Тема 12. Стационарно магнитно поле – основни закони, енергия

А.) Стационарни полета

Поле, независещо явно от времето, се нарича **стационарно поле**. На практика това са полета, създадени от източници, **плътностите на които не зависят от времето**, т.е. $\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$.

Условията за стационарност на ЕМ поле са

(1) $\boxed{\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = 0}$, и $\boxed{\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0}$.

Изискването за стационарност налага ограничение върху движението на зарядите. То трябва да се осъществява по такъв начин, че общото разпределение на зарядите в пространството да не се променя с времето. От уравнението за непрекъснатостта

$\frac{\partial \rho}{\partial t} + div\, \vec{j} = 0$ и от условието за стационарност $\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$ следва равенството

(2) $div\, \vec{j} = 0$,

изразяващо т.нар. **условие за стационарност на токовете**. Нека отбележим, че условието (2) може да бъде в сила в два случая:

а) $\vec{j} = 0$, при което $\vec{B} = 0$, а това при $\rho \neq 0$ е случай на електростатично поле; и

б) $\vec{j} = \rho.\vec{V} \neq 0$, но при условие че $\rho \neq \rho(t)$.

Условията (1) и (2), комбинирани с уравненията на Максуел, дават уравненията, описващи <u>стационарните полета</u> (**стационарно електрично поле** и **стационарно магнитно поле**).

Уравненията на Максуел за **произволно електромагнитно поле** са

$$\begin{cases} div\, \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}, \\ rot\, \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \\ div\, \vec{B} = 0, \\ rot\, \vec{B} = \mu_0\, \vec{j} + \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}. \end{cases}$$

Ако в тях отчетем (1) и (2), получаваме

$$\begin{cases} div\, \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}, \\ rot\, \vec{E} = 0, \\ div\, \vec{B} = 0, \\ rot\, \vec{B} = \mu_0\, \vec{j}. \end{cases}$$

Уравненията

$$\begin{cases} div\, \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}, \\ rot\, \vec{E} = 0. \end{cases}$$

описват **стационарно електрично поле**, а уравненията

$$\begin{cases} div\, \vec{B} = 0, \\ rot\, \vec{B} = \mu_0\, \vec{j}. \end{cases}$$

описват **стационарно магнитно поле**.

Прави впечатление, че **уравненията, описващи <u>стационарно електрично поле</u> са същите, както уравненията, описващи <u>електростатичното поле</u>**.

Нека в следващите разглеждания се спрем само на свойствата на стационарното магнитно поле.

Б.) Стационарно магнитно поле

Както вече видяхме уравненията, описващи **стационарно магнитно поле**, са

$$(3)\quad \left| \begin{array}{l} div\,\vec{B} = 0\,, \\ rot\,\vec{B} = \mu_0\,\vec{j}\,. \end{array} \right.$$

От теорията на ЕМ поле е известно, че полевият вектор $\vec{B}$ може да се представи чрез магнитния векторен потенциал $\vec{A}(\vec{r},t)$ посредством съотношението

$$(4)\qquad \vec{B} = rot\,\vec{A}\,.$$

Нека заместим (4) в (3), при което ще получим

$$rot\,(rot\,\vec{A}) = \mu_0\,\vec{j}\,.$$

Но от векторния анализ е известно, че

$rot\ rot\,\vec{A} \equiv \nabla\times(\nabla\times\vec{A}) = grad\,div\,\vec{A} - \Delta\,\vec{A}$, (където Δ е Лапласов оператор), следователно

$$grad\,div\,\vec{A} - \Delta\vec{A} = \mu_0\,\vec{j}\,.$$

Поради коментираната вече нееднозначност на потенциалите налагаме върху $\vec{A}$ следното **калибровъчно условие** (*т.е. условие, налагано затова, защото* $\vec{A}$ *не е определен с точност*)

$$(5)\qquad div\,\vec{A} = 0\,,$$

наречено **калибровъчно условие на Кулон**. С отчитането на (5) стигаме до следното **векторно уравнение**, наричано понякога **уравнение на Поасон**

$$(6)\qquad \Delta\,\vec{A} = -\mu_0\,\vec{j}\,.$$

Уравнение (6) е **векторен аналог** на скаларното **уравнение на Поасон** за скаларния потенциал φ, имащо вида

$$\Delta\varphi = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}\,.$$

Както е известно, решението на скаларното уравнение на Поасон се дава с израза

$$\varphi(r) = \int\limits_{V_\infty} \frac{\rho(r')\,dV'}{4\pi\varepsilon_0 \left| r - r' \right|}\,.$$

Следвайки аналогията между скаларното и векторното уравнения на Поасон, можем да запишем, че решението на (6) се представя във вида

$$(7)\qquad \vec{A}(r) = \int\limits_{V_\infty} \frac{\mu_0}{4\pi}\,\frac{\vec{j}\,(r')}{\left| r - r' \right|}\,dV'\,.$$

** Че (7) удовлетворява (6) може да се провери непосредствено.*

След като определихме чрез (7) векторния потенциал $\vec{A}(r)$, можем да изразим от (4) вектора на магнитната индукция $\vec{B}$:

$$\vec{B} = rot\,\vec{A} = rot\left(\int\limits_{V_\infty} \frac{\mu_0}{4\pi}\,\frac{\vec{j}\,(r')}{\left| r - r' \right|}\,dV' \right) = \int\limits_{V_\infty} \frac{\mu_0}{4\pi}\,rot\left(\frac{\vec{j}\,(r')}{\left| r - r' \right|} \right) dV'\,.$$

Нека за по-голяма компактност и прегледност на следващите записи да пресметнем отделно $rot\left(\dfrac{\vec{j}\,(r')}{\left| r - r' \right|} \right)$. За целта използваме формулата от векторния анализ

$$rot(u.U) = u\,rot U - U \times grad\, u\,,$$

в която скаларът $u = \dfrac{1}{\left| r - r^{/} \right|}$, а векторът $U = \vec{j}\,(r^{/})$. С прилагането на тази формула получаваме

$$rot\left(\frac{\vec{j}\,(r^{/})}{\left| r - r^{/} \right|} \right) = \frac{1}{\left| r - r^{/} \right|} rot\, \vec{j}\,(r^{/}) - \vec{j}\,(r^{/}) \times grad \frac{1}{\left| r - r^{/} \right|}\,.$$

При по-нататъшното преобразуване на горния израз използваме 2 неща:

1) ако за удобство положим $r = \left| \vec{r} - \vec{r}_a \right|$, и използваме формулата от векторното смятане $grad \dfrac{1}{r} = -\dfrac{1}{r^2} \cdot grad\, r = -\dfrac{1}{r^2} \cdot \vec{r}_0 = -\dfrac{1}{r^2} \cdot \dfrac{\vec{r}}{r} = -\dfrac{\vec{r}}{r^3}$, ще получим че

$$\boxed{grad \frac{1}{\left| r - r^{/} \right|} = -\frac{(\vec{r} - \vec{r}_a)}{\left| \vec{r} - \vec{r}_a \right|^3}}$$; и

2) понеже диференциалният оператор „rot" действа върху координатите $\vec{r}$, а векторът $\vec{j}\,(r^{/})$ не зависи от $\vec{r}$, а от $\vec{r}^{\,/}$, то очевидно $\boxed{rot\, \vec{j}\,(r^{/}) \equiv 0}$.

Замествайки тези две представяния, получаваме

$$rot\left(\frac{\vec{j}\,(r^{/})}{\left| r - r^{/} \right|} \right) = \frac{1}{\left| r - r^{/} \right|}.0 - \vec{j}\,(r^{/}) \times grad \frac{1}{\left| r - r^{/} \right|} \equiv -\vec{j}\,(r^{/}) \times \left(-\frac{(\vec{r} - \vec{r}_a)}{\left| \vec{r} - \vec{r}_a \right|^3} \right) = \vec{j}\,(r^{/}) \times \frac{(\vec{r} - \vec{r}_a)}{\left| \vec{r} - \vec{r}_a \right|^3}\,,$$

т.е. $rot\left(\dfrac{\vec{j}\,(r^{/})}{\left| r - r^{/} \right|} \right) = \vec{j}\,(r^{/}) \times \dfrac{(\vec{r} - \vec{r}_a)}{\left| \vec{r} - \vec{r}_a \right|^3}$. С така намерената $rot\left(\dfrac{\vec{j}\,(r^{/})}{\left| r - r^{/} \right|} \right)$ се връщаме на представянето за $\vec{B}$ и получаваме

$$\vec{B} = \int\limits_{V_\infty} \frac{\mu_0}{4\pi} rot\left(\frac{\vec{j}\,(r^{/})}{\left| r - r^{/} \right|} \right) dV^{/} = \int\limits_{V_\infty} \frac{\mu_0}{4\pi} \vec{j}\,(r^{/}) \times \frac{(\vec{r} - \vec{r}_a)}{\left| \vec{r} - \vec{r}_a \right|^3}\, dV^{/}\,, \text{ т.е.}$$

(8) $$\boxed{\vec{B} = \int\limits_{V_\infty} \frac{\mu_0}{4\pi} \vec{j}\,(r^{/}) \times \frac{(\vec{r} - \vec{r}_a)}{\left| \vec{r} - \vec{r}_a \right|^3}\, dV^{/}}.$$

Така полученият израз (8) за **индукцията на полето**, създадено от **стационарни токове**, е известен още като **закон на Био-Савар**.