omega_{(x,y)}} xydxdy,$$

където множеството $\Omega_{(x,y)}$ е зададено чрез неравенствата: $x^2 + y^2 \le 4$, $x^2 + y^2 \ge 1$, $y \ge 0$ и $x \ge 0$ (вж. фигура 2.20).



Фигура 2.20.

Решение. Използваме полярни координати:

$$\Phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \qquad \left| \begin{array}{l} x = r\cos\alpha, \\ y = r\sin\alpha, \end{array} \right.$$

където $r > 0$, $\alpha \in [0, 2\pi)$.

Очевидно

$$\Omega_{(\alpha,r)} = \Phi\left(\Omega_{(x,y)}\right) = \left\{(\alpha, r) : \; 0 \le \alpha < \frac{\pi}{2}, \; 1 < r \le 2\right\}.$$

От формула (2.4):

$$\begin{aligned} \iint\limits_{\Omega_{(x,y)}} xydxdy &= \iint\limits_{\Omega_{(\alpha,r)}} (r\cos\alpha)(r\sin\alpha)\, rd\alpha dr \\ &= \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\alpha\cos\alpha d\alpha \int\limits_0^1 r^3 dr \end{aligned}$$

$$= \left(\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2\alpha\right)\left(\frac{r^4}{4}\Bigg|_{r=0}^{r=1}\right)$$
$$= \left(-\frac{1}{4}\cos 2\alpha\Bigg|_{\alpha=0}^{\alpha=\frac{\pi}{2}}\right)\frac{1}{4}$$
$$= \frac{1}{2}\frac{1}{4} = \frac{1}{8}. \qquad \square$$

Задача 2.6. Като използвате полярна смяна пресметнете следните интеграли:

(1) $$\iint\limits_{\Omega_{(x,y)}} \cos\left(\pi\sqrt{x^2+y^2}\right) dxdy,$$
където $\Omega_{(x,y)} = \{(x,y):\ x^2+y^2 \leq 1\}$;

(2) $$\iint\limits_{\Omega_{(x,y)}} \frac{1}{x^2+y^2-1} dxdy,$$
където $\Omega_{(x,y)} = \{(x,y):\ 9 \leq x^2+y^2 \leq 25\}$;

(3) $\iint\limits_{\Omega_{(x,y)}} |xy| dxdy$, където $\Omega_{(x,y)} = \{(x,y):\ 4 \leq x^2+y^2 \leq 16\}$;

(4) $\iint\limits_{\Omega_{(x,y)}} xy^2 dxdy$, където $\Omega_{(x,y)} = \{(x,y):\ x^2+y^2 \leq 4,\ x \geq 0\}$;

(5) $$\iint\limits_{\Omega_{(x,y)}} y^2 e^{x^2+y^2} dxdy,$$
където $\Omega_{(x,y)} = \{(x,y):\ x^2+y^2 \leq 1,\ x \geq 0,\ y \geq 0\}$;

(6) $$\iint\limits_{\Omega_{(x,y)}} \frac{\ln x^2+y^2}{x^2+y^2} dxdy,$$
където $\Omega_{(x,y)} = \{(x,y):\ 1 \leq x^2+y^2 \leq 4,\ y \geq 0\}$.

Отговори: (1) $\frac{-4}{\pi}$; (2) $\pi\ln 3$; (3) $15\frac{2^4}{2}$; (4) $2\frac{2^5}{15}$; (5) $\frac{\pi}{8}$; (6) $\pi\ln^2 2$.

Пример 2.11. Да се пресметне интеграла

$$\iint\limits_{\Omega_{(x,y)}} \frac{1}{y} dxdy,$$

където множеството $\Omega_{(x,y)}$ е ограничено от правите $y = x$, $y = 2x$, $y = 1 - \frac{x}{2}$ и $y = 4 - 2x$.

Решение. Въвеждаме нови координати (u, v), чрез формулите:

$$\Phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \qquad \left| \begin{array}{l} x = \dfrac{2v}{u+v}, \\ y = \dfrac{2uv}{u+v}, \end{array} \right.$$

Тогава:

$$\Omega_{(u,v)} = \Phi\left(\Omega_{(x,y)}\right) = \left\{(u, v) : \ 1 \le u < 2, \ \frac{1}{2} < v \le 2\right\}.$$

Освен това:

$$\det \frac{\partial(g, h)}{\partial(u, v)} = -\frac{4uv}{(u+v)^2}.$$

Прилагаме формула (2.4):

$$\iint\limits_{\Omega_{(x,y)}} \frac{1}{y} dxdy = \iint\limits_{\Omega_{(u,v)}} \frac{u+v}{2uv} \frac{4uv}{(u+v)^3} dudv$$

$$= 2 \int\limits_{\frac{1}{2}}^{2} dv \int\limits_{1}^{2} \frac{dv}{(u+v)^3} = 2 \ln \frac{5}{4}. \qquad \square$$

3. Приложения

3.1. Геометрична интерпретация. Нека Ω е ограничена област в $\mathbb{R}^2$. Лицето $S(\Omega)$ на $\bar{\Omega}$ е

$$S(\Omega) = \iint\limits_{D} dxdy.$$

Нека f е непрекъсната, неотрицателна функция, дефинирана в Ω. Обемът на цилиндричното тяло

$$\Omega_1 = \{(x, y, z) : \ (x, y) \in \bar{\Omega}, \ 0 \le z \le f(x, y)\}$$

е

$$V(\Omega_1) = \iint\limits_{\Omega} f(x,y)dxdy.$$

Нека функцията $f(x,y)$ има непрекъснати първи частни производни.

Лицето $S(\sigma)$ на повърхнината

$$\sigma = \{(x,y,z) : \ (x,y) \in \bar{\Omega}, \ z = f(x,y)\}$$

е

$$S(\sigma) = \iint\limits_{\Omega} \sqrt{1 + \left(\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\right)^2} dxdy.$$

3.2. Приложения в механиката. Нека върху ограниченото множество $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ е разпределена маса с плътност $\rho(x,y)$. Ще считаме, че $\rho(x,y)$ е непрекъсната функция.

Масата на Ω е

$$M(\Omega) = \iint\limits_{\Omega} \rho(x,y)dxdy.$$

Статичните моменти M_x и M_y на Ω относно абсцисата и ординатата са

$$M_x = \iint\limits_{\Omega} y\rho(x,y)dxdy \quad \text{и} \quad M_y = \iint\limits_{\Omega} x\rho(x,y)dxdy,$$

съответно.

Ако множеството е хомогенно (т.е. ако $\rho(x,y) = \text{const.}$, за всяко $(x,y) \in \Omega$), то координатите на центъра на тежестта са

$$m_x = \frac{M_y}{M(\Omega)}, \quad m_y = \frac{M_x}{M(\Omega)}.$$

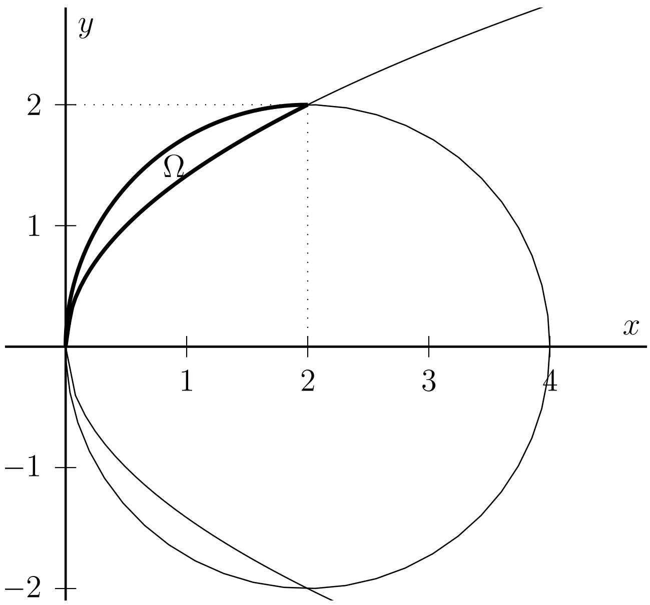
Инерчните моменти на Ω относно абсцисата, ординатата и координатното начало са

$$J_x = \iint\limits_{\Omega} y^2(x,y)dxdy, \quad J_y = \iint\limits_{\Omega} x^2(x,y)dxdy$$

и

$$J_0 = \iint\limits_{\Omega} (x^2+y^2)\rho(x,y)dxdy.$$

Пример 2.12. Нека множеството Ω е ограничено от кривите $x^2 + y^2 = 4x$ и $y^2 = 2x$ и нека $y \geq 0$. Да се пресметне лицето на Ω в първи квадрант.



Фигура 2.21.

Решение. Лицето на множеството Ω в първи квадрант е

$$(\star) \qquad S(\Omega) = \int\limits_{\Omega} dxdy.$$

Ще пресметнем интеграла $S(\Omega)$.

Аналитичното представяне на Ω (вж. фигура 2.21) е

$$\Omega\{(s, y):\ 0 \leq x \leq 2,\ \sqrt{2x} \leq y \leq \sqrt{4x - x^2}\}.$$

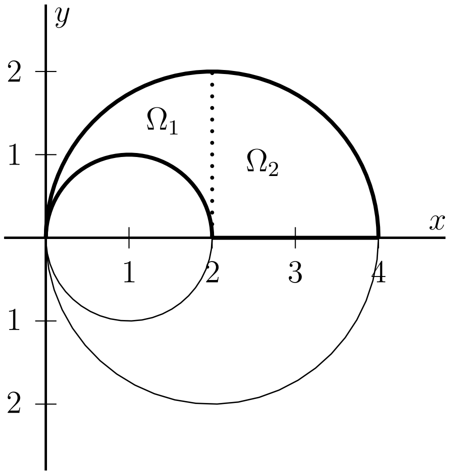
Следователно

$$S(\Omega) = \int\limits_{\Omega} dxdy = \int\limits_{0}^{2} dx \int\limits_{\sqrt{2x}}^{\sqrt{4x-x^2}} dy = \int\limits_{0}^{2} \sqrt{4x - x^2} - \sqrt{2x} dx = \pi - \frac{8}{3}. \quad \square$$

Задача 2.7. Намерете лицето на множеството, ограничено от съответните криви:

(1) $3y^2 = 25x$ и $5x^2 = 9y$;
(2) $xy = 4$ и $x + y - 5 = 0$;
(3) $y^2 = 4x$ и $x + y = 3$;
(4) $x^2 + y^2 = 2x$, $x^2 + y^2 = 4x$, $x = 0$ и $y = 0$.

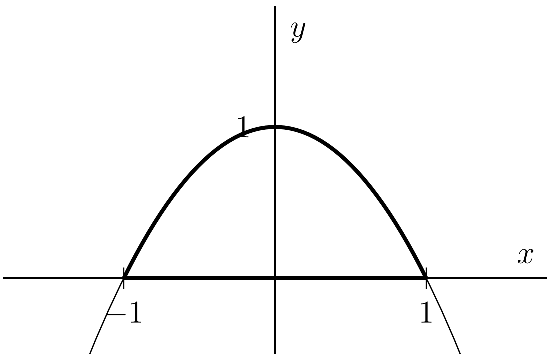
Упътване. (4) $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$, т.е. $S(\Omega) = S(\Omega_1) + S(\Omega_2)$ (вж. фигура 2.22).



Фигура 2.22.

$$\Omega_1 = \{(x, y) :\ 1 \le x \le 2,\ \sqrt{2x - x^2} \le y \le \sqrt{4x - x^2}\},$$
$$\Omega_2 = \{(x, y) :\ 2 \le x \le 4,\ 0 \le y \le \sqrt{4x - x^2}\},$$

Пример 2.13. Нека $\Omega = \{(x, y) :\ -1 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 1 - x^2\}$ (вж. фигура 2.23). Нека върху Ω е разпределена маса с плътност $\rho(x, y) = y$. Да се намери масата на Ω и координатите на центърът на тежестта на Ω.



Фигура 2.23.

Решение. Масата на Ω е

$$M(\Omega) = \int\limits_{\Omega} y dx dy = \int\limits_{-1}^{1} dx \int\limits_{0}^{1-x^2} y dy = \frac{8}{15}.$$

Моментът на Ω относно абсцисата е

$$M_x = \int\limits_{\Omega} y^2 dx dy = \frac{32}{105}.$$

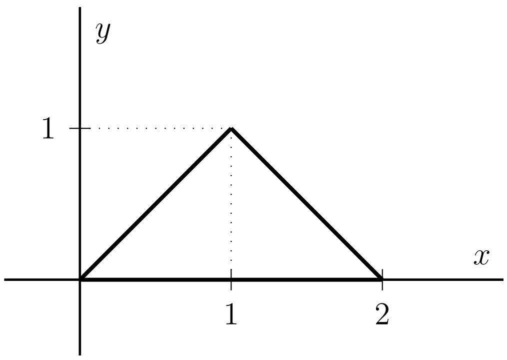
Моментът на Ω относно ординатата е

$$M_y = \int\limits_{\Omega} xy dx dy = 0.$$

Ето защо координатите на центърът на тежестта на Ω са

$$m_x = \frac{M_y}{M(\Omega)} = 0, \quad m_y = \frac{M_x}{M(\Omega)} = \frac{4}{7}. \quad \square$$

Пример 2.14. Нека Ω е триъгълник с върхове $(0,0)$, $(2,0)$ и $(1,1)$ (вж. фигура 2.24). Нека върху Ω е разпределена маса с плътност $\rho(x,y) = x$. Да се определят координатите на центърът на тежестта на Ω.



Фигура 2.24.

Решение. Очевидно

$$\Omega = \{(x,y) : \ 0 \le y \le 1, \ y \le x \le 2-y\}.$$

Тогава, масата на Ω е

$$M(\Omega) = \int\limits_{\Omega} x dx dy = \int\limits_{0}^{1} dy \int\limits_{y}^{2-y} x dx = 1.$$

Моментът на Ω относно абсцисата е

$$M_x = \int\limits_{\Omega} y x dx dy = \frac{1}{3}.$$

Моментът на Ω относно ординатата е

$$M_y = \int\limits_{\Omega} x^2 dx dy = \frac{23}{6}.$$

Ето защо центърът на тежестта на Ω е

$$m_x = \frac{M_y}{M(\Omega)} = \frac{23}{6}, \quad m_y = \frac{M_x}{M(\Omega)} = \frac{1}{3}. \quad \square$$