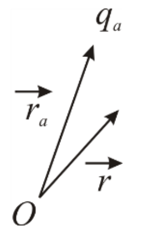
Плътност на тока. Уравнение на непрекъснатостта

Нека въведем величината **обемна плътност на заряда**, определена с равенството

(4) $\rho(\vec{r},t) = \lim\limits_{\Delta V \to 0} \dfrac{\Delta q}{\Delta V} = \dfrac{dq}{dV}$,

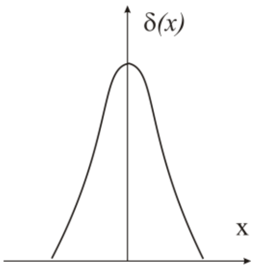
където Δq е електричният заряд в обем ΔV, а dq е зарядов елемент и може да се представи

(5) $dq = \rho\, dV$.



Понятието „обемна плътност на заряда” може да се използва и за описание на **точков(и) заряд(и)**. За целта се използва тримерната δ - **функция на Дирак** $\delta(\vec{r}-\vec{r}_a)$, имаща свойството

(6) $\int\limits_V \delta(\vec{r}-\vec{r}_a)\, dV = \begin{cases} 1, & \vec{r}_a \in V \\ 0, & \vec{r}_a \notin V \end{cases}$.



δ - функция на Дирак $\delta(x)$ има още свойството (*виж чертежа*)

$$\left| \begin{array}{l} \delta(x) \to \infty, \quad x \to 0 \\ \delta(x) \to 0, \quad x \neq 0 \end{array} \right. .$$

С помощта на δ - функция на Дирак обемната плътност на точков заряд може да се представи във вида

(7) $\rho_a = q_a\, \delta(\vec{r}-\vec{r}_a)$,

а за система от точкови заряди

(8) $\rho = \sum\limits_a q_a\, \delta(\vec{r}-\vec{r}_a) \equiv \sum\limits_a \rho_a$,

където сумирането се извършва по всички заряди, съставящи системата. Съотношението (8) изразява свойството „**адитивност**” на обемната плътност на заряда.

Въвеждаме величината **4-вектор на плътността на тока**, дефинирана със съотношението

(9) $j^\mu = \rho \dfrac{dx^\mu}{dt}$, за $\mu = 0, 1, 2, 3$.

Този 4-вектор може да се представи в стандартната за 4-вектори форма $j = (j^0, \vec{j})$, или още $j = (j^0, j^1, j^2, j^3)$, където $\vec{j} = (j^1, j^2, j^3)$ е добре известният при стационарни електрични полета 3-мерен вектор на плътността на тока.

С помощта на (9) можем да получим в явен вид компонентите на 4-вектор на плътността на тока:

- при $\mu = 0$ $\quad j^0 = \rho \dfrac{dx^0}{dt} = \rho \dfrac{d(c.t)}{dt} = \rho c$;

- при $\mu = 1$ $\quad j^1 = \rho \dfrac{dx^1}{dt} = \rho \dfrac{dx}{dt} = \rho V_x$;

- при $\mu = 2$ $\quad j^2 = \rho \dfrac{dx^2}{dt} = \rho \dfrac{dy}{dt} = \rho V_y$; и

- при $\mu = 3$ $\quad j^3 = \rho \dfrac{dx^3}{dt} = \rho \dfrac{dz}{dt} = \rho V_z$.

Тогава очевидно ще имаме

(10) $\vec{j}=(j^1,j^2,j^3)=\rho(V_z,V_y,V_z)\equiv\rho.\vec{V}$ - **обемна плътност на тока**.

Очевидно векторът $\vec{j}$, зададен чрез (10), определя във всяка точка посоката на скоростта на заряда и количеството преносим за единица време заряд.

С помощта на намерените в явен вид компоненти на 4-вектора на плътността на тока този 4-вектор може да бъде записан във вида

(11) $\boxed{j=(\rho.c,\ \vec{j})}$.

Като имаме предвид представянето (7) за обемната плътност на заряди, можем да запишем $\vec{j}$ чрез δ - функция на Дирак:

- за „ток”, обусловен от **един точков заряд**, обемната плътност на тока е

(12) $\vec{j}_a=q_a\vec{V}_a\,\delta(\vec{r}-\vec{r}_a)$, а

- за ток, обусловен от **система от точкови заряди**, обемната плътност на тока е

(13) $\vec{j}=\sum\limits_a\vec{j}_a=\sum\limits_a q_a\vec{V}_a\,\delta(\vec{r}-\vec{r}_a)$.

Под **уравнение за непрекъснатостта в диференциална форма** се разбира съотношението

(14) $\dfrac{\partial\rho}{\partial t}+div\,\vec{j}=0$.

То може да бъде записано чрез векторната операция **дивергенция**, приложена над 4-вектора на плътността на тока, а именно

(15) $\dfrac{\partial j^\mu}{\partial x^\mu}=0$, за $\mu=0,1,2,3$,

като по повтарящия се индекс „μ” се извършва сумиране, т.е.

(16) $\dfrac{\partial j^\mu}{\partial x^\mu}\equiv\dfrac{\partial j^0}{\partial x^0}+\dfrac{\partial j^1}{\partial x^1}+\dfrac{\partial j^2}{\partial x^2}+\dfrac{\partial j^3}{\partial x^3}=\dfrac{\partial(\rho.c)}{\partial(c.t)}+\dfrac{\partial j_x}{\partial x}+\dfrac{\partial j_y}{\partial y}+\dfrac{\partial j_z}{\partial z}\equiv\dfrac{\partial\rho}{\partial t}+div\,\vec{j}=0$.

Приложение към тема 8:

$$F^{01}\to x^0x^1=[\gamma(x'^0+\beta.x'^1)]\cdot[\gamma(x'^1+\beta.x'^0)]=$$

$$=\gamma^2[x'^0x'^1+x'^0\beta.x'^0+\beta.x'^1x'^1+\beta.x'^1.\beta.x'^0]\to\gamma^2[F'^{01}+\beta.F'^{00}+\beta.F'^{11}+\beta^2.F'^{10}]=$$

…….. обаче за антисиметричен тензор $F^{00}=F^{11}=0$, и още $F^{10}=-F^{01}$ …….

$$=\gamma^2[F'^{01}-\beta^2.F'^{01}]=F'^{01}\gamma^2[1-\beta^2]=F'^{01}\left[\frac{1}{\sqrt{1-V^2/c^2}}\right]^2\left[1-\frac{V}{c}\right]^2\equiv F'^{01}.$$

$$F^{02}\to x^0x^2=[\gamma(x'^0+\beta.x'^1)]\cdot x'^2=\gamma[x'^0\cdot x'^2+\beta.x'^1\cdot x'^2]\to\gamma[F'^{02}+\beta.F'^{12}].$$

$$F^{03}\to x^0x^3=[\gamma(x'^0+\beta.x'^1)]\cdot x'^3=\gamma[x'^0\cdot x'^3+\beta.x'^1\cdot x'^3]\to\gamma[F'^{03}+\beta.F'^{13}].$$

$$F^{12}\to x^1x^2=[\gamma(x'^1+\beta.x'^0)]\cdot x'^2=\gamma[x'^1\cdot x'^2+\beta.x'^0\cdot x'^2]\to\gamma[F'^{12}+\beta.F'^{02}].$$

$$F^{13}\to x^1x^3=[\gamma(x'^1+\beta.x'^0)]\cdot x'^3=\gamma[x'^1\cdot x'^3+\beta.x'^0\cdot x'^3]\to\gamma[F'^{13}+\beta.F'^{03}].$$

$$F^{23}\to x^2x^3=x'^2\cdot x'^3\to F'^{23}.$$

Тема 9. Уравнение на електромагнитното поле в ковариантна форма. Тримерна форма на уравненията на Максуел

Ще изведем уравненията на полето от принципа на най-малкото действие, като смятаме за известно движението на зарядите, които го създават. За целта е нужно да запишем (чрез постулиране) физически коректен израз за действието, имащо вида

(1) $S = S_ч + S_n + S_{вз}$,

където:

$S_ч = -\sum_ь m_a.c\int_1^2 ds_a$ - действие, съответстващо на система от свободни частици;

(2) $S_{вз} = -\sum_a q_a \int_1^2 A_\mu(x_a)\,dx_a^{\mu}$ - действие, отчитащо взаимодействието между полето и система от заряди;

S_n - действие за полето.

Определяме действието за полето S_n, налагайки му изисквания, произтичащи от общо-физически принципи:

① S_n трябва да бъде релативистически инвариантна величина (скалар);

② под знака на интеграла, с който се изразява S_n, трябва да стои диференциал;

③ S_n трябва да съдържа в себе си характеристика на полето. Логично е това да бъде 4-тензора на електромагнитното поле $F_{\mu\nu}$.

Обобщавайки всичко това постулираме, че

(3) $\boxed{S_n = -\frac{\varepsilon_0.c}{4}\int_\Omega F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}\,d\Omega}$,

където:

ε_0 - електрична константа на вакуума;

Ω - четиримерна пространствено-временна област.

В тема 7 бе показано, че величината $J_1 = F_{\mu\nu}.F^{\mu\nu}$ е инвариантна величина.

Лесно може да се покаже, че елементарната четиримерна пространствено-временна област

$$d\Omega = d^4x = dx^0dx^1dx^2dx^3 = c.dt\cdot dx.dy.dz = c.dt\cdot dV$$

е също инвариантна величина, т.е. $d\Omega = d\Omega^{/} = inv$.

Следователно действието (3) е релативистично инвариантна величина.

Заместваме (2) и (3) в (1) и получаваме следното представяне за действието

$(4^{/})$ $S = S_ч + S_n + S_{вз} = -\sum_ь m_a.c\int_1^2 ds_a - \sum_a q_a\int_1^2 A_\mu(x_a)\,dx_a^{\mu} - \frac{\varepsilon_0.c}{4}\int_\Omega F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}\,d\Omega$.

В $(4^{/})$величините A_μ и $F_{\mu\nu}$ се отнасят до полето, създадено от зарядите, т.е. A_μ и $F_{\mu\nu}$ зависят от положението (*в пространство-времето*) и от скоростите на зарядите.

Тъй като движението на зарядите се счита за известно (зададено), то първият член в дясната страна на $(4^{/})$, т.е. членът $S_÷ = -\sum_й m_a.c\int_1^2 ds_a$, може да бъде пропуснат, понеже неговата вариация ще се окаже равна на нула. Поради тази причина ще използваме следното представяне за действието

(4) $S = S_n + S_{вз} = -\sum_a q_a\int_1^2 A_\mu(x_a)\,dx_a^{\mu} - \frac{\varepsilon_0.c}{4}\int_\Omega F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}\,d\Omega$.

Вторият от двата интеграла в (4) е четирикратен интеграл по пространствено-временната област. Затова логично е да се опитаме да представим и първия интеграл (който е сума от интеграли по мировата линия) в същия 4-кратен интегрален вид:

За тази цел най-напред умножаваме въпросния сбор от интеграли $\sum_a q_a \int_1^2 A_\mu(x_a)\, dx_a{}^\mu$ със равния на 1 интеграл от δ -функцията на Дирак

$$\int_{V_\infty} \delta(\vec{r} - \vec{r}_a)\, dV,$$

където V_∞ е цялото 3-мерно пространство. В резултат това ще получим

$$\sum_a q_a \int_1^2 A_\mu(x_a)\, dx_a{}^\mu \int_{V_\infty} \delta(\vec{r} - \vec{r}_a)\, dV \frac{dt}{dt} = \int_t \int_{V_\infty} \sum_a q_a \delta(\vec{r} - \vec{r}_a) \frac{dx_a{}^\mu}{dt} A_\mu(x_a)\, dt\, dV \frac{c}{c} =$$

……… *използваме, че* $q_a \delta(\vec{r} - \vec{r}_a)$ и че $dt\, dV.c = d\Omega$ ………

$$= \int_\Omega \sum_a \rho_a \frac{dx_a{}^\mu}{dt} A_\mu \frac{d\Omega}{c} = \text{ ……… } \textit{използваме, че } \rho_a \frac{dx_a{}^\mu}{dt} = j_a{}^\mu \text{ ……… } = \int_\Omega \sum_a j_a{}^\mu A_\mu \frac{d\Omega}{c} =$$

……… *използваме, че* $\sum_a j_a{}^\mu A_\mu = j^\mu$ ………

$$= \int_\Omega j^\mu A_\mu \frac{d\Omega}{c}, \text{ т.е.}$$

$$\boxed{\sum_a q_a \int_1^2 A_\mu(x_a)\, dx_a{}^\mu = \int_\Omega j^\mu A_\mu \frac{d\Omega}{c}}.$$

С така намереното представяне за сбора от тези интеграли заместваме в (4) и получаваме представяне, допускащо обединение на двата интеграла

$$S = -\sum_a q_a \int_1^2 A_\mu(x_a)\, dx_a{}^\mu - \frac{\varepsilon_0.c}{4} \int_\Omega F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}\, d\Omega = -\int_\Omega j^\mu A_\mu \frac{d\Omega}{c} - \frac{\varepsilon_0.c}{4} \int_\Omega F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}\, d\Omega,$$

т.е.

(5) $$\boxed{S = -\int_\Omega \left(\frac{j^\mu A_\mu}{c} + \frac{\varepsilon_0.c}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \right) d\Omega}.$$

Това е представяне за действието, с помощта на което ще изведем уравненията на полето, изхождайки от вариационния принцип на най-малкото действие

(6) $\delta S = 0$.

Прилагайки (6) спрямо (5), получаваме

(7) $$\int_\Omega \left(\frac{j^\mu}{c} \delta A_\mu + \frac{\varepsilon_0.c}{4} \delta(F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}) \right) d\Omega = 0 \; .$$

Нека най-напред определим вариацията $\delta(F_{\mu\nu} F^{\mu\nu})$:

$$\delta(F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}) = (\delta F_{\mu\nu}) F^{\mu\nu} + F_{\mu\nu} (\delta F^{\mu\nu}) = 2\, (\delta F_{\mu\nu}) F^{\mu\nu} =$$

……. можем да използваме, че по дефиниция $F_{\mu\nu} = \frac{\partial A_\nu}{\partial x^\mu} - \frac{\partial A_\mu}{\partial x^\nu}$, следователно …….

$$= 2\, \delta\left(\frac{\partial A_\nu}{\partial x^\mu} - \frac{\partial A_\mu}{\partial x^\nu} \right) F^{\mu\nu} = 2\, \delta\left(\frac{\partial A_\nu}{\partial x^\mu} \right) F^{\mu\nu} - 2\, \delta\left(\frac{\partial A_\mu}{\partial x^\nu} \right) F^{\mu\nu} =$$

… можем да разменим индексите $\mu \Leftrightarrow \nu$ в израза $\delta\left(\frac{\partial A_\mu}{\partial x^\nu} \right) F^{\mu\nu}$ и да използваме, че $F_{\nu\mu} = -F_{\mu\nu}$, следователно …

$$= 2\, \delta\left(\frac{\partial A_\nu}{\partial x^\mu} \right) F^{\mu\nu} - 2\, \delta\left(\frac{\partial A_\nu}{\partial x^\mu} \right) F^{\nu\mu} = 2\, \delta\left(\frac{\partial A_\nu}{\partial x^\mu} \right) F^{\mu\nu} - 2\, \delta\left(\frac{\partial A_\nu}{\partial x^\mu} \right) (-F^{\mu\nu}) = 4\, \delta\left(\frac{\partial A_\nu}{\partial x^\mu} \right) F^{\mu\nu},$$

т.е. $\delta(F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}) = 4\, \delta\left(\frac{\partial A_\nu}{\partial x^\mu} \right) F^{\mu\nu}$.

С така намерената вариация на $\delta(F_{\mu\nu}F^{\mu\nu})$ заместваме в (7)

$$\int_\Omega \left(\frac{j^\mu}{c}\delta A_\mu + \frac{\varepsilon_0.c}{4}\delta(F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}) \right) d\Omega = \int_\Omega \left(\frac{j^\mu}{c}\delta A_\mu + \frac{\varepsilon_0.c}{4} 4\ \delta\left(\frac{\partial A_\nu}{\partial x^\mu}\right) F^{\mu\nu} \right) d\Omega = 0 \text{ , т.е.}$$

$$\int_\Omega \left(\frac{j^\mu}{c}\delta A_\mu + \varepsilon_0.c.\delta\left(\frac{\partial A_\nu}{\partial x^\mu}\right) F^{\mu\nu} \right) d\Omega = 0 \ .$$

Ако в израза $\delta\left(\frac{\partial A_\nu}{\partial x^\mu}\right)$ сменим последователността на операциите „вариране" (т.е. δ), и диференциране (т.е. $\frac{\partial}{\partial x^\mu}$), ще получим $\delta\left(\frac{\partial A_\nu}{\partial x^\mu}\right) \to \frac{\partial}{\partial x^\mu}\delta A_\nu$, което ще ни позволи да запишем

$$(8) \qquad \int_\Omega \left(\frac{j^\mu}{c}\delta A_\mu + \varepsilon_0.c.\delta\left(\frac{\partial A_\nu}{\partial x^\mu}\right) F^{\mu\nu} \right) d\Omega \to \int_\Omega \left(\frac{j^\mu}{c}\delta A_\mu + \varepsilon_0.c.\frac{\partial(\delta A_\mu)}{\partial x^\mu} F^{\mu\nu} \right) d\Omega = 0 .$$

Ако отчетем, че

$$\frac{\partial}{\partial x^\mu}(\delta A_\nu .F^{\mu\nu}) = \left(\frac{\partial(\delta A_\nu)}{\partial x^\mu} \right) .F^{\mu\nu} + (\delta A_\nu).\frac{\partial F^{\mu\nu}}{\partial x^\mu} ,$$

то очевидно $\frac{\partial(\delta A_\nu)}{\partial x^\mu}.F^{\mu\nu} = \frac{\partial}{\partial x^\mu}(\delta A_\nu .F^{\mu\nu}) - (\delta A_\nu).\frac{\partial F^{\mu\nu}}{\partial x^\mu}$. Заместваме така намереното представяне за $\frac{\partial(\delta A_\nu)}{\partial x^\mu}.F^{\mu\nu}$ в (8), и получаваме

$$\int_\Omega \left(\frac{j^\mu}{c}\delta A_\mu + \varepsilon_0.c.\left[\frac{\partial}{\partial x^\mu}(\delta A_\nu .F^{\mu\nu}) - (\delta A_\nu).\frac{\partial F^{\mu\nu}}{\partial x^\mu} \right] \right) d\Omega = 0 \text{ , т.е.}$$

$$\int_\Omega \frac{j^\mu}{c}\delta A_\mu \, d\Omega + \varepsilon_0.c.\int_\Omega \frac{\partial}{\partial x^\mu}(\delta A_\nu .F^{\mu\nu}) \, d\Omega - \varepsilon_0.c.\int_\Omega \frac{\partial F^{\mu\nu}}{\partial x^\mu}(\delta A_\nu)\, d\Omega = 0$$

За втория интеграл, т.е. интеграла $\int_\Omega \frac{\partial}{\partial x^\mu}(\delta A_\nu .F^{\mu\nu})\, d\Omega$, който всъщност е интеграл от 4-мерна дивергенция, се доказва чрез едно 4-мерно обобщение на теоремата на Остроградски-Гаус, че е равен на нула. С отчитането на този факт ще имаме

$$\int_\Omega \frac{j^\mu}{c}\delta A_\mu \, d\Omega - \varepsilon_0.c.\int_\Omega \frac{\partial F^{\mu\nu}}{\partial x^\mu}(\delta A_\nu)\, d\Omega = 0 \text{ , или още след замяната } j^\mu \delta A_\mu \to j^\nu \delta A_\nu$$

$$(9) \qquad \int_\Omega \left(\frac{j^\nu}{c} - \varepsilon_0.c.\frac{\partial F^{\mu\nu}}{\partial x^\mu} \right) \delta A_\nu \, d\Omega = 0 .$$

Понеже (9) трябва да бъде в сила при произволни вариации $\delta A_\nu \neq 0$, то остава да бъде равен на нула изразът

$$\left(\frac{j^\nu}{c} - \varepsilon_0.c.\frac{\partial F^{\mu\nu}}{\partial x^\mu} \right) \equiv 0 \text{ , т.е. } \frac{\partial F^{\mu\nu}}{\partial x^\mu} = \frac{1}{\varepsilon_0.c^2} j^\nu .$$

Ако положим

$$(10) \qquad \mu_0 = \frac{1}{\varepsilon_0.c^2}$$

и наречем тази величина **магнитна константа**, то последното уравнение добива вида

$$(11) \qquad \frac{\partial F^{\mu\nu}}{\partial x^\mu} = \mu_0 \, j^\nu \text{ за } \mu,\nu = 0, 1, 2, 3.$$

Очевидно (11) дава търсените от нас уравнения на полето (4 уравнения) в ковариантна форма на запис. Наричат се още **уравнения на Максуел**.

Тези 4 уравнения свързват тензора на ЕМ поле $F^{\mu\nu}$ (*т.е. полевите вектори* $\vec{E}$ *и* $\vec{B}$) с източниците j^{ν} на движещите се заряди. Обаче броят на уравненията (т.е. 4) е по-малък от броя на неизвестните величини (т.е. 6), определящи полето (*и това са точно шестте компоненти на векторите* $\vec{E}$ *и* $\vec{B}$). Това означава, че четирите уравнения (11) не са достатъчни за определяне на полето.

Още 4 уравнения в 4-мерна форма, имащи вид, аналогичен на (11), но хомогенни, могат да бъдат получени за дуалния 4-тензор $\tilde{F}^{\mu\nu}$, и те са

(12) $$\frac{\partial \tilde{F}^{\mu\nu}}{\partial x^{\mu}} = 0 \text{ за } \mu, \nu = 0, 1, 2, 3.$$

По този начин уравненията (1) и (12), т.е. общо 8 уравнения, са най-общите уравнения на полето в ковариантна форма.

Тримерна форма на уравненията на полето (уравненията на Максуел)

От практическа гледна точка по-удобна се явява тримерната форма на уравненията на Максуел, тъй като (*както ще бъде показано по-долу*) в тях ще участват наблюдаеми величини – полевите вектори $\vec{E}$ и $\vec{B}$.

За получаване на тази тримерна форма на уравненията се използват уравненията (11), както и представянията на 4- тензора на ЕМ поле $F^{\mu\nu}$ и на 4-плътността на тока j^{ν} във вида

$$F^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -E_x/c & -E_y/c & -E_z/c \\ E_x/c & 0 & -B_z & B_y \\ E_y/c & B_z & 0 & -B_x \\ E_z/c & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad j^{\nu} = (\rho.c, \vec{j}).$$

❶ При $\nu = 0$ и $\mu = 0, 1, 2, 3$ от (11) ще имаме

$$\frac{\partial F^{00}}{\partial x^0} + \frac{\partial F^{10}}{\partial x^1} + \frac{\partial F^{20}}{\partial x^2} + \frac{\partial F^{30}}{\partial x^3} = \mu_0 \, j^0,$$

или тъй като $F^{00} = 0$

$$\frac{\partial F^{10}}{\partial x} + \frac{\partial F^{20}}{\partial y} + \frac{\partial F^{30}}{\partial z} = \mu_0 \, \rho.c \text{, т.е. } \frac{\partial\left(\frac{E_x}{c}\right)}{\partial x} + \frac{\partial\left(\frac{E_y}{c}\right)}{\partial y} + \frac{\partial\left(\frac{E_z}{c}\right)}{\partial z} = \frac{1}{\varepsilon_0 c^2}\rho.c \,.$$

След умножаване на последното равенство с „c" получаваме

$$\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}, \text{ или още}$$

(13) $\boxed{div\,\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}}$ - уравнение на Максуел в тримерна форма.

❷ При $\nu = 1$ и $\mu = 0, 1, 2, 3$ от (11) ще имаме

$$\frac{\partial F^{01}}{\partial x^0} + \frac{\partial F^{11}}{\partial x^1} + \frac{\partial F^{21}}{\partial x^2} + \frac{\partial F^{31}}{\partial x^3} = \mu_0 \, j^1,$$

и понеже $F^{11} = 0$

$$\frac{\partial\left(-\frac{E_x}{c}\right)}{c.\partial t} + \frac{\partial B_z}{\partial y} + \frac{\partial(-B_y)}{\partial z} = \mu_0 \, j_x, \quad \text{т.е.} \quad -\frac{1}{c^2}\frac{\partial E_x}{\partial t} + \left(\frac{\partial B_z}{\partial y} - \frac{\partial B_y}{\partial z}\right) = \mu_0 \, j_x \,.$$

Понеже $\dfrac{\partial B_z}{\partial y} - \dfrac{\partial B_y}{\partial z} = (rot\,\vec{B})_x$, то последното уравнение може да бъде записано още

$$-\frac{1}{c^2}\frac{\partial E_x}{\partial t} + (rot\,\vec{B})_x = \mu_0\, j_x, \quad \text{т.е.} \quad \boxed{(rot\,\vec{B})_x = \mu_0\, j_x + \frac{1}{c^2}\frac{\partial E_x}{\partial t}}.$$

❸ и ❹ За $\nu = 2$ и $\nu = 3$, при $\mu = 0, 1, 2, 3$ от (11) ще получим съответно

$$\boxed{(rot\,\vec{B})_y = \mu_0\, j_y + \frac{1}{c^2}\frac{\partial E_y}{\partial t}} \quad \text{и} \quad \boxed{(rot\,\vec{B})_z = \mu_0\, j_z + \frac{1}{c^2}\frac{\partial E_z}{\partial t}}$$

Обобщавайки последните 3 равенства в едно векторно равенство, ще имаме

$$(14) \qquad \boxed{rot\,\vec{B} = \mu_0\,\vec{j} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}}.$$

Ако искаме да определим векторите $\vec{E}$ и $\vec{B}$, трябва да знаем съответно $div\,\vec{E}$, $rot\,\vec{E}$ и $div\,\vec{B}$, $rot\,\vec{B}$. Дотук знаем $div\,\vec{E}$ от (13) и $rot\,\vec{B}$ от (14). За да определим „липсващите” $rot\,\vec{E}$ и $div\,\vec{B}$, използваме, че по определение

$$(*) \qquad \vec{E} = -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - grad\,\varphi, \quad \text{и}$$

$$(**) \qquad \vec{B} = rot\,\vec{A}\,.$$

☞ Нека приложим векторната операция „***rot***” спрямо уравнението (*)

$$rot\,\vec{E} = -rot\left(\frac{\partial \vec{A}}{\partial t}\right) - rot\,(grad\,\varphi) = -\frac{\partial (rot\,\vec{A})}{\partial t} = \ldots \text{ от } (**) \ldots = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

понеже $rot\,(grad\,\varphi) = \nabla \times \nabla\varphi \equiv 0$. По този начин доказахме, че

$$(15) \qquad \boxed{rot\,\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}}.$$

☞ Нека приложим векторната операция „***div***” спрямо уравнението (**)

$$div\,\vec{B} = div\,(rot\,\vec{A}) \equiv 0,$$

понеже $div\,(rot\,\vec{A}) = \nabla \cdot (\nabla \times \vec{A}) \equiv 0$. По този начин доказахме, че

$$(16) \qquad \boxed{div\,\vec{B} = 0}.$$

Уравненията (13) – (16), или всъщност уравненията

$$\left|\begin{aligned} & div\,\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}, \\ & rot\,\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \\ & div\,\vec{B} = 0, \\ & rot\,\vec{B} = \mu_0\,\vec{j} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}, \end{aligned}\right.$$

са уравнения на електромагнитното поле в тримерна форма. Те се наричат **уравнения на Максуел**.

Тема 10. Енергия на електромагнитното поле

Както стана ясно електромагнитното поле се определя еднозначно от полевите вектори $\vec{E}$ и $\vec{B}$, удовлетворяващи уравненията на Максуел. За да получим израз за енергията на ЕМ поле, използваме следните две уравнения на Максуел

$$rot\,\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}$$

$$rot\,\vec{B} = \mu_0\,\vec{j} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} \equiv \mu_0\,\vec{j} + \varepsilon_0\mu_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} \qquad \text{(понеже } \mu_0 = \frac{1}{\varepsilon_0 c^2}\text{).}$$

Умножаваме **скаларно** първото от тях с $\vec{B}$, а второто – с $\vec{E}$, след което почленно ги вадим, в резултат от което получаваме

$$\vec{B}\cdot rot\,\vec{E} - \vec{E}\cdot rot\,\vec{B} = -\left(\vec{B}\cdot\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}\right) - \mu_0\,(\vec{E}\cdot\vec{j}) - \varepsilon_0\mu_0\left(\vec{E}\cdot\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}\right).$$

Тук следва да отчетем, че:

☞ $\vec{B}\cdot rot\,\vec{E} - \vec{E}\cdot rot\,\vec{B} = div\,(\vec{E}\times\vec{B})$;

☞ $\vec{B}\cdot\dfrac{\partial\vec{B}}{\partial t} = \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial\vec{B}^2}{\partial t}$ и аналогично $\vec{E}\cdot\dfrac{\partial\vec{E}}{\partial t} = \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial\vec{E}^2}{\partial t}$.

С отчитането на тези представяния ще имаме

$$div\,(\vec{E}\times\vec{B}) = -\frac{1}{2}\frac{\partial\vec{B}^2}{\partial t} - \mu_0\,(\vec{E}\cdot\vec{j}) - \varepsilon_0\mu_0\,\frac{1}{2}\frac{\partial\vec{E}^2}{\partial t} = -\mu_0\,(\vec{E}\cdot\vec{j}) - \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}(\varepsilon_0\mu_0\vec{E}^2 + \vec{B}^2)\,.$$

Ако двете страни на горното равенство разделим с магнитната константа μ_0 и след това интегрираме върху областта V_∞ (т.е. цялото тримерно пространство), ще получим

$$\int\limits_{V_\infty} div\,\frac{1}{\mu_0}(\vec{E}\times\vec{B})\,dV = -\int\limits_{V_\infty}(\vec{E}\cdot\vec{j})\,dV - \int\limits_{V_\infty}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\varepsilon_0\vec{E}^2}{2} + \frac{\vec{B}^2}{2\mu_0}\right)dV\,.$$

Обемният интеграл в лявата страна на горното равенство изразяваме посредством теоремата на Гаус-Остроградски от векторния анализ, а именно

$$(*)\qquad \int\limits_{V_\infty} div\,\frac{1}{\mu_0}(\vec{E}\times\vec{B})\,dV = \oint\limits_{S_\infty}\frac{(\vec{E}\times\vec{B})}{\mu_0}\cdot d\vec{S}\,.$$

А съгласно формула (13) от тема № 8 за тока, обусловен от **система от точкови заряди**, обемната плътност на тока е

$$\vec{j} = \sum_a \vec{j}_a = \sum_a q_a\,\vec{V}_a\,\delta(\vec{r} - \vec{r}_a)\,,$$

следователно

$$\int\limits_{V_\infty}(\vec{E}\cdot\vec{j})\,dV = \int\limits_{V_\infty}\left(\vec{E}\cdot\sum_a q_a\,\vec{V}_a\,\delta(\vec{r}-\vec{r}_a)\right)dV = \sum_a\int\limits_{V_\infty}[q_a\cdot\vec{E}\cdot\vec{V}_a\,\delta(\vec{r}-\vec{r}_a)]\,dV = \sum_a q_a\vec{V}_a\cdot\vec{E}\,,$$

където е отчетено, че $\int\limits_{V_\infty}\delta(\vec{r}-\vec{r}_a)\,dV = 1$.

Всяко едно от произведенията ($q_a\cdot\vec{V}_a\cdot\vec{E}$), както бе показано в тема № 6, дава изменението $\dfrac{d\varepsilon_a}{d\,t} = q_a\,\vec{E}\cdot\vec{V}_a$ на механичната енергия на ***a***-тия заряд, следователно сумата $\sum\limits_a q_a\vec{V}_a\cdot\vec{E}$ дава изменението за единица време на пълната механична енергия на системата от заряди, намиращи се в областта V_∞, т.е.

$$(**)\qquad \sum_a q_a\vec{V}_a\cdot\vec{E} = \sum_a\frac{d\varepsilon_a}{dt}\,.$$

Заместваме (*) и (**) в изходното равенство, и получаваме

(1) $$\oint_{S_\infty} \frac{(\vec{E}\times\vec{B})}{\mu_0}\cdot d\vec{S} = -\sum_a \frac{d\varepsilon_a}{dt} - \int_{V_\infty} \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\varepsilon_0 \vec{E}^2}{2} + \frac{\vec{B}^2}{2\mu_0}\right) dV .$$

Но съгласно граничните условия полето в безкрайност, т.е. върху точките от повърхността S_∞, е равно на нула, което ще рече, че както $\vec{E}_\infty$, така и $\vec{B}_\infty$, а следователно и $(\vec{E}\times\vec{B})_\infty$ са равни на нула, което означава, че целият интеграл в лявата страна на (1) е нула. Така от (1) получаваме

$$\sum_a \frac{d\varepsilon_a}{dt} + \int_{V_\infty} \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\varepsilon_0 \vec{E}^2}{2} + \frac{\vec{B}^2}{2\mu_0}\right) dV = 0 \text{, т.е.}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left\{ \int_{V_\infty}\left(\frac{\varepsilon_0 \vec{E}^2}{2} + \frac{\vec{B}^2}{2\mu_0}\right) dV + \sum_a \varepsilon_a \right\} = 0 .$$

Ако означим

$\varepsilon = \sum_a \varepsilon_a$ **- пълна механична енергия на зарядите**, и

(2) $$W = \int_{V_\infty}\left(\frac{\varepsilon_0 \vec{E}^2}{2} + \frac{\vec{B}^2}{2\mu_0}\right) dV$$ **- енергия на ЕМ поле в цялото пространство**, то

горното равенство добива още вида

(3) $$\frac{d}{dt}(W+\varepsilon) = 0 ,$$

изразяващ **закона за запазване на енергията на системата поле-частици в цялото пространство**. Равенство (3) изразява факта, че сборът от механичната енергия на зарядите и енергията на полето, създадено от тях, е **<u>неизменна величина</u>**.

Величината

(4) $$w = \frac{\varepsilon_0 \vec{E}^2}{2} + \frac{\vec{B}^2}{2\mu_0} ,$$

участваща като подинтегрална функция в (2), се нарича **плътност** (обемна) **на електромагнитното поле**, и дава **енергията на полето в единица обем** от пространството, заемано от това поле. С въвеждането на обемната плътност на енергията можем да запишем (2) във вида

(2$^/$) $$W = \int_{V_\infty} w \, dV .$$

Обемната плътност w на енергията на полето може да се представи още като сбор от 2 обемни плътности

(5^А) $$w_E = \frac{\varepsilon_0 \vec{E}^2}{2} ,$$ и (5^Б) $$w_M = \frac{\vec{B}^2}{2\mu_0} ,$$

наричани съответно обемни плътности на енергията на **електричното** и на **магнитното** полета, т.е.

$$w = w_E + w_M .$$

Нека отново се върнем на полученото по-горе представяне

$$div(\vec{E}\times\vec{B}) = -\mu_0\,(\vec{E}\cdot\vec{j}) - \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}(\varepsilon_0\mu_0\vec{E}^2 + \vec{B}^2) ,$$

и нека отново двете страни на горното равенство разделим с магнитната константа μ_0, но след това интегрираме не върху областта V_∞ (т.е. цялото тримерно пространство), а върху ограничена (крайна) пространствена област V, в резултат от което ще получим

$$\int_V div\frac{1}{\mu_0}(\vec{E}\times\vec{B})\, dV = -\int_V (\vec{E}\cdot\vec{j})\, dV - \int_V \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\varepsilon_0 \vec{E}^2}{2} + \frac{\vec{B}^2}{2\mu_0}\right) dV .$$

Обемният интеграл в лявата страна на горното равенство отново изразяваме посредством теоремата на Гаус-Остроградски от векторния анализ, а именно

$$(***) \qquad \int_V div \frac{1}{\mu_0}(\vec{E}\times\vec{B})\, dV = \oint_S \frac{(\vec{E}\times\vec{B})}{\mu_0}\cdot d\vec{S}\,,$$

а изразът в дясната страна на горното уравнение ще бъде равен на взетата със знак „-„ скорост на изменение с времето на пълната енергия $(W+\varepsilon)$ на системата „поле-частици", т.е.

$$(****) \qquad -\int_V (\vec{E}\cdot\vec{j})\, dV - \int_V \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\varepsilon_0 \vec{E}^2}{2} + \frac{\vec{B}^2}{2\mu_0}\right) dV = -\frac{d}{d\,t}(W+\varepsilon)\,.$$

Така с отчитане на (***) и (****) получаваме

$$\oint_S \frac{(\vec{E}\times\vec{B})}{\mu_0}\cdot d\vec{S} = -\frac{d}{d\,t}(W+\varepsilon)\,.$$

В случая на ограничена пространствена област V, обаче, полето върху повърхността S на тази област не е нула (както би било при S_∞), поради което повърхнинният интеграл в лявата страна на горното равенство е различен от нула! Ако за подинтегралната функция на този интеграл въведем означението

(6) $\qquad \vec{S} = \dfrac{1}{\mu_0}(\vec{E}\times\vec{B})$ - **вектор на Умов-Пойтинг**, то горното равенство може да се запише във вида

(7) $\qquad \dfrac{d}{d\,t}(W+\varepsilon) = -\oint_S \vec{S}\cdot d\vec{S}$ - **уравнение за баланса на енергията във област** V.

Тъй като изразът в лявата страна на (7) представлява изменението на пълната енергия $(W+\varepsilon)$ на полето и частиците за единица време в дадената област V, то величината $\oint_S \vec{S}\cdot d\vec{S}$ следва да се разглежда като **поток на енергията на полето** през повърхността S, което означава, че векторът на Умов-Пойтинг $\vec{S}$ е равен на повърхнинната плътност на този енергетичен поток.

С други думи $\vec{S}$ **характеризира процеса на разпространение на енергията на ЕМ поле**:

- **посоката** на $\vec{S}$ дава **посоката на разпространение на ЕМ енергия**, а

- **големината** на $\vec{S}$ дава енергията на ЕМ поле, преминала за единица време през единица площ, перпендикулярна на $\vec{S}$.

След всички тези пояснения на уравнението (7) за баланса на енергията може да се даде следната **интерпретация**:

Изменението за единица време $\dfrac{d}{d\,t}(W+\varepsilon)$ *на енергията на системата "поле + частици" е за сметка на енергетичния поток* $-\oint_S \vec{S}\cdot d\vec{S}$ *през повърхността* S *на тази област.*

Уравнението (7) за баланса на енергията във област V може да бъде записано още във вида

$$(7^{/}) \qquad \frac{dW}{d\,t} = -\frac{d\varepsilon}{d\,t} - \oint_S \vec{S}\cdot d\vec{S}\,.$$

В този си вид това уравнение показва, че **изменението за единица време** $\dfrac{dW}{d\,t}$ на **енергията на ЕМ поле** в ограничена област V е за сметка на **работата** (*за единица време*)

$\frac{d\varepsilon}{d\,t}$ **на електричното поле над частиците**, както и за сметка на **<u>енергетичния поток</u>** $\left(-\oint_S \vec{S}\cdot d\vec{S}\right)$ през повърхността S на тази област.

Знакът "-" пред $\frac{d\varepsilon}{d\,t}$ е поради това, че работата на електричните сили над частиците води до **намаляване на енергията на полето** $\frac{dW}{d\,t}$ (*с други думи когато* $\varepsilon\uparrow$, *то* $W\downarrow$, *и обратно, когато* $\varepsilon\downarrow$, *то* $W\uparrow$). Казано още по-просто **когато полето върши работа** (над зарядите) **енергията му намалява**.

Що се касае до **приноса на енергетичния поток** $\left(-\oint_S \vec{S}\cdot d\vec{S}\right)$ към изменението за единица време $\frac{dW}{d\,t}$ на енергията на ЕМ поле, може да се каже, че:

А) когато $\vec{S}$ и $d\vec{S}$ са в **една и съща посока**, т.е. имаме "**изтичане**", т.е. "*<u>исток</u>*" на ЕМ енергия, то интегралът (потокът) $\oint_S \vec{S}\cdot d\vec{S}$ е **положителен**, обаче приносът му $\left(-\oint_S \vec{S}\cdot d\vec{S}\right)$ е **отрицателен**, т.е. в този случай имаме "**загуба**" на ЕМ енергия и е логично енергията $\frac{dW}{d\,t}$ на полето да намалее;

Б) а когато $\vec{S}$ и $d\vec{S}$ са в **различни посоки**, т.е. имаме "**втичане**", т.е. "*<u>сток</u>*" на ЕМ енергия, то интегралът (потокът) $\oint_S \vec{S}\cdot d\vec{S}$ е **отрицателен**, обаче приносът му $\left(-\oint_S \vec{S}\cdot d\vec{S}\right)$ е **положителен**, т.е. в този случай имаме "**прираст**" на ЕМ енергия и е логично енергията $\frac{dW}{d\,t}$ на полето да нарасне.