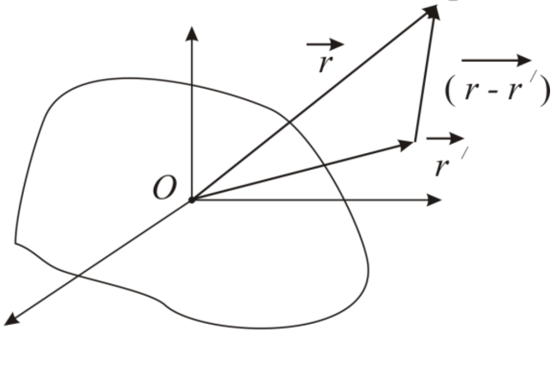
Тема 13. Електрични мултиполни моменти



Както се вижда от формулата

$$\varphi(r) = \int_{V_\infty} \frac{\rho(r^{/})}{4\pi\varepsilon_0 \left| r - r^{/} \right|} dV^{/}$$

за определянето на потенциала на електростатичното поле се изисква познаването на разпределението $\rho(r^{/})$ на зарядите в областта V, като в общия случай решаването на горния интеграл и намирането на $\varphi(r)$ е достатъчно сложно.

Съществуват обаче задачи, при които потенциалът $\varphi(r)$ може да се намери относително просто при достатъчно общи предположения относно вида на функцията $\rho(r^{/})$. Такава е задачата за намиране на електростатичното поле на **голямо разстояние**, когато то е създадено от **пространствено ограничени източници**, т.е. източници, заемащи ограничена пространствена област. Пример за такава система от заряди са атомните ядра, атомите, молекулите, йоните и др. За такива случаи се получават относително прости формули за т.нар. **мултиполно разложение на потенциала** при произволно разпределение на зарядите.

Нека V е **област**, заета от **пространствено ограничени заряди**. Търсим полето в точка P (точка на наблюдение), намираща се на достатъчно голямо разстояние от областта V, условието за което ще изразим във вида $|\vec{r}| >> |\vec{r}^{\,/}|$. Полето в т. P се дава с израза

$$(1) \qquad \varphi(r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int\limits_V \frac{\rho(r^/)}{|r - r^/|} dV^/ .$$

Ако въведем означенията $r = |\vec{r}|$ и $r^/ = |\vec{r}^{\,/}|$, то условието $|\vec{r}| >> |\vec{r}^{\,/}|$ може да бъде представено във вида $r >> r^/$, или още

$$(2) \qquad \frac{r^/}{r} << 1 .$$

Тогава функцията $\dfrac{1}{|r - r^/|}$, участваща в подинтегралната функция на (1), може да бъде представена в ред по степените на $\dfrac{r^/}{r}$, а именно

$$\frac{1}{|r - r^/|} = \frac{1}{\sqrt{(\vec{r} - \vec{r}^{\,/})^2}} = \frac{1}{\sqrt{r^2 + r^{/2} - 2\vec{r}\cdot\vec{r}^{\,/}}} = \frac{1}{r \cdot \sqrt{1 - \left[-\left(\dfrac{r^/}{r}\right)^2 + \dfrac{2\vec{r}\cdot\vec{r}^{\,/}}{r^2} \right]}} = \frac{1}{r} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-x}} ,$$

където с x е обозначена безкрайно-малката величина $\dfrac{2\vec{r}\cdot\vec{r}^{\,/}}{r^2} - \left(\dfrac{r^/}{r}\right)^2$. За $\dfrac{1}{\sqrt{1-x}}$ използваме редовото развитие

$$\frac{1}{\sqrt{1-x}} = 1 + \frac{1}{2}x + \frac{3}{2}x^2 + ...$$

Следователно

$$\frac{1}{|r - r^/|} = \frac{1}{r} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-x}} = \frac{1}{r} \cdot \left\{ 1 + \frac{1}{2}x + \frac{3}{2}x^2 + ... \right\} =$$

$$= \frac{1}{r} \cdot \left\{ 1 + \frac{1}{2}\left[\frac{2\vec{r}\cdot\vec{r}^{\,/}}{r^2} - \left(\frac{r^/}{r}\right)^2 \right] + \frac{3}{2}\left[\frac{2\vec{r}\cdot\vec{r}^{\,/}}{r^2} - \left(\frac{r^/}{r}\right)^2 \right]^2 + \; ..... \right\} =$$

$$= \frac{1}{r} + \frac{\vec{r}\cdot\vec{r}^{\,/}}{r^3} - \frac{1}{r}\left(\frac{r^/}{r}\right)^2 + \frac{3}{2}\frac{1}{r}\left[\frac{2\vec{r}\cdot\vec{r}^{\,/}}{r^2} - \left(\frac{r^/}{r}\right)^2 \right]^2 + \; ..... = \quad ....$$

$$....... \quad = \frac{1}{r} + \frac{\vec{r}\cdot\vec{r}^{\,/}}{r^3} + \frac{\vec{r}_0}{2r^3}\left[3\{\vec{r}^{\,/}\cdot r^/\} - r^{/2}\,\delta \right] \cdot \vec{r}_0 + \; ..... =$$

$$....... \quad = \frac{1}{r} + \frac{\vec{r}_0\cdot\vec{r}^{\,/}}{r^2} + \frac{\vec{r}_0}{2r^3}\left[3\{\vec{r}^{\,/}\cdot r^/\} - r^{/2}\,\delta \right] \cdot \vec{r}_0 + \; ..... \; ,$$

т.е. ограничавайки се до третия член в разложението ще имаме

$$(3) \qquad \frac{1}{|r - r^/|} = \frac{1}{r} + \frac{\vec{r}\cdot\vec{r}^{\,/}}{r^3} + \frac{\vec{r}_0}{2r^3}\left[3\{\vec{r}^{\,/}\cdot r^/\} - r^{/2}\,\delta \right] \cdot \vec{r}_0 + \; ..... ,$$

където:

$\vec{r}_0 = \dfrac{\vec{r}}{r}$ е единичен вектор;

$\{\vec{r}^{\,/} \cdot r^{/}\}$ е тензорно произведение на два вектора;

δ е единичен тримерен тензор от втори ранг.

Заместваме разложението (3) в интегралното представяне за потенциала (1) и получаваме (4)

$$\varphi(r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\int_V \frac{\rho(r^{/})}{r} dV^{/} + \int_V \frac{\rho(r^{/})}{r^2}(\vec{r}_0 \cdot \vec{r}^{\,/})\, dV^{/} + \int_V \frac{\rho(r^{/})}{2r^3}\vec{r}_0\Big[3\{\vec{r}^{\,/} \cdot r^{/}\} - r^{/2}\,\delta\Big]\cdot \vec{r}_0 dV^{/} + \ldots\right].$$

Въвеждаме означенията:

(5) $\quad \int_V \rho(r^{/})\, dV^{/} = q$ - **пълен заряд на системата**;

(6) $\quad \int_V \rho(r^{/}) \cdot \vec{r}^{\,/}\, dV^{/} = \vec{p}$ - **електричен диполен момент на системата** (векторна величина);

(7) $\quad \int_V \rho(r^{/})\ {}_{0}\Big[3\{\vec{r}^{\,/} \cdot r^{/}\} - r^{/2}\,\delta\Big] dV^{/} = d$ - **квадруполен момент на системата** (тензорна величина).

С отчитането на (5), (6) и (7) изразът за потенциала добива вида

(8) $\quad \varphi(r) = \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 r} + \dfrac{\vec{r}_0 \cdot \vec{p}}{4\pi\varepsilon_0 r^2} + \dfrac{\vec{r}_0 \cdot d \cdot \vec{r}_0}{8\pi\varepsilon_0 r^3} + \ldots.. = \varphi_1(r) + \varphi_2(r) + \varphi_3(r) + \ldots..$

С горната формула потенциалът се представя като сума от членове, съдържащи нарастващи степени на разстоянието r (в знаменател) от точката на наблюдение (т. P) до системата от заряди, създаваща полето. Това представяне се нарича **мултиполно разложение на потенциала**. При $r >> r^{/}$ записаните в (8) членове определят потенциала $\varphi(r)$ достатъчно точно, а останалите (т.е. представените в (8) с многоточие) намаляват много бързо и дават несъществен принос.

Когато общият заряд (5) на системата е $q \neq 0$, то най-съществения член в (8), описващ полето, е първият, а именно членът

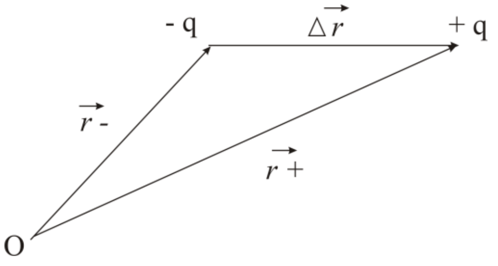
(9) $\quad \varphi_1(r) = \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}$,

който по своя запис прилича на поле на един точков заряд q.

Ако обаче $q = 0$, то $\varphi_1(r)$ не може да служи за описание на полето, и тогава „преминаваме” към следващия по големина член $\varphi_2(r)$

(10) $\quad \varphi_2(r) = \dfrac{\vec{r}_0 \cdot \vec{p}}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$,

описващ полето на електричен дипол. По определение **<u>електричен дипол</u>** е **система от два <u>еднакви по големина</u>, но <u>различни по знак</u> заряда, поставени на достатъчно малко разстояние $\Delta\vec{r}$ един от друг**.



Според (6) диполният момент на такава система от заряди е (виж фигурата)

$$\vec{p} = q \cdot \vec{r}_+ - q \cdot \vec{r}_- = q \cdot \Delta\vec{r}\,,$$

където $\Delta\vec{r}$ е вектор с посока от $-q$ към $+q$.

Ясно е, че за електричен дипол $q = 0$, обаче $\vec{p} \neq 0$.

За да определим интензитета (електричния вектор $\vec{E}$) на полето на дипола, прилагаме спрямо (10) съотношението $\vec{E} = -grad\,\varphi$:

$$\vec{E} = -grad\,\varphi_2 \equiv -grad\,\frac{\vec{r}_0\cdot\vec{p}}{4\pi\varepsilon_0 r^2} = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\,grad\,\frac{\vec{r}\cdot\vec{p}}{r^3} = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\,grad\left[\frac{1}{r^3}(\vec{p}\cdot\vec{r})\right] = \ldots$$

…. използваме, че $grad\,(u.v) = u.grad\;v + v.grad\;u$ …..

$$-\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{1}{r^3}\,grad\,(\vec{p}\cdot\vec{r}) + (\vec{p}\cdot\vec{r})\,grad\,\frac{1}{r^3}\right] = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{1}{r^3}\,grad\,(\vec{p}\cdot\vec{r}) + (\vec{p}\cdot\vec{r})\,grad\,\frac{1}{r^3}\right] =$$

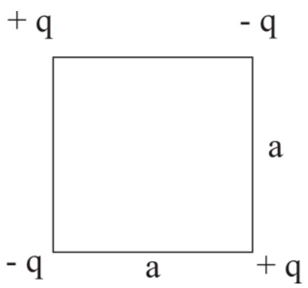
…. използваме, че $grad\,(\vec{p}.\vec{r}) = \vec{p}$ и че $grad\,\frac{1}{r^3} = -3\frac{1}{r^4}\,grad\,r \equiv \frac{-3}{r^4}\vec{r}_0$ …..

$$= -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{1}{r^3}\,\vec{p} + (\vec{p}\cdot\vec{r})\frac{-3}{r^4}\vec{r}_0\right] = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{1}{r^3}3(\vec{p}\cdot\frac{\vec{r}}{r})\vec{r}_0 - \frac{1}{r^3}\,\vec{p}\right] = \frac{3(\vec{p}\cdot\vec{r}_0)\vec{r}_0 - \vec{p}}{4\pi\varepsilon_0\, r^3}\,.$$

И така за интензитета на полето на дипол получихме израза

(11) $$\vec{E}(r) = \frac{3(\vec{p}\cdot\vec{r}_0)\vec{r}_0 - \vec{p}}{4\pi\varepsilon_0\, r^3}\,.$$

Когато системата от заряди е такава, че за нея $q = 0$ и $\vec{p} = 0$, то тази система от заряди се нарича **електричен квадрупол**. Потенциалът на полето в този случай се дава с третия член от (8), а именно



(12) $$\varphi_3(r) = \frac{\vec{r}_0\cdot d\cdot\vec{r}_0}{8\pi\varepsilon_0 r^3}\,,$$

където величината d, дефинирана в (7) като **квадруполен момент**, е тензорна величина. Електричен квадрупол е например следната система от заряди (виж фигурата).