Тема 1. НЕОПРЕДЕЛЕН ИНТЕГРАЛ

§1.1. Непосредствено интегриране

Дефиниция 1.1. Функцията $F(x)$ се нарича примитивна на $f(x)$ в интервала (a,b), ако $F'(x)=f(x)$ за всяко $x\in(a,b)$.

Ако $F(x)$ е примитивна на $f(x)$ и c е произволна константа, функцията $F(x)+c$ е също примитивна на $f(x)$.

Дефиниция 1.2. Множеството от примитивните функции на $f(x)$ се нарича *неопределен интеграл* и се записва по следния начин:

$$\int f(x)dx = F(x)+c,$$

където c пробягва множеството на реалните числа.

Намирането на неопределените интеграли на някои елементарни функции се свежда до следната таблица на основните интеграли:

Таблични интеграли	
$\int 1dx = x+c$	$\int \cos x dx = \sin x + c$
$\int x^{\alpha} dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}+c$	$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = tgx + c$
$\int \frac{dx}{x} = \ln\lvert x\rvert + c$	$\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\cot gx + c$
$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a}+c$	$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \begin{cases} \arcsin x + c \\ -\arccos x + c \end{cases}$
$\int e^x dx = e^x + c$	$\int \frac{dx}{1+x^2} = \begin{cases} \mathrm{arctg} x + c \\ -\mathrm{arc}\cot \mathrm{g} x + c \end{cases}$
$\int \sin x dx = -\cos x + c$	$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a}} = \ln\left\lvert x+\sqrt{x^2+a}\right\rvert + c$

За решаването на интеграли е необходимо да знаем следните няколко свойства:

1) $\int [f(x) \pm g(x)] dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$;

2) $\int c.f(x)dx = c\int f(x)dx$, където c е константа, различна от 0;

3) $\int f(x)dx = \int f(x)d(x+c)$, където c е константа;

4) $\int f(x)dx = \frac{1}{c}\int f(x)d(cx)$, където c е константа, различна от 0.

Под *непосредствено интегриране* се разбира „изравняване” на величина под знака на диференциала с аргумента на функцията под интеграла, и след това прилагане на някой от изброените по-горе интеграли в комбинация с посочените свойства.

В таблицата на основните интеграли предполагаме, че x е независима променлива. Но тези формули остават в сила и когато променливата x формално се замени с функция $u = \varphi(t)$, където φ има производна спрямо променливата t . Наистина нека е известно, че $\int f(x)\,dx = F(x) + C$.

От правилото за диференциране на сложна функция имаме:

$$[F(\varphi(t))]' = F'(\varphi(t)).\varphi'(t) = f(\varphi(t)).\varphi'(t) .$$

Тогава според дефиниция 1.2 можем да запишем:

$$\int f(\varphi(t)).\varphi'(t)\,dt = F(\varphi(t)) + C .$$

Тъй като $u = \varphi(t)$ и $d\,u = d\,\varphi(t) = \varphi'(t)\,dt$, след заместване в горното равенство получаваме:

$$\int f(\varphi(t))\ d\varphi(t) = F(\varphi(t)) + C \text{ или } \int f(u)\ du = F(u) + C\,.$$

По такъв начин получаваме следната обобщена таблица:

Обобщена таблица на основните интеграли	
$\int 1 d\varphi(x) = \varphi(x) + c$	$\int \cos\varphi(x) d\varphi(x) = \sin\varphi(x) + c$
$\int \varphi(x)^{\alpha}\, d\varphi(x) = \dfrac{\varphi(x)^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c$	$\int \dfrac{d\varphi(x)}{\cos^2\varphi(x)} = tg\varphi(x) + c$
$\int \dfrac{d\varphi(x)}{\varphi(x)} = \ln\lvert\varphi(x)\rvert + c$	$\int \dfrac{d\varphi(x)}{\sin^2\varphi(x)} = -\cot g\varphi(x) + c$
$\int a^{\varphi(x)} d\varphi(x) = \dfrac{a^{\varphi(x)}}{\ln a} + c$	$\int \dfrac{d\varphi(x)}{\sqrt{1-\varphi(x)^2}} = \begin{cases} \arcsin\varphi(x) + c \\ -\arccos\varphi(x) + c \end{cases}$
$\int e^{\varphi(x)} d\varphi(x) = e^{\varphi(x)} + c$	$\int \dfrac{d\varphi(x)}{1+\varphi(x)^2} = \begin{cases} \mathrm{arctg}\varphi(x) + c \\ -\mathrm{arc\,cot\,g}\varphi(x) + c \end{cases}$
$\int \sin\varphi(x) d\varphi(x) = -\cos\varphi(x) + c$	$\int \dfrac{d\varphi(x)}{\sqrt{\varphi(x)^2 + a}} = \ln\left\lvert\varphi(x) + \sqrt{\varphi(x)^2 + a}\right\rvert + c$

Задача 1.1. Да се пресметнат интегралите:

а) $\int \left(3x^2 + 2x - 7\right) dx$;

б) $\int \left(\dfrac{9}{x} - \dfrac{4}{x^3} + \sqrt[3]{x^2}\right) dx$;

в) $\int \left(2e^x - 5\cos x + \dfrac{1}{2+2x^2}\right) dx$;

е) $\int \dfrac{x^2}{1+x^2}\, dx$;

ж) $\int \dfrac{dx}{\sin^2 x.\cos^2 x}$;

з) $\int \left(\dfrac{1}{x+2} + \dfrac{3}{1+4x^2}\right) dx$;

г) $\int\left(\frac{2}{\sqrt{4-4x^2}}+\frac{3}{\sin^2 x}\right)dx$;

и) $\int\left[\sin(7x-1)+\frac{1}{e^x}\right]dx$;

д) $\int\cos^2\frac{x}{2}\,dx$;

й) $\int\left(\frac{8}{5+9x^2}-\frac{11}{\cos^2\frac{x}{\pi}}\right)dx$.

Решения:

а) $\int\left(3x^2+2x-7\right)dx=\int 3x^2dx+\int 2xdx-\int 7dx=3\int x^2dx+2\int xdx-7\int 1dx=x^3+x^2-7x+c$;

б) $\int\left(\frac{9}{x}-\frac{4}{x^3}+\sqrt[3]{x^2}\right)dx=\int\frac{9}{x}dx-\int\frac{4}{x^3}dx+\int\sqrt[3]{x^2}\,dx=9\int\frac{dx}{x}-4\int x^{-3}dx+\int x^{\frac{2}{3}}dx=$

$=9\ln|x|+\frac{2}{x^2}+\frac{3}{5}\sqrt[3]{x^5}+c$;

в) $\int\left(2e^x-5\cos x+\frac{1}{2+2x^2}\right)dx=2\int e^xdx-5\int\cos xdx+\frac{1}{2}\int\frac{dx}{1+x^2}=2e^x-5\sin x+\frac{1}{2}\text{arctg}x+c$;

г) $\int\left(\frac{2}{\sqrt{4-4x^2}}+\frac{3}{\sin^2 x}\right)dx=\int\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}+3\int\frac{dx}{\sin^2 x}=\arcsin x-3\cot gx+c$;

д) $\int\cos^2\frac{x}{2}dx=\int\frac{1+\cos x}{2}dx=\frac{1}{2}\left(\int 1dx+\int\cos xdx\right)=\frac{1}{2}(x+\sin x)+c$

е) $\int\frac{x^2}{1+x^2}dx=\int\frac{x^2+1-1}{1+x^2}dx=\int\frac{1+x^2}{1+x^2}dx-\int\frac{1}{1+x^2}dx=x-\text{arctg}x+c$;

ж) $\int\frac{dx}{\sin^2 x.\cos^2 x}=\int\frac{\sin^2 x+\cos^2 x}{\sin^2 x.\cos^2 x}dx=\int\frac{\sin^2 x}{\sin^2 x.\cos^2 x}dx+\int\frac{\cos^2 x}{\sin^2 x.\cos^2 x}dx=$

$=\int\frac{dx}{\cos^2 x}+\int\frac{dx}{\sin^2 x}=\text{t}\,\text{g}x-\cot\text{g}x+c$;

з) $\int\left(\frac{1}{x+2}+\frac{3}{1+4x^2}\right)dx=\int\frac{dx}{x+2}+\int\frac{dx}{1+(2x)^2}=\int\frac{d(x+2)}{x+2}+\frac{1}{2}\int\frac{d2x}{1+(2x)^2}=$

$=\ln|x+2|+\frac{1}{2}\text{arctg}(2x)+c$;

и) $\int\left[\sin(7x-1)+\frac{1}{e^x}\right]dx=\int\sin(7x-1)dx+\int\frac{1}{e^x}dx=\frac{1}{7}\int\sin(7x-1)d(7x-1)-\int e^{-x}d(-x)=$

$=-\frac{1}{7}\cos(7x-1)-e^{-x}+c$;

й) $\int\left(\frac{8}{5+9x^2}-\frac{11}{\cos^2\frac{x}{\pi}}\right)dx=\frac{8}{5}\int\frac{dx}{1+\frac{9x^2}{5}}-11\int\frac{dx}{\cos^2\frac{x}{\pi}}=\frac{8}{5}\frac{\sqrt{5}}{3}\int\frac{d\frac{3x}{\sqrt{5}}x}{1+\left(\frac{3x}{\sqrt{5}}\right)^2}-11\pi\int\frac{d\frac{x}{\pi}}{\cos^2\frac{x}{\pi}}=$

$=\frac{8\sqrt{5}}{15}\operatorname{arctg}\left(\frac{3x}{\sqrt{5}}\right)-11\pi.\operatorname{tg}\frac{x}{\pi}+c$.

§1.2. Интегриране чрез внасяне под знака на диференциала. Формула за интегриране по части

В случаите, когато е налице произведение от две или повече функции под знака на интеграла, е удачно да използваме познатото ни равенство $g(x)dx=G'(x)dx=dG(x)$, където $G'(x)=g(x)$. Следователно да внесем функцията $g(x)$ под знака на диференциала означава по същество да решим интеграла $\int g(x)dx$ (т.е. да намерим примитивна функция $G(x)$). Така получаваме равенството $\int f(x)g(x)dx=\int f(x)dG(x)$.

Много често под знака на диференциала се внасят някои елементарни функции, затова е необходимо да запомним следните правила:

1. $\int f(x).x^n\,dx=\frac{1}{n+1}\int f(x)\,dx^{n+1}$, $n\neq-1$;
2. $\int f(x).\frac{1}{x}dx=\int f(x)d\ln x$;
3. $\int f(x).a^x\,dx=\frac{1}{\ln a}\int f(x)da^x$;
4. $\int f(x).e^x\,dx=\int f(x)de^x$;
5. $\int f(x).\sin x\,dx=-\int f(x)d\cos x$;

6. $\int f(x).\cos x\,dx = \int f(x)\,d\sin x$;

7. $\int f(x).\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \int f(x)\,d\arcsin x$;

8. $\int f(x).\dfrac{1}{1+x^2}\,dx = \int f(x)\,d\,\mathrm{arctg}x$;

9. $\int f(x).\dfrac{1}{\cos^2 x}\,dx = \int f(x)\,d\,\mathrm{tg}x$;

10. $\int f(x).\dfrac{1}{\sin^2 x}\,dx = -\int f(x)\,d\,\mathrm{cotg}x$.

Задача 1.2. Пресметнете интегралите, чрез внасяне на подходящата функция под знака на диференциала:

а) $\int e^{\sin x}\cos x dx$;

б) $\int \dfrac{\ln x}{x}dx$;

в) $\int x^2\sqrt{1+x^3}dx$;

г) $\int \dfrac{x}{1+x^4}dx$;

д) $\int \mathrm{tg}x dx$;

е) $\int \dfrac{dx}{x\sqrt{\ln^2 x+3}}$;

ж) $\int \dfrac{\sin x}{\sin x+\cos x}dx$;

з) $\int \dfrac{\cos x}{\sin x+\cos x}dx$.

Решения:

а) $\int e^{\sin x}\cos x dx = \int e^{\sin x} d\sin x = e^{\sin x} + c$;

б) $\int \dfrac{\ln x}{x}dx = \int \dfrac{1}{x}.\ln x dx = \int \ln x\, d\left(\ln x\right) = \dfrac{\ln^2 x}{2} + c$;

в) $\int x^2\sqrt{1+x^3}dx = \int \sqrt{1+x^3}\,d\,\dfrac{x^3}{3} = \dfrac{1}{3}\int \left(1+x^3\right)^{\frac{1}{2}} d(1+x^3) = \dfrac{1}{3}\dfrac{\left(1+x^3\right)^{\frac{3}{2}}}{\dfrac{3}{2}} + c = 2\sqrt{(1+x^3)^3} + c$;

г) $\int \dfrac{x}{1+x^4}dx = \int x\dfrac{1}{1+x^4}dx = \int \dfrac{1}{1+(x^2)^2}\,d\,\dfrac{x^2}{2} = \dfrac{1}{2}\int \dfrac{1}{1+(x^2)^2}dx^2 = \dfrac{1}{2}\mathrm{arctg}x^2 + c$;

д) $\int \mathrm{tg}x dx = \int \frac{\sin x}{\cos x} dx = \int \sin x . \frac{1}{\cos x} dx = -\int \frac{1}{\cos x} d\cos x = -\ln|\cos x| + c$;

е) $\int \frac{dx}{x\sqrt{\ln^2 x + 3}} = \int \frac{1}{x} \frac{dx}{\sqrt{\ln^2 x + 3}} = \int \frac{d\ln x}{\sqrt{\ln^2 x + 3}} = \ln\left|\ln x + \sqrt{\ln^2 x + 3}\right| + c$;

ж) и з) Нека положим $I = \int \frac{\sin x}{\sin x + \cos x} dx$, а $J = \int \frac{\cos x}{\sin x + \cos x} dx$. Тогава

$I + J = \int 1 dx = x + c$

$I - J = \int \frac{\sin x - \cos x}{\sin x + \cos x} dx = -\int \frac{1}{\sin x + \cos x} d(\sin x + \cos x) = -\ln|\sin x + \cos x| + c$ и след почленно събиране и изваждане получаваме съответно, че $I = \frac{1}{2}(x - \ln|\sin x + \cos x|) + c$ и $J = \frac{1}{2}(x + \ln|\sin x + \cos x|) + c$.

Обикновено след внасянето на функция под знака на диференциала се използва и *формулата за интегриране по части:* $\int u(x)dv(x) = u(x)v(x) - \int v(x)du(x)$. Най-често това се прилага за решаване на интеграли от вида:

$$\int P(x)\begin{Bmatrix} e^x \\ \sin x \\ \cos x \end{Bmatrix} dx \text{ и } \int R(x)\begin{Bmatrix} \ln x \\ arc\sin x \\ arctgx \end{Bmatrix} dx,$$

като първият вид се пресмята чрез внасяне на трансцендентна функция под знака на диференциала и интегриране по части, а вторият вид – чрез внасяне на рационалната функция и отново интегриране по части.

Задача 1.3. Пресметнете чрез интегриране по-части:

а) $\int \frac{x}{\cos^2 x} dx$;

б) $\int (x^2 - 2x)e^{2x} dx$;

в) $\int \frac{\ln x}{x^2} dx$;

г) $\int x\mathrm{arctg}x dx$;

д) $\int e^x \cos x dx$;

е) $\int \frac{1}{(1 + x^2)^2} dx$

Решения:

а) $\int \frac{x}{\cos^2 x}dx = \int x\frac{1}{\cos^2 x}dx = \int xd\mathrm{tg}x = x\mathrm{tg}x - \int \mathrm{tg}xdx = x\mathrm{tg}x + \ln|\cos x| + c$, защото последният интеграл е решен в задача 1.2. д);

б) различното тук е, че аргументът на експоненциалната функция $2x$ не е равен на x. Затова се налага първо да ги „изравним”, като умножим под знака на диференциала с 2 и разделим интеграла на 2:

$$\int (x^2-2x)e^{2x}dx = \frac{1}{2}\int (x^2-2x)e^{2x}d2x = \frac{1}{2}\int (x^2-2x)de^{2x} = \frac{1}{2}\Big[(x^2-2x)e^{2x} - \int e^{2x}d(x^2-2x)\Big] =$$

$$= \frac{1}{2}(x^2-2x)e^{2x} - \int (x-1)e^{2x}dx = \frac{1}{2}(x^2-2x)e^{2x} - \frac{1}{2}\int (x-1)de^{2x} = \frac{1}{2}(x^2-2x)e^{2x} - \frac{1}{2}\Big[(x-1)e^{2x} - \int e^{2x}dx\Big] =$$

$$= \frac{1}{2}(x^2-2x)e^{2x} - \frac{1}{2}(x-1)e^{2x} + \frac{1}{4}e^{2x} + c \ ;$$

в) $\int \frac{\ln x}{x^2}dx = -\int \ln x\, d\frac{1}{x} = -\frac{\ln x}{x} + \int \frac{1}{x}d\ln x = -\frac{\ln x}{x} + \int \frac{1}{x^2}dx = -\frac{\ln x}{x} - \frac{1}{3x^3} + c$;

г) $\int x\mathrm{arctg}xdx = \frac{1}{2}\int \mathrm{arctg}xdx^2 = \frac{x^2\mathrm{arctg}x}{2} - \frac{1}{2}\int x^2 d\mathrm{arctg}x = \frac{x^2\mathrm{arctg}x}{2} - \frac{1}{2}\int \frac{x^2}{1+x^2}dx =$

$= \frac{x^2\mathrm{arctg}x}{2} - \frac{1}{2}(x - \mathrm{arctg}x) + c$, защото последният интеграл е решен в задача 1.1. е);

д) внасяме коя да е от двете функции под знака на дифенциала и интегрираме по части, докато се получи даденият интеграл

$$\int e^x \cos xdx = \int \cos xde^x = e^x\cos x - \int e^x d\cos x = e^x\cos x + \int e^x \sin xdx = e^x\cos x + \int \sin xde^x =$$

$$= e^x\cos x + e^x\sin x - \int e^x d\sin x = e^x\cos x + e^x\sin x - \int e^x\cos xdx \, .$$

Приравнявайки най-лявата и най-дясната част на веригата от равенства, получаваме интегралното уравнение

$$\int e^x\cos x = e^x\cos x + e^x\sin x - \int e^x\cos xdx \ ,$$

откъдето

$$\int e^x\cos x = \frac{1}{2}\left(e^x\cos x + e^x\sin x\right) + c\,;$$

е) $\int \frac{1}{(1+x^2)^2}dx = \int \frac{x^2+1-x^2}{(1+x^2)^2}dx = \int \frac{1+x^2}{(1+x^2)^2}dx - \int \frac{x^2}{(1+x^2)^2}dx = \int \frac{1}{1+x^2}dx - \int \frac{x.x}{(1+x^2)^2}dx =$

$$= \text{arctg}x - \frac{1}{2}\int \frac{x}{(1+x^2)^2}\,dx^2 = \text{arctg}x - \frac{1}{2}\int x(1+x^2)^{-2}\,d(1+x^2) = \text{arctg}x + \frac{1}{2}\int x d(1+x^2)^{-1} =$$

$$= \text{arctg}x + \frac{1}{2}\left(\frac{x}{1+x^2} - \int \frac{1}{1+x^2}\,dx\right) = \frac{1}{2}\left(\text{arctg}x + \frac{x}{1+x^2}\right) + c\ .$$

§1.3. Интегриране чрез субституции

За пресмятане на интеграла $\int f(x)dx$ понякога е целесъобразно да се извърши смяна на независимата променлива с помощта на някоя *субституция* $x = \varphi(t)$, където $\varphi(t)$ и нейната обратна функция $t = \psi(x)$ са диференцируеми. Тогава:

ако $\int f(\varphi(t))d\varphi(t) = \int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt = F(t) + c$, то $\int f(x)dx = F\big(\psi(x)\big) + c$,

т.е. при субституция на практика се пресмята dx и обратната връзка $t = \psi(x)$, която заместваме в решението на интеграла, получен след субституцията.

Задача 1.4. Пресметнете интегрла:

а) $\int \sqrt{a^2 - x^2}\,dx$ с помощта на субституцията $x = a\cos t$ ($a>0$);

б) $\int \frac{x+2}{x^2+4x+5}\,dx$ с помощта на субституцията $x = t - 2$.

Решения:

а) Преди да пристъпим към решаване на интеграла, е необходимо да направим някои предварителни пресмятания, а именно $dx = d(a\cos t) = (a\cos t)'dt = -a\sin t dt$ и $t = \arccos\frac{x}{a}$.

Заместваме в изходния интеграл и получаваме:

$$\int \sqrt{a^2 - \left(a\cos t\right)^2}.(-a\sin t)dt = -a\int \sin t.\sqrt{a^2(1-\cos^2 t)}dt = -a^2\int \sin^2 tdt = -a^2\int \frac{1-\cos 2t}{2}dt =$$

$= -\frac{a^2}{2}\left(\int 1dt - \int \cos 2tdt\right) = -\frac{a^2}{2}t + \frac{a^2}{4}\sin 2t + c$. Окончателният резултат е

$$\int \sqrt{a^2-x^2}\,dx = -\frac{a^2}{2}\arccos\frac{x}{a} + \frac{a^2}{4}\sin(2\arccos\frac{x}{a}) + c$$

б) В този случай $dx = d(t-2) = (t-2)'dt = dt$ и $t = x+2$. Началният интеграл добива вида:

$$\int \frac{(t-2)+1}{(t-2)^2+4(t-2)+5}dt = \int \frac{t-1}{t^2+1}dt = \int \frac{t}{t^2+1}dt + \int \frac{1}{1+t^2}dt = \frac{1}{2}\int \frac{1}{t^2+1}dt^2 + \operatorname{arctg} t =$$

$= \frac{1}{2}\ln(t^2+1) + \operatorname{arctg} t + c$ и връщайки се към старата променлива, получаваме

$$\int \frac{x+1}{x^2+4x+5}dx = \frac{1}{2}\ln((x+2)^2+1) + \operatorname{arctg}(x+2) + c\,.$$

§1.4. Интегриране на функции от вида $R\left(x, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{p_1}{q_1}}, \ldots, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{p_n}{q_n}}\right)$

Пресмятането на тези интеграли се свежда до решаване на интеграли от рационални функции с помощта на субституцията $\frac{ax+b}{cx+d} = t^q$, където q е най-малкото общо кратно на знаменателите $q_1, q_2, \ldots, q_n$. По-точно търсената субституция се получава след решаване на последното равенство спрямо *x*.

Задача 1.5. Да се пресметнат интегралите:

а) $\int \frac{\sqrt{x}}{1-\sqrt[3]{x}}dx$;

б) $\int \frac{dx}{\sqrt{(x-1)^3(x-2)}}$;

в) $\int \frac{x}{\sqrt{x+1}+\sqrt[3]{x+1}}dx$.

Решения:

а) $\int \frac{\sqrt{x}}{1-\sqrt[3]{x}}dx = \int \frac{x^{\frac{1}{2}}}{1-x^{\frac{1}{3}}}dx$ и за да направим необходимото полагане, трябва да

намерим НОК(2,3)=6. Полагането е $x = t^6$, $dx = dt^6 = (t^6)'dt = 6t^5 dt$ и $t = x^{\frac{1}{6}}$. Тогава след заместване получаваме

$$\int \frac{(t^6)^{\frac{1}{2}}}{1-(t^6)^{\frac{1}{3}}} 6t^5 dt = 6\int \frac{t^8}{1-t^2}dt = 6\int (-t^6 - t^4 - t^2 - 1 + \frac{1}{t^2-1})dt =$$

Последното равенство е получено по следния начин:

$$\frac{t^8}{1-t^2} = -\frac{-t^8}{1-t^2} = -\frac{1-t^8+1}{1-t^2} = -\frac{1-t^8}{1-t^2} - \frac{1}{1-t^2} = -\frac{(1-t^4)(1+t^4)}{1-t^2} - \frac{1}{1-t^2} =$$

$$= -\frac{(1-t^2)(1+t^2)(1+t^4)}{1-t^2} - \frac{1}{1-t^2} = -(1+t^2)(1+t^4) - \frac{1}{1-t^2} = -t^6 - t^4 - t^2 - 1 + \frac{1}{t^2-1}.$$

Връщаме се към пресмятането на последния интеграл

$$= -6(\frac{t^7}{7} + \frac{t^5}{5} + \frac{t^3}{3} + t + \int \frac{1}{t^2-1}dt) = -\frac{6t^7}{7} - \frac{6t^5}{5} - \frac{6t^3}{3} - 6t - \frac{6}{2}(\int \frac{1}{t-1}dt - \int \frac{1}{t+1}dt) =$$

$$= -\frac{6t^7}{7} - \frac{6t^5}{5} - \frac{6t^3}{3} - 6t - 3(\ln|t-1| - \ln|t+1|) + c.$$

Окончателно $\int \frac{\sqrt{x}}{1-\sqrt[3]{x}}dx = -\frac{6\sqrt[6]{x}^7}{7} - \frac{6\sqrt[6]{x}^5}{5} - \frac{6\sqrt[6]{x}^3}{3} - 6\sqrt[6]{x} - 3\ln\left|\frac{\sqrt[6]{x}-1}{\sqrt[6]{x}+1}\right| + c$.

б) Интегралът очевидно не е във вида, който решаваме, затова е необходимо да направим следните преобразувания:

$\int \frac{dx}{\sqrt{(x-1)^3(x-2)}} = \int \frac{dx}{\sqrt{(x-1)^4 \frac{x-2}{x-1}}} = \int \frac{dx}{(x-1)^2\sqrt{\frac{x-2}{x-1}}} = \int \frac{1}{(x-1)^2}\sqrt{\frac{x-2}{x-1}}dx$. Сега е ясно каква

субституция да направим, а именно $\frac{x-2}{x-1} = t^2$. Тогава $x = \frac{2-t^2}{1-t^2}$ и $dx = \left(\frac{2-t^2}{1-t^2}\right)' dt =$

$= \dfrac{2t}{(1-t^2)^2}\,dt$, замествайки в интеграла, получаваме:

$$\int \frac{1}{\left(\frac{2-t^2}{1-t^2}-1\right)^2}\, t\,\frac{2t}{(1-t^2)^2}\,dt = 2\int t^2 dt = \frac{2}{3}t^3 + c$$

и следователно $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{(x-1)^3(x-2)}} = \frac{2}{3}\sqrt{\left(\frac{x-2}{x-1}\right)^3} + c$;

в) Полагаме $x+1=t^6$, $dx=(t^6-1)'dt=6t^5dt$, $t=\sqrt[6]{x+1}$. Тогава получаваме:

$$\int \frac{t^6-1}{t^3+t^2}6t^5dt = 6\int \frac{t^9-t^3}{t+1}dt = 6\int (t^8-t^7+t^6-t^5+t^4-t^3)dt =$$

$$= 6\frac{t^9}{9} - 6\frac{t^8}{8} + 6\frac{t^7}{7} - t^6 + 6\frac{t^5}{5} - 3\frac{t^4}{2} + c.$$

Накрая стигаме до търсения резултат

$$\int \frac{x}{\sqrt{x+1}+\sqrt[3]{x+1}}dx = 2\frac{\sqrt[6]{x+1}^9}{3} - 3\frac{\sqrt[6]{x+1}^8}{4} + 6\frac{\sqrt[6]{x+1}^7}{7} - \sqrt[6]{x+1}^6 + 6\frac{\sqrt[6]{x+1}^5}{5} - 3\frac{\sqrt[6]{x+1}^4}{2} + c =$$

$$= \frac{2}{3}(x+1)^{\frac{3}{2}} - \frac{3}{4}(x+1)^{\frac{4}{3}} + \frac{6}{7}(x+1)^{\frac{7}{6}} - \frac{6}{5}(x+1)^{\frac{5}{6}} + \frac{3}{2}(x+1)^{\frac{2}{3}} - x - 1 + c.$$

§1.5. Биномен диференциал

Интеграли от вида $\int x^m(a+bx^n)^p\,dx$, където a и b са различни от нула константи, а m, n и p – рационални числа, се наричат интеграли от *биномен диференциал* или *диференциален бином.* Съществуват три случая, когато тези интеграли се решават в елементарни функции.

i) Ако p е цяло число, правим субституцията $x=t^k$, където k е най-малкото общо кратно на знаменателите на m и n;

ii) Ако $\dfrac{m+1}{n}$ е цяло число, интегралът се свежда до интеграл от рационална функция с помощта на субституцията $a+bx^n=t^k$, където k е знаменателят на p;

iii) Ако $\frac{m+1}{n}+p$ е цяло, то първо преобразуваме интеграла така: $\int x^m (a+bx^n)^p\,dx = \int x^{m+np}(b+ax^{-n})^p\,dx$,

и след това правим полагането $b+ax^{-n}=t^k$, където k е знаменателят на p.

Когато числата m, n и p не удовлетворяват никое от посочените условия, разглежданите интеграли не се изразяват в елементарни функции. Да отбележим още, че в случаите ii) и iii) съответните субституции функционират и без предположение за рационалност на m и n.

Задача 1.6. Да се пресметнат интегралите:

а) $\int \frac{dx}{x\sqrt{1+x^2}}$; б) $\int \frac{dx}{(1+\sqrt[4]{x})^2}$; в) $\int \frac{\sqrt{1+\sqrt[3]{x}}}{\sqrt[3]{x^2}}\,dx$.

Решения:

а) Записваме интеграла във вида $\int \frac{dx}{x\sqrt{1+x^2}} = \int x^{-1}(1+x^2)^{-\frac{1}{2}}\,dx = \int x^{-1}x^{-1}(1+x^{-2})^{-\frac{1}{2}}\,dx$. За константите $m=-2, n=-2$ и $p=-\frac{1}{2}$ е изпълнено третото условие $\frac{m+1}{n}+p = \frac{-2+1}{-2}-\frac{1}{2}=0$. Тогава субституцията е следната: $1+x^{-2}=t^2$. Изразяваме $x=(t^2-1)^{-\frac{1}{2}}$, $dx = d(t^2-1)^{-\frac{1}{2}} = [(t^2-1)^{-\frac{1}{2}}]'dt = -t(t^2-1)^{-\frac{3}{2}}dt$ и отново се връщаме към пресмятането на интеграла

$$-\int ((t^2-1)^{-\frac{1}{2}})^{-2}(t^2)^{-\frac{1}{2}}t(t^2-1)^{-\frac{3}{2}}dt = -\int \frac{1}{\sqrt{t^2-1}}dt = -\ln\left|t+\sqrt{t^2-1}\right|+c \text{ и}$$

$$\int \frac{dx}{x^2\sqrt{1+x^2}} = -\ln\left|\sqrt{1+x^{-2}}+\sqrt{x^{-2}}\right|+c = -\ln\left|\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+\frac{1}{|x|}\right|+c.$$

б) Записваме интеграла във вида $\int \frac{dx}{(1+\sqrt[4]{x})^2} = \int (1+\sqrt[4]{x})^{-2}\,dx = \int x^0 (1+x^{\frac{1}{4}})^{-2} dx$ и тогава $m=0, n=\frac{1}{4}, p=-2$ - цяло. Следователно налице е първият случай. Полагаме $x=t^4$, $dx = dt^4 = (t^4)'dt = 4t^3 dt$ и заместваме в интеграла:

$$\int (1+t)^{-2} 4t^3 = 4\int \frac{t^3}{(1+t)^2}\,dt = 4\int \left(t-2+\frac{3t+2}{(1+t)^2} \right) dt = .$$

$$= 4\int t dt - 8\int dt + 4\left(\int \frac{3}{1+t} - \frac{1}{(1+t)^2}\,dt \right) = 2t^2 - 8t + 12\ln|t+1| + \frac{4}{1+t} + c\,.$$

Сумата $t-2+\frac{3t+2}{(1+t)^2}$ се получава след разделяне полинома t^3 на полинома $(1+t^2) = t^2+2t+1$.

Окончателно $\int \frac{dx}{(1+\sqrt[4]{x})^2} = 2\sqrt[4]{x}^2 - 8\sqrt[4]{x} + 12\ln\left|\sqrt[4]{x}+1\right| + \frac{4}{1+\sqrt[4]{x}} + c\,.$

в) Записваме интеграла във вида $\int \frac{\sqrt{1+\sqrt[3]{x}}}{\sqrt[3]{x^2}}\,dx = \int x^{\frac{-2}{3}} (1+x^{\frac{1}{3}})^{\frac{1}{2}} dx$, тогава $m=-\frac{2}{3}, n=\frac{1}{3}, p=\frac{1}{2}$ и $\frac{m+1}{n} = \frac{-\frac{2}{3}+1}{\frac{1}{3}} = 1$ - цяло число. Получихме втория случай и полагаме $1+x^{\frac{1}{3}} = t^2$. Тогава $x=(t^2-1)^3$ и $dx = \left[(t^2-1)^3 \right]' dt = 6t(t^2-1)^2\,dt$ и заместваме получените резултати в интеграла

$$\int \left((t^2-1)^3 \right)^{\frac{-2}{3}} \left(t^2 \right)^{\frac{1}{2}} 6t(t^2-1)^2\,dt = 6\int t^2 dt = 2t^3 + c\,.$$

Връщаме се към x и $\int \frac{\sqrt{1+\sqrt[3]{x}}}{\sqrt[3]{x^2}}\,dx = 2\sqrt{1+\sqrt[3]{x}}^{\,3} + c\,.$

§1.6. Субституции на Ойлер

Интеграли от вида $\int R(x,\sqrt{ax^2+bx+c})dx \quad a \neq 0, b^2-4ac \neq 0$, където R е рационална функция на две променливи, могат да бъдат приведени към интеграли от рационални функции с помощта на субституциите на Ойлер. Те се прилагат в следните случаи:

i) при $a>0$ може да се положи $\sqrt{ax^2+bx+c}=t+x\sqrt{a}$ или $\sqrt{ax^2+bx+c}=t-x\sqrt{a}$;

ii) при $c>0$ може да се положи $\sqrt{ax^2+bx+c}=tx+\sqrt{c}$ или $\sqrt{ax^2+bx+c}=tx-\sqrt{c}$;

iii) когато квадратният тричлен има реални нули, x_1 и x_2 може да се положи

$\sqrt{ax^2+bx+c}=t(x-x_1)$ или $\sqrt{ax^2+bx+c}=t(x-x_2)$.

Понякога е възможно конкретният интеграл от разглеждания вид да бъде пресметнат с помощта на повече от една от посочените субституции. Обемът на изчисленията зависи от приложените субституции.

Задача 1.7. Решете интегралите:

а) $\int \frac{dx}{x+\sqrt{x^2+x+1}}$; б) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-5x+4}}$ в) $\int \frac{dx}{(x+4)\sqrt{x^2+3x+4}}, x>1$;

Решения:

а) В този интеграл $a=1>0$ и $c=1>0$ можем да приложим първата и втората субституция, но нека да положим $\sqrt{x^2+x+1}=-x+t$. След повдигане в квадрат изразяваме x по следния начин: $x^2+x+1=x^2-2xt+t^2$. Вторите степени на x се унищожават, което е характерно за тази субституция, и $x+2xt=t^2-1$. Откъдето $x.(1+2t)=t^2-1$ и $x=\frac{t^2-1}{1+2t}$. Пресмятаме $dx=d\left(\frac{t^2-1}{1+2t}\right)=\left(\frac{t^2-1}{1+2t}\right)'dt=\frac{2(t^2+t+1)}{(1+2t)^2}dt$, заместваме в дадения интеграл и стигаме до $2\int \frac{(t^2+t+1)}{t(1+2t)^2}dt$. Разлагаме подинтегралната функция в сума от елементарни дроби:

$$\frac{t^2+t+1}{t(1+2t)^2}=\frac{A}{t}+\frac{B}{1+2t}+\frac{C}{(1+2t)^2},$$

а оттук, след привеждане под общ знаменател, приравняваме числителите

$$t^2+t+1=A(1+2t)^2+Bt(1+2t)+Ct.$$

Последователно даваме следните стойности на *t*, $t=0, t=-\frac{1}{2}$ и $t=1$ и получаваме $A=1, B=-\frac{3}{2}$ и $C=-\frac{3}{2}$. Следователно

$$2\int \frac{(t^2+t+1)}{t(1+2t)^2}dt=2\int \left(\frac{1}{t}-\frac{3}{2}\frac{1}{1+2t}-\frac{3}{2}\frac{1}{(1+2t)^2}\right)dt=2\int \frac{dt}{t}-3\int \frac{dt}{1+2t}-3\int \frac{dt}{(1+2t)^2}=$$

$$=2\ln|t|-\frac{3}{2}\ln|1+2t|+\frac{3}{2}\frac{1}{1+2t}+c.$$

$$\int \frac{dx}{x+\sqrt{x^2+x+1}}=2\ln\left|\sqrt{x^2+x+1}+x\right|-\frac{3}{2}\ln\left|1+2(\sqrt{x^2+x+1}+x)\right|+\frac{3}{2}\frac{1}{1+2(\sqrt{x^2+x+1}+x)}+c;$$

б) За решаване на този интеграл може да приложим втората субституция на Ойлер. Полагаме $\sqrt{x^2-5x+4}=xt+2$ и след повдигане в крадрат двете страни може да изразим $x=\frac{5+4t}{1-t^2}$ и съответно $dx=d\left(\frac{5+4t}{1-t^2}\right)=\frac{4t^2+10t+4}{(1-t^2)^2}dt$. Като заместим в интеграла, имаме

$$\int \frac{1}{\frac{5+4t}{1-t^2}t+2}.\frac{4t^2+10t+4}{(1-t^2)^2}dt=\int \frac{1-t^2}{2t^2+5t+2}\frac{4t^2+10t+4}{(1-t^2)^2}dt=2\int \frac{1}{1-t^2}dt=$$

$$=2\int \left(\frac{1}{2}\frac{1}{1-t}+\frac{1}{2}\frac{1}{1+t}\right)dt=\int \frac{1}{1-t}dt+\int \frac{1}{1+t}dt=-\ln|1-t|+\ln|1+t|+c=\ln\left|\frac{1+t}{1-t}\right|+c.$$

Решението на интеграла е $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-5x+4}}=\ln\left|\frac{x-2+\sqrt{x^2-5x+4}}{x+2-\sqrt{x^2-5x+4}}\right|+c$.

в) Тъй като квадратният тричлен под радикала има реални корени -4 и 1, може да положим

$\sqrt{x^2+3x+4}=t(x-1)$. Субституцията ни дава $x=\dfrac{t^2+4}{t^2-1}$ и $dx=-\dfrac{10t}{(t^2-1)^2}dt$ и следователно

$$-\int \frac{1}{\left(\dfrac{t^2+4}{t^2-1}+4\right)t\left(\dfrac{t^2+4}{t^2-1}-1\right)}\frac{10t}{(t^2-1)^2}dt=-10\int\frac{1}{(t^2+4+4t^2-4)(t^2+4-t^2+1)}dt=$$

$$=-\frac{2}{5}\int\frac{dt}{t^2}=\frac{2}{5}\frac{1}{t}+c.$$

Прилагаме последната стъпка и получаваме $\displaystyle\int\frac{dx}{(x+4)\sqrt{x^2+3x+4}}=\frac{2}{5}\sqrt{\frac{x-1}{x+4}}+c$.

§1.7. Интегриране на рационални функции на $\sin x$ и $\cos x$

Интеграли от вида $\int R(\sin x,\cos x)dx$, където R е рационална функция на две променливи ($\sin x$ и $\cos x$), могат да се сведат до интеграли от рационална функция с помощта на следните субституции:

i) При $R(-\sin x,-\cos x)=R(\sin x,\cos x)$, полагаме $t=tgx$.

Тогава $\sin^2 x=\dfrac{t^2}{1+t^2}$, $\cos^2 x=\dfrac{1}{1+t^2}$, $\sin x\cos x=\dfrac{t}{1+t^2}$ и $dx=\dfrac{dt}{1+t^2}$;

ii) При $R(-\sin x,\cos x)=-R(\sin x,\cos x)$, полагаме $t=\cos x$.

Тогава $\sin x=\sqrt{1-t^2}$ и $dx=-\dfrac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$;

iii) При $R(\sin x,-\cos x)=-R(\sin x,\cos x)$, полагаме $t=\sin x$.

Тогава $\cos x=\sqrt{1-t^2}$ и $dx=\dfrac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$.

Ако не е изпълнено никое от по-горните условия, може да приложим така наречената „универсална субституция”: $t=tg\dfrac{x}{2}$. Тогава $\sin x=\dfrac{2t}{1+t^2}$, $\cos x=\dfrac{1-t^2}{1+t^2}$ и $dx=\dfrac{2}{1+t^2}dt$. Да отбележим, че това полагане понякога води до сложни интеграли от рационални функции.

Задача 1.8. Да се пресметнат интегралите:

а) $\int \sin^2 x \cos^3 x dx$;

б) $\int \frac{\sin 2x}{\sin^4 x + \cos^4 x} dx$;

в) $\int \frac{dx}{2\sin x - \cos x}$.

Решения:

а) Тъй като $R(\sin x, -\cos x) = \sin^2 x(-\cos x)^3 = -\sin^2 x \cos^3 x = -R(\sin x, \cos x)$, удобно е да се извърши субституцията $t = \sin x$. След заместване в началния интеграл получаваме:

$$\int t^2 \left(\sqrt{1-t^2}\right)^3 \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} dt = \int t^2 \left(1-t^2\right) dt = \int \left(t^2 - t^4\right) dt = \frac{t^3}{3} - \frac{t^5}{5} + c .$$

Откъдето достигаме до резултата $\int \sin^2 x \cos^3 x dx = \frac{\sin^3 x}{3} - \frac{\sin^5 x}{5} + c$;

б) За подинтегралната функция е изпълнено

$$R(-\sin x, -\cos x) = \frac{2(-\cos x)(-\sin x)}{(-\sin x)^4 + (-\cos x)^4} = \frac{2\sin x \cos x}{\sin^4 x + \cos^4 x} = R(\sin x, \cos x) .$$

Следователно тук може да положим $t = \mathrm{tg}x$ и интегралът добива вида:

$$\int \frac{\frac{2t}{1+t^2}}{\frac{1}{(1+t^2)^2} + \frac{t^4}{(1+t^2)^2}} \frac{1}{1+t^2} dt = 2\int \frac{t}{1+t^4} dt = \int \frac{1}{1+(t^2)^2} dt^2 = \mathrm{arctg} t^2 + c .$$

.

Връщаме се към обратната връзка в полагането и $\int \frac{\cos 2x}{\sin^4 x + \cos^4 x} dx = arctg(tg^2 x) + c$.

в) Очевидно при този интеграл не можем да използваме никое от първите три полагания, затова ще използваме универсалната субституция $t = tg\frac{x}{2}$. Получаваме интеграла

$$\int \frac{1}{2\frac{2t}{1+t^2}-\frac{1-t^2}{1+t^2}} 2\frac{1}{1+t^2}dt = 2\int \frac{1}{t^2+4t-1}dt .$$

Разлагаме $\frac{1}{t^2+4t-1}$ в сума от елементарни дроби по следния начин:

$\frac{1}{t^2+4t-1} = \frac{A}{t+2-\sqrt{5}} + \frac{B}{t+2+\sqrt{5}}$ и следователно $1 = A(t+2+\sqrt{5}) + B(t+2-\sqrt{5})$, откъдето лесно намираме, че $B = -\frac{1}{2\sqrt{5}}$ и $A = \frac{1}{2\sqrt{5}}$. Тогава

$$2\int \frac{1}{t^2+4t-1}dt = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\int \frac{1}{t+2-\sqrt{5}}dt - \int \frac{1}{t+2+\sqrt{5}}dt\right) = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\ln\left|t+2-\sqrt{5}\right| - \ln\left|t+2+\sqrt{5}\right|\right) + c =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}}\ln\left|\frac{t+2-\sqrt{5}}{t+2+\sqrt{5}}\right| + c .$$

Окончателно $\int \frac{dx}{2\sin x - \cos x} = \frac{1}{\sqrt{5}}\ln\left|\frac{tg\frac{x}{2}+2-\sqrt{5}}{tg\frac{x}{2}+2+\sqrt{5}}\right| + c$.

§1.8. Задачи за самоподготовка

Пресметнете интегралите:

1. $\int (7x^6 + 2\sqrt[3]{x})dx$;
2. $\int (4\cos x - 3e^{x+3})dx$;
3. $\int \left((2x-7)^4 - \frac{1}{4x-1}\right)dx$;
4. $\int \left(\frac{1}{\sqrt{1-16x^2}} + \frac{5}{\cos^2 3x}\right)dx$;
5. $\int \frac{1}{x^2(1-x^2)}dx$;

16. $\int \sqrt{4-x^2}dx$;
17. $\int (3x^2+6)\sin x dx$;
18. $\int arctgx dx$;
19. $\int \frac{1}{(4+x^2)^2}dx$;
20. $\int (x^2-1)e^{3x-1}dx$;

6. $\int (tg^2 x + \cot g^2 x)dx$;

7. $\int \frac{\sin x}{1+\sin x} dx$;

8. $\int \sin 2x \sin 5x dx$;

9. $\int \frac{1}{\sin x} dx$;

10. $\int \frac{1}{e^x + 1} dx$;

11. $\int \frac{1}{\sqrt{x}(1+x)} dx$;

12. $\int \frac{1}{\cos^4 x} dx$;

13. $\int \frac{x}{3-2x^2} dx$;

14. $\int \frac{x}{(1+x^2)^2} dx$;

15. $\int \frac{1}{e^{2x} + e^{-2x} + 2} dx$;

21. $\int \frac{\arccos x}{x^2} dx$;

22. $\int \frac{x}{\sqrt{x+1} + \sqrt[3]{x+1}} dx$;

23. $\int \frac{1}{3x + \sqrt[3]{x^2}} dx$;

24. $\int \frac{x - \sqrt{x^2 + 3x + 2}}{x + \sqrt{x^2 + 3x + 2}} dx$;

25. $\int \frac{x^5}{\sqrt{1-x^2}} dx$;

26. $\int \sqrt{x^3 + x^4} dx$;

27. $\int \frac{1}{3x + \sqrt[3]{x^2}} dx$;

28. $\int \frac{1}{3+\cos x} dx$;

29. $\int \frac{\sin^3 x}{\cos^2 x + 1} dx$;

30. $\int \frac{1}{\sin x(2\cos^2 x - 1)} dx$.