Тема 11. Електростатично поле – основни закони и енергия

Определение: поле, създадено от неподвижни заряди, се нарича **електростатично поле**.

Уравненията на това поле следват от уравненията на Максуел

$$\left| \begin{aligned} & div\,\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}, \\ & rot\,\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \\ & div\,\vec{B} = 0, \\ & rot\,\vec{B} = \mu_0\,\vec{j} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}, \end{aligned} \right.$$

при условие, че

(1) $\dfrac{\partial \vec{E}}{\partial t} = 0, \qquad \dfrac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0, \qquad$ и $\qquad \vec{j} = \rho.\vec{V} = 0.$

Равенствата (1) изразяват **условието за статичност на зарядите**.

От (1) и от уравненията на Максуел следва

$$\left| \begin{aligned} & div\,\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}\,, \\ & rot\,\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \equiv 0\,, \\ & div\,\vec{B} = 0\,, \\ & rot\,\vec{B} = \mu_0\,\vec{j} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \equiv 0\,, \end{aligned} \right. \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} & (2) \quad \left| \begin{aligned} & div\,\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}\,, \\ & rot\,\vec{E} = 0\,. \end{aligned} \right. \\ & \left| \begin{aligned} & div\,\vec{B} = 0\,, \\ & rot\,\vec{B} = 0\,. \end{aligned} \right. \quad \Rightarrow \quad \boxed{\vec{B} = 0} \end{aligned}$$

Уравненията (2) описват напълно електростатичното поле. Очевидно $\vec{E} = \vec{E}(\vec{r})$, обаче $\vec{E} \neq \vec{E}(t)$, т.е. интензитетът на електростатичното поле не се мени с времето, но може да бъде различен в различни точки от пространството.

Както е известно векторът $\vec{E}$ може да се изрази посредством скаларния потенциал φ и векторния потенциал $\vec{A}$ чрез съотношението

$$\vec{E} = -\frac{\partial \vec{A}(\vec{r},t)}{\partial t} - grad\,\varphi\,.$$

Очевидно за електростатично поле, по силата на условието $\vec{E} \neq \vec{E}(t)$, следва да се приеме, че $\dfrac{\partial \vec{A}(\vec{r},t)}{\partial t} = 0$, вследствие на което получаваме

(3) $\boxed{\vec{E} = -grad\,\varphi}$.

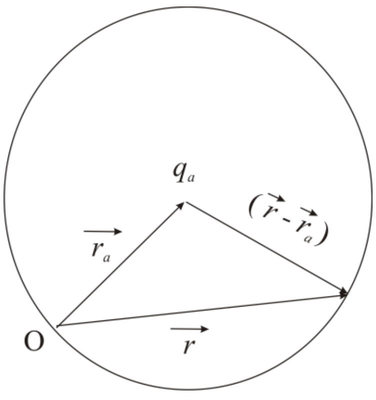
Нека заместим (3) в (2), и по-точно в $div\,\vec{E} = \dfrac{\rho}{\varepsilon_0}$:

$$div\,(-\,grad\,\varphi) = \frac{\rho}{\varepsilon_0}, \text{ т.е. } div\ grad\,\varphi = -\,\frac{\rho}{\varepsilon_0}\,.$$

Обаче $div\ grad\,\varphi = \nabla \cdot \nabla\ \varphi = \nabla^2\,\varphi = \Delta\varphi$, където $\Delta = \nabla^2$ се нарича **оператор на Лаплас**. Така достигаме до уравнението

(4) $\boxed{\Delta\,\varphi = -\,\dfrac{\rho}{\varepsilon_0}}$,

наречено **уравнение на Поасон**.



Нека определим интензитета на полето на неподвижен точков заряд q_a. Ще считаме, че този заряд е разположен в центъра на сферична повърхност с радиус $|\vec{r} - \vec{r}_a|$, заемаща област V от пространството.

Нека интегрираме (2) в областта V:

$$\int_V div\,\vec{E}\ dV = \int_V \frac{\rho}{\varepsilon_0}\ dV\,.$$

Обемният интеграл в лявата страна на горното равенство можем да представим чрез теоремата на Остроградски-Гаус от векторния анализ, а именно

$$\int_V div\,\vec{E}\ dV = \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S}\,,$$

където с S е обозначена повърхността на сферата. Същевременно за обемната плътност ρ на точковия заряд ще използваме представянето чрез δ-функция на Дирак

$\rho = q_a\, \delta(\vec{r} - \vec{r}_a)$.

След отчитането на тези 2 представяния получаваме

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \int_V \frac{q_a\, \delta(\vec{r} - \vec{r}_a)}{\varepsilon_0}\, dV \,.$$

Тъй като полето на точков заряд (*следва да*) притежава сферична симетрия, то можем да приемем, че във всяка точка от повърхността на сферата векторът на полето $\vec{E}$ и елементарният лицев вектор $d\vec{S}$ имат посоката на нормалата (*единичния нормален вектор*) $\vec{n}$ към сферата в тази точка, т.е.

(5) $\quad \vec{E} = \left|\vec{E}\right| . \vec{n}\,, \quad$ и $\quad d\vec{S} = \left|d\vec{S}\right| . \vec{n}\,,$

следователно $\vec{E} \cdot d\vec{S} = \left|\vec{E}\right| \cdot \left|d\vec{S}\right| \cdot \vec{n} \cdot \vec{n} = \left|\vec{E}\right| \cdot \left|d\vec{S}\right| \cdot \vec{n}^2 \equiv \left|\vec{E}\right| \cdot \left|d\vec{S}\right|$. Така получаваме още, че

$$\oint_S \left|\vec{E}\right| \cdot \left|d\vec{S}\right| = \frac{q_a}{\varepsilon_0} \int_V \delta(\vec{r} - \vec{r}_a)\, dV \equiv \frac{q_a}{\varepsilon_0}\,, \text{ понеже } \int_V \delta(\vec{r} - \vec{r}_a)\, dV = 1 \text{ при } \vec{r}_a \in V \,.$$

Тъй като $\left|\vec{E}\right| = const$ върху сферичната повърхност, то

$$\left|\vec{E}\right| \cdot \oint_S \left|d\vec{S}\right| = \frac{q_a}{\varepsilon_0}\,, \text{ или още, отчитайки, че } \oint_S \left|d\vec{S}\right| = S_{Ñôåðà} = 4\pi \cdot \left|\vec{r} - \vec{r}_a\right|^2$$

$$4\pi \cdot \left|\vec{E}\right| \cdot \left|\vec{r} - \vec{r}_a\right|^2 = \frac{q_a}{\varepsilon_0}\,,$$

откъдето следва представяне за големината на интензитета на полето на точковия заряд върху сферата

$$\left|\vec{E}\right| = \frac{q_a}{4\pi \cdot \varepsilon_0 \cdot \left|\vec{r} - \vec{r}_a\right|^2}\,,$$

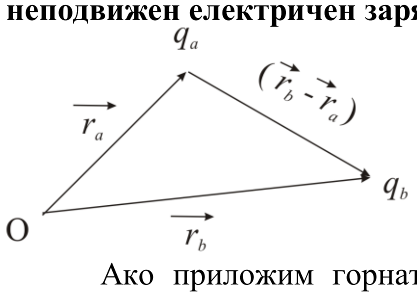
а с отчитане на (5)

$$\vec{E} = \frac{q_a \cdot \vec{n}}{4\pi \cdot \varepsilon_0 \cdot \left|\vec{r} - \vec{r}_a\right|^2} \,.$$

Тъй като единичният нормален вектор може да бъде представен във вида $\vec{n} = \dfrac{\vec{r} - \vec{r}_a}{\left|\vec{r} - \vec{r}_a\right|}$, то горната формула добива вида

(6) $$\boxed{\vec{E}(\vec{r}) = \frac{q_a \cdot (\vec{r} - \vec{r}_a)}{4\pi \cdot \varepsilon_0 \cdot \left|\vec{r} - \vec{r}_a\right|^3}}.$$

Равенство (6) изразява **закона на Кулон за интензитета на полето на точков неподвижен електричен заряд**.



Отчитайки факта, че електростатичното поле няма магнитна съставяща, т.е. $\vec{B} \equiv 0$, за **силата на Лоренц**, с която полето на точковия заряд q_a действа върху всеки друг заряд q ще имаме

$$\vec{F} = q \cdot \vec{E} + q \cdot \vec{V} \times \vec{B} \equiv q \cdot \vec{E} \,.$$

Ако приложим горната формула за заряд $q = q_b$ (*виж чертежа*), отстоящ на разстояние $\left|\vec{r}_b - \vec{r}_a\right|$ от заряда q_a, то за силата на взаимодействие между тях ще имаме

(7) $$\vec{F} = q_b \cdot \vec{E}_a = \frac{q_a \cdot q_b \cdot (\vec{r}_b - \vec{r}_a)}{4\pi \cdot \varepsilon_0 \cdot \left|\vec{r}_b - \vec{r}_a\right|^3} \,.$$

Равенство (7) изразява **закона на Кулон за силата на взаимодействие между два точкови електрични заряда**. Силата $\vec{F}$ може да бъде „+” или „-” в зависимост от знака на зарядите q_a и q_b.

Както вече видяхме за електростатично поле интензитетът $\vec{E}$ и потенциалът φ са свързани със съотношението $\vec{E} = -grad\,\varphi$.

Като се има предвид, че $\vec{E}(\vec{r}) = \dfrac{q_a \cdot (\vec{r} - \vec{r}_a)}{4\pi \cdot \varepsilon_0 \cdot |\vec{r} - \vec{r}_a|^3} \equiv \dfrac{q_a}{4\pi \cdot \varepsilon_0} \cdot \dfrac{(\vec{r} - \vec{r}_a)}{|\vec{r} - \vec{r}_a|^3}$, и се вземе под внимание съотношението $\vec{E} = -grad\,\varphi$, лесно се съобразява, че

(8) $$\varphi(\vec{r}) = \frac{q_a}{4\pi \cdot \varepsilon_0} \cdot \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}_a|} + const \equiv \frac{q_a}{4\pi \cdot \varepsilon_0 \cdot |\vec{r} - \vec{r}_a|} + const.$$

(* *В литературата този потенциал се нарича* ***Кулонов потенциал***)

Действително ако положим $r = |\vec{r} - \vec{r}_a|$, и използваме формулата от векторното смятане

$$grad\frac{1}{r} = -\frac{1}{r^2} \cdot grad\,r = -\frac{1}{r^2} \cdot \vec{r}_0 = -\frac{1}{r^2} \cdot \frac{\vec{r}}{r} = -\frac{\vec{r}}{r^3} \quad \rightarrow \quad -\frac{(\vec{r} - \vec{r}_a)}{|\vec{r} - \vec{r}_a|^3},$$

лесно можем да установим, че прилагането на съотношението $\vec{E} = -grad\,\varphi$ спрямо (8) води точно до коректното представяне (6) за $\vec{E}$.

Константата в (8) е без особено съществено значение, защото по принцип потенциалът е физична величина, определена с точност до адитивна константа, стойността на която може да бъде определена в зависимост от това къде (в коя точка) се приема, че потенциалът е нула. Логично е да се приеме, че $\varphi(r) \rightarrow 0$ при $r \rightarrow \infty$, следователно $const \rightarrow 0$ (т.е. приемаме, че константата е нула).

За **система от точкови заряди**, прилагайки принципа на суперпозицията, можем да запишем

(9) $$\vec{E}(\vec{r}) = \sum_a \frac{q_a \cdot (\vec{r} - \vec{r}_a)}{4\pi \cdot \varepsilon_0 \cdot |\vec{r} - \vec{r}_a|^3}, \text{ и}$$

(10) $$\varphi(\vec{r}) = \sum_a \frac{q_a}{4\pi \cdot \varepsilon_0 \cdot |\vec{r} - \vec{r}_a|}.$$

А за система от огромен брой заряди, които са разпределени не дискретно, а непрекъснато в дадена пространствена област V, сумирането в (9) и (10) се заменя с интегриране, при което за интензитета и потенциала на електростатичното поле, създадено от такива заряди, ще имаме

(11) $$\vec{E}(\vec{r}) = \int_V \frac{\rho(r^/) \cdot (r - r^/)}{4\pi \cdot \varepsilon_0 \cdot |r - r^/|^3} dV^/, \text{ и}$$

(12) $$\varphi(\vec{r}) = \sum_a \frac{\rho(r^/)}{4\pi \cdot \varepsilon_0 \cdot |r - r^/|} dV^/.$$

Съществува **теорема за единственост на решението на електростатичната задача**, според която интегралното представяне (12) за потенциала е **единственото решение на уравнението на Поасон** (4) $\boxed{\Delta\,\varphi = -\dfrac{\rho}{\varepsilon_0}}$ с област на решимост цялото пространство и гранично условие $\varphi_\infty \rightarrow 0$, както и в случай на ограничена в пространството област V, за който случай трябва да се знаят (дефинират) стойността на потенциала и на неговата нормална производна $\dfrac{\partial\varphi}{\partial n}$ върху границата S_V на областта (задача на Нойман).

Енергия на електростатично поле

Плътността на енергията w_E на електростатичното поле се определя от общата формула за плътност на електромагнитната енергия /формула (4) от Тема (10) /

$$w = \frac{\varepsilon_0 \vec{E}^2}{2} + \frac{\vec{B}^2}{2\mu_0},$$

в която отчитаме, че стационарно електрично поле $\vec{B} = 0$ и следователно

$$(13) \qquad w_E = \frac{\varepsilon_0 \vec{E}^2}{2} \; .$$

За да се определи енергията на електростатичното поле в цялото пространство V_∞, се пресмята обемния интеграл

$$(14) \qquad W_E = \int_{V_\infty} w_E \, dV = \int_{V_\infty} \frac{\varepsilon_0 \vec{E}^2}{2} \, dV \; .$$

За пресмятането на този интеграл използваме следното представяне за скаларния квадрат $\vec{E}^2$:

$$(*) \qquad \vec{E}^2 = \vec{E} \cdot \vec{E} = \vec{E} \cdot (-grad\,\varphi) = -\vec{E} \cdot grad\,\varphi,$$

а за определянето пък на $\vec{E} \cdot grad\,\varphi$ изхождаме от следното равенство във векторния анализ

$$div\,(\varphi \vec{E}) = \varphi\, div\, \vec{E} + \vec{E} \cdot grad\,\varphi,$$

откъдето изразяваме търсеното от нас

$$(**) \qquad \vec{E} \cdot grad\,\varphi = div\,(\varphi \vec{E}) - \varphi\, div\, \vec{E} \; .$$

Заместваме (**) в (*), а след това заместваме (*) в (14), в резултат от което получаваме

$$W_E = \int_{V_\infty} \frac{\varepsilon_0 \vec{E}^2}{2} \, dV = -\int_{V_\infty} \frac{\varepsilon_0 \, \vec{E} \cdot grad\,\varphi}{2} \, dV = -\int_{V_\infty} \frac{\varepsilon_0}{2} div\,(\varphi \vec{E})\, dV + \int_{V_\infty} \frac{\varepsilon_0}{2} \varphi \; div\, \vec{E} \; dV =$$

……. в последния интеграл отчитаме, че съгласно (2) $div\vec{E} = \rho / \varepsilon_0$ …….

$$= -\frac{\varepsilon_0}{2} \int_{V_\infty} div\,(\varphi \vec{E})\, dV + \frac{\varepsilon_0}{2} \int_{V_\infty} \varphi \, \frac{\rho}{\varepsilon_0} \, dV = -\frac{\varepsilon_0}{2} \int_{V_\infty} div\,(\varphi \vec{E})\, dV + \int_{V_\infty} \frac{\varphi \rho}{2} \, dV \; .$$

Накрая за обемния интеграл $\int_{V_\infty} div\,(\varphi \vec{E})\, dV$ прилагаме теоремата на Остроградски-Гаус от векторния анализ, според която

$$\int_{V_\infty} div\,(\varphi \vec{E})\, dV = \oint_{S_\infty} \varphi \vec{E} \cdot d\vec{S} \; .$$

Понеже така получения повърхнинен интеграл върху S_∞ се изразява чрез стойностите на полето върху S_∞, а те (съгласно граничните условия) са $\varphi_\infty = 0$ и $\vec{E}_{\infty=0}$, то очевидно този интеграл е равен на нула, с което изразът за енергията W_E на електростатичното поле добива вида

$$(15) \qquad W_E = \int_{V_\infty} \frac{\varphi \rho}{2} \, dV \; .$$

Формулите (14) и (15) определят **енергията на електростатичното поле на система от заряди в цялото пространство**.

За система от точкови заряди използваме представянето на обемната плътност на тези заряди чрез δ - функция на Дирак

$$\rho = \sum_a q_a \, \delta(\vec{r} - \vec{r}_a),$$

и след заместване в (15) получаваме

$$W_E = \int_{V_\infty} \frac{1}{2} \sum_a q_a \varphi(\vec{r}) \delta(\vec{r} - \vec{r}_a) \, dV = \frac{1}{2} \sum_a q_a \int_{V_\infty} \varphi(\vec{r}) \delta(\vec{r} - \vec{r}_a) \, dV = \sum_a \frac{q_a \, \varphi(\vec{r}_a)}{2} \; ,$$

където е използвано свойството на δ - функцията, че $\int_{V_\infty} \varphi(\vec{r}) \delta(\vec{r} - \vec{r}_a) \, dV = \varphi(\vec{r}_a)$.

И така формулата за **енергията на елекростатичното поле за система от точкови заряди** q_a добива вида

$$(16) \qquad W_E = \sum_a \frac{q_a \, \varphi(\vec{r}_a)}{2} \; ,$$

където $\varphi(\vec{r}_a)$ е потенциалът на полето, създадено от всички точкови заряди в точката $\vec{r}_a$, където се намира зарядът q_a. Този потенциал **за един точков заряд**, съгласно (8), е $\varphi\,(\vec{r}) = \dfrac{q_a}{4\pi \cdot \varepsilon_0 \cdot |\,\vec{r} - \vec{r}_a|}$, а за **система от точкови заряди** той е равен, съгласно (10), на

(10)☞ $$\varphi\,(\vec{r}) = \sum_a \frac{q_a}{4\pi \cdot \varepsilon_0 \cdot |\,\vec{r} - \vec{r}_a|}\,.$$

Формално с последната формула за потенциала $\varphi\,(\vec{r})$ може да се замести в (16) и да се получи удобно представяне за електростатичната енергия, изразено само чрез зарядите q_a и техните координати $\vec{r}_a$. Тук възниква, обаче, **проблем от принципен характер**. За случая на един заряд формула (16) дава следното коректно представяне за енергията (**собствена енергия)**

$$(17) \qquad W_E = \frac{q.\varphi}{2},$$

където φ е потенциалът на полето, създадено от частицата в точката, в която се намира самата тя.

От формулата за потенциала на полето на **система от точкови заряди**

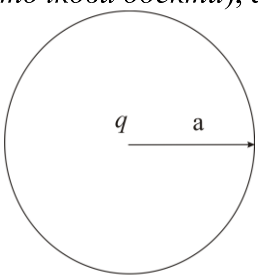
$$\varphi\,(\vec{r}) = \sum_a \frac{q_a}{4\pi \cdot \varepsilon_0 \cdot |\,\vec{r} - \vec{r}_a|}$$

се вижда, обаче, че потенциалът в коя да е точка $\vec{r}_a$, в която се намира някой от точковите заряди q_a, е безкрайно-голяма величина. Действително

$$\varphi\,(\vec{r}_a) = \sum_a \frac{q_a}{4\pi \cdot \varepsilon_0 \cdot |\,\vec{r}_a - \vec{r}_a|} \;\to\; \infty\,,$$

понеже знаменателят $|\,\vec{r}_a - \vec{r}_a| \to 0$.

Излиза че един заряд трябва да притежава **безкрайно голяма собствена енергия** (*енергията в точката* $\vec{r}_a$*, в която той се намира*), а следователно и **безкрайно голяма собствена маса**, което е **лишено от физичен смисъл**. Противоречието се получава, защото се **нарушават границите на приложимост на електродинамиката**. За да се избегне това противоречие частиците следва да се разглеждат **не като абстрактни точки** (*точкови обекти*), а като обекти с някаква **пространствена протяжност**.



Ето защо ще оценим разстоянието, **до което** електродинамиката се запазва като **логична** и **непротиворечива** теория. За целта най-напред определяме собствената електромагнитна енергия на една неподвижна заредена частица, имаща маса m. Тази собствена енергия, съгласно формулата на Айнщайн, е енергия на покой $\varepsilon = m \cdot c^2$.

От друга страна същата тази частица може да се разглежда като класически протяжен обект. Приемаме, че тя заема сферична област с радиус a и е хомогенно заредена. Електростатичната енергия на такъв обект е $W_e = \dfrac{q^2}{4\pi\varepsilon_0 a}$. Понеже тези две енергии (по своята физическа природа) съвпадат, то ще бъде в сила равенството

$$m \cdot c^2 = \frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0 a}.$$

Ако приложим горните разсъждения за конкретен обект, напр. електрон, то $m \to m_e$, $q \to e_0$, $a \to r_e$ (*класически радиус на електрона*), и горното равенство добива вида

$$m_e \cdot c^2 = \frac{e_0{}^2}{4\pi\varepsilon_0 r_e}, \text{ откъдето}$$

$$r_e = \frac{e_0{}^2}{4\pi\varepsilon_0 m_e \cdot c^2} \approx 2{,}8\,.10^{-15}\, m. \tag{18}$$

Определения по този начин **класически радиус на електрона** задава границите на приложимост на неквантовата електродинамика.

Съгласно (10) за потенциала на полето на система от точкови заряди в точка $\vec{r}_a$ ще имаме

$$\varphi\,(\vec{r}_a) = \sum_b \frac{q_b}{4\pi \cdot \varepsilon_0 \cdot |\vec{r}_b - \vec{r}_a|},$$

където за да се спазят границите на приложимост на електродинамиката е необходимо да се отхвърлят възможностите $b = a$, т.е. налага се изискването $a \neq b$. Ако с това представяне за потенциала заместим в (16), формулата за **енергията на елекростатичното поле на система от точкови заряди** q_a ще добие вида

$$\boxed{W_E = \sum_a \sum_b \frac{q_a\, q_b}{8\pi \cdot \varepsilon_0 \cdot |\vec{r}_b - \vec{r}_a|}}, \text{ при } \boxed{a \neq b}. \tag{19}$$

* **<u>Допълнение</u>**: ако заместим $\varphi\,(\vec{r}_a) = \sum_b \dfrac{q_b}{4\pi \cdot \varepsilon_0 \cdot |\vec{r}_b - \vec{r}_a|}$ в (16), **без** предварително да налагаме изискването $a \neq b$, то за **енергията на елекростатичното поле на система от точкови заряди** q_a ще получим представянето

$$W_E = \frac{1}{2} \sum_{\substack{a \\ a\neq b}} \sum_b \frac{q_a\, q_b}{4\pi \cdot \varepsilon_0 \cdot |\vec{r}_b - \vec{r}_a|} + \frac{1}{2} \sum_a \frac{q_a{}^2}{4\pi \cdot \varepsilon_0 \cdot |\vec{r}_a - \vec{r}_a|}.$$

Първият член (*в който индексите* a *и* b *са* ***различни***) представлява т.нар. **електростатична енергия на взаимодействието** на зарядите (*зависи от взаимното им разположение*). Този член **съвпада изцяло** с израза (19).

Вторият член (*в който на практика* $b = a$) е сбор от **собствените енергии** на всички точкови заряди. Този член не зависи от взаимното разположение на зарядите, **но** представлява сбор от **<u>безкрайно големите собствени енергии</u>** на всички заряди (т.е. той самият е също безкрайно голяма величина).

Поради невъзможността (<u>в рамките на класическата електродинамика</u>) да се определят (дефинират) коректно <u>собствените енергии на точкови заряди</u>, разглежданията се ограничават **само** до отчитане **енергията на взаимодействие**, т.е. величината, дефинирана коректно в (19), а членът, съдържащ безкрайно големите собствени енергии на зарядите, **не се разглежда** в класическата електродинамика. Той е обект на **квантовата електродинамика**.