Тема 7. Ковариантна форма на уравненията на движение. Тензор на електромагнитното поле

Изведените уравнения на движение на частица в ЕМ поле са **релативистично инвариантни** (*т.е. те са в сила спрямо произволна ИОС*), обаче **не са ковариантни**, т.е. двете страни на тези уравнения **не са** 4-тензори от даден ранг. Необходимостта от търсене на **ковариантна форма на запис на уравненията на движение** се обяснява с няколко причини:

а) тримерният запис на уравненията на движение (*какъвто имаме до момента*) все още **не доказва** напълно (*и явно*) релативистичната инвариантност;

б) ковариантната форма позволява с помощта на трансформационни формули за ковариантни 4-тензори да се намерят **релативистичните закони за трансформация на векторите на полето** $\vec{E}$ **и** $\vec{B}$ при смяна на ИОС.

Проблемът с ковариантната форма на уравненията на движение се решава чрез въвеждането на един **4-тензор** $F_{\mu\nu}$, наречен **тензор на електромагнитното поле**, чиито компоненти се изразяват чрез компонентите на ковариантния 4-потенциал A_μ посредством съотношението

(1) $$\boxed{F_{\mu\nu} = \frac{\partial A_\nu}{\partial x^\mu} - \frac{\partial A_\mu}{\partial x^\nu}}, \text{ за } \mu, \nu = 0, 1, 2, 3.$$

Нека припомним, че:

☞ **4-радиус-векторът** X^μ е 4-вектор с компоненти $X \equiv (x^0, x^1, x^2, x^3) = (ct, x, y, z)$;

☞ **4-потенциалът** A^μ е 4-вектор, който се изразява посредством **скаларния** φ и **векторния** $\vec{A}$ **потенциали** във вида

$$A=\left(\frac{\varphi}{c},\vec{A}\right)\equiv(A^0,A^1,A^2,A^3)=\left(\frac{\varphi}{c},A_x,A_y,A_z\right).$$

Чрез потенциалите φ и $\vec{A}$ се изразяват и **полевите вектори** $\vec{E}$ и $\vec{B}$:

(*) $$\vec{E}(\vec{r},t)=-\frac{\partial\vec{A}(\vec{r},t)}{\partial t}-grad\,\varphi(\vec{r},t)\text{, т.е.}$$

$$\boxed{E_x=-\frac{\partial A_x}{\partial t}-\frac{\partial\varphi}{\partial x}},\quad \boxed{E_y=-\frac{\partial A_y}{\partial t}-\frac{\partial\varphi}{\partial y}},\quad \boxed{E_z=-\frac{\partial A_z}{\partial t}-\frac{\partial\varphi}{\partial z}},$$

и

(**) $$\vec{B}(\vec{r},t)=rot\,\vec{A}(\vec{r},t)\equiv\nabla\times\vec{A}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ A_x & A_y & A_z\end{vmatrix}\text{, т.е.}$$

$$\boxed{B_x=\frac{\partial A_z}{\partial y}-\frac{\partial A_y}{\partial z}},\quad \boxed{B_y=\frac{\partial A_x}{\partial z}-\frac{\partial A_z}{\partial x}},\quad \boxed{B_z=\frac{\partial A_y}{\partial x}-\frac{\partial A_x}{\partial y}}.$$

Нека отбележим, че $F_{\mu\nu}$ е <u>**антисиметричен тензор**</u>, т.е. $\boxed{F_{\nu\mu}=-F_{\mu\nu}}$, и следователно следва да притежава **матрично представяне** от вида

$$F_{\mu\nu}=\begin{pmatrix}0 & F_{01} & F_{02} & F_{03}\\ -F_{01} & 0 & F_{12} & F_{13}\\ -F_{02} & -F_{12} & 0 & F_{23}\\ -F_{03} & -F_{13} & -F_{23} & 0\end{pmatrix}.$$

Нека припомним още, че в алгебрата на тензорите се използват т.нар. операции „**сваляне**” и „**качване**” на индекс(и), като се следва едно общо <u>**правило**</u>: когато индексът е „0” (т.е. **временен индекс**), знакът на компонентата на тензора **не се променя**, <u>обаче</u> когато индексът е 1, 2 или 3 (т.е. **пространствен индекс**), то знакът на компонентата на тензора **се променя**.

След всичко казано дотук можем да пристъпим към намирането на компонентите на 4-тензора на електромагнитното поле с помощта на (1):

$$F_{01}=\frac{\partial A_1}{\partial x^0}-\frac{\partial A_0}{\partial x^1}=\ \dots\ \textit{вдигаме индексите на } A\ \dots\ =-\frac{\partial A^1}{\partial x^0}-\frac{\partial A^0}{\partial x^1}=$$

$$=-\frac{\partial A_x}{\partial(c.t)}-\frac{\partial(\varphi/c)}{\partial x}=\frac{1}{c}\left(-\frac{\partial A_x}{\partial t}-\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)=\ \dots\text{ от (*) }\dots\ =\frac{1}{c}E_x=\frac{E_x}{c}\text{, т.е. }\boxed{F_{01}=\frac{E_x}{c}}.$$

По аналогичен начин се доказва, че $\boxed{F_{02}=\frac{E_y}{c}}$ и $\boxed{F_{03}=\frac{E_z}{c}}$.

$$F_{12}=\frac{\partial A_2}{\partial x^1}-\frac{\partial A_1}{\partial x^2}=\ \dots\ \textit{вдигаме индексите на } A\ \dots\ =-\frac{\partial A^2}{\partial x^1}+\frac{\partial A^1}{\partial x^2}=$$

$$=-\frac{\partial A_y}{\partial x}+\frac{\partial A_x}{\partial y}=-\left(\frac{\partial A_y}{\partial x}-\frac{\partial A_x}{\partial y}\right)=\ \dots\text{ от (**) }\dots\ =-B_z\equiv-(rot\,\vec{A})_z\text{, т.е. }\boxed{F_{12}=-B_z}.$$

По аналогичен начин определяме още

$$F_{13}=\frac{\partial A_3}{\partial x^1}-\frac{\partial A_1}{\partial x^3}=\ \dots\ \textit{вдигаме индексите на } A\ \dots\ =-\frac{\partial A^3}{\partial x^1}+\frac{\partial A^1}{\partial x^3}=$$

$$=-\frac{\partial A_z}{\partial x}+\frac{\partial A_x}{\partial z}=\quad\dots\text{ от (**) }\dots\quad =B_y\equiv(rot\,\vec{A})_y\text{, т.е. }\boxed{F_{13}=B_y}.$$

$$F_{23} = \frac{\partial A_3}{\partial x^2} - \frac{\partial A_2}{\partial x^3} = \text{ ... } \textit{вдигаме индексите на } A \text{ ....} \quad = -\frac{\partial A^3}{\partial x^2} + \frac{\partial A^2}{\partial x^3} =$$

$$= -\frac{\partial A_z}{\partial y} + \frac{\partial A_y}{\partial z} = -\left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}\right) = \ldots \text{ от (**) } \ldots = -B_x \equiv -(rot\,\vec{A})_x \text{, т.е. } \boxed{F_{23} = -B_x}.$$

И така, определихме всичките 6 на брой независими компоненти на антисиметричния 4-тензор на ЕМ. Останалите 6 се получават от правилото за антисиметричност $\boxed{F_{\nu\mu} = -F_{\mu\nu}}$. Следователно 4-тензорът на ЕМ може да се запише в следния явен вид

$$(2) \qquad F_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & F_{01} & F_{02} & F_{03} \\ -F_{01} & 0 & F_{12} & F_{13} \\ -F_{02} & -F_{12} & 0 & F_{23} \\ -F_{03} & -F_{13} & -F_{23} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & E_x/c & E_y/c & E_z/c \\ -E_x/c & 0 & -B_z & B_y \\ -E_y/c & B_z & 0 & -B_x \\ -E_z/c & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix}.$$

С помощта на правилата за „вдигане” на индекси 4-тензорът на ЕМ поле може да бъде записан в следната контравариантна форма

$$(3) \qquad F^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -E_x/c & -E_y/c & -E_z/c \\ E_x/c & 0 & -B_z & B_y \\ E_y/c & B_z & 0 & -B_x \\ E_z/c & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix}.$$

Накратко можем да запишем, че $F_{\mu\nu} = \left(\frac{\vec{E}}{c}, \vec{B}\right)$ и $F^{\mu\nu} = \left(-\frac{\vec{E}}{c}, \vec{B}\right)$.

От (2) се вижда, че компонентите на векторите на полето $\vec{E}$ и $\vec{B}$ се явяват компоненти на 4-тензора на електромагнитното поле $F_{\mu\nu}$.

От теорията на 4-тензорите е известно, че всеки антисиметричен 4-тензор може да се преобразува в **дуален** нему 4-тензор. Нека означим дуалния на $F_{\mu\nu}$ 4-тензор със $\tilde{F}_{\mu\nu}$. Връзката между двата тензора се дава с равенствата

$$\tilde{F}_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\varepsilon^{\mu\nu\lambda\sigma}F_{\lambda\sigma},$$

където с $\varepsilon^{\mu\nu\lambda\sigma}$ са обозначени т.нар. **символи на Леви-Чевита**, за които е в сила представянето

$$\varepsilon^{\mu\nu\lambda\sigma} = \begin{cases} 0, & \textit{при два равни индекса,} \\ 1, & \textit{при четна пермутация от индексите,} \\ -1, & \textit{при нечетна пермутация от индексите.} \end{cases}$$

Оказва се, че на практика за осъществяването на тази трансформация $F \to \tilde{F}$ е достатъчно да се извършат следните две покомпонентни замени: $\frac{\vec{E}}{c} \to \vec{B}$ и $\vec{B} \to -\frac{\vec{E}}{c}$. В резултат на това за дуалния на $F_{\mu\nu}$ 4-тензор получаваме

$$(5) \qquad \tilde{F}^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -B_x & -B_y & -B_z \\ B_x & 0 & E_z/c & -E_y/c \\ B_y & -E_z/c & 0 & E_x/c \\ B_z & E_y/c & -E_x/c & 0 \end{pmatrix}.$$

Въвеждането на дуалния 4-тензор $\tilde{F}^{\mu\nu}$ не е самоцелно – с негова помощ се въвеждат (*получават*) две величини, явяващи се **инварианти на ЕМ поле**. Тези инварианти са:

(6) $\quad J_1 = F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} = -2\cdot\dfrac{E_2}{c^2} + 2\cdot B^2$; и

(7) $\quad J_2 = \tilde{F}_{\mu\nu}\tilde{F}^{\mu\nu} = -\dfrac{4}{c}(\vec{E}\cdot\vec{B})$.

Тема 8. Трансформации на Лоренц за векторите на полето. Плътност на тока. Уравнение на непрекъснатостта

Както вече бе споменато, трансформационните закони за векторите на полето $\vec{E}$ и $\vec{B}$ могат да бъдат получени с помощта на трансформационните закони за 4-тензори. Тъй като компонентите на векторите $\vec{E}$ и $\vec{B}$ участват в 4-тензора на електромагнитното поле, логично е да се опитаме да получим трансформациите на Лоренц за векторите на полето с помощта на трансформационните закони за антисиметричния 4-тензор $F_{\mu\nu}$.

Затова нека най-напред получим трансформационните закони за 6-те независими компоненти на антисиметричния 4-тензор $F^{\mu\nu}$ в контравариантен запис. За извеждането на тези трансформационни закони се приема (използва), че при смяна на ИОС всяка контравариантна компонента на $F^{\mu\nu}$ се трансформира така, както се трансформира произведението от съответните компоненти на два контравариантни 4-вектора. А както е известно трансформациите на Лоренц за контравариантен 4-вектор се дават с равенствата

$$\left|\begin{array}{l} x^0 = \gamma(x'^0 + \beta.x'^1) \\ x^1 = \gamma(x'^1 + \beta.x'^0) \\ x^2 = x'^2 \\ x^3 = x'^3 \end{array}\right., \quad \text{където } \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\dfrac{V^2}{c^2}}} \text{ и } \beta = \frac{V}{c}.$$

Така можем да получим последователно (*доказателството им е реализирано в Приложение, дадено в края на въпроса*) следните трансформационните закони за 6-те независими компоненти на антисиметричния 4-тензор $F^{\mu\nu}$ в контравариантен запис:

$$(1)\quad \left|\begin{array}{l} F^{01} = F'^{01} \\ F^{02} = \gamma[F'^{02} + \beta.F'^{12}] \\ F^{03} = \gamma[F'^{03} + \beta.F'^{13}] \\ F^{12} = \gamma[F'^{12} + \beta.F'^{02}] \\ F^{13} = \gamma[F'^{13} + \beta.F'^{03}] \\ F^{23} = F'^{23} \end{array}\right.$$

където $\Phi^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} \Phi^{00} & \Phi^{01} & \Phi^{02} & \Phi^{03} \\ \Phi^{10} & \Phi^{11} & \Phi^{12} & \Phi^{13} \\ \Phi^{20} & \Phi^{21} & \Phi^{22} & \Phi^{23} \\ \Phi^{30} & \Phi^{31} & \Phi^{32} & \Phi^{33} \end{pmatrix}$, т.е. първият индекс е индекс на реда, а вторият – на стълба.

Ако вземем под внимание, че

$$F^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -E_x/c & -E_y/c & -E_z/c \\ E_x/c & 0 & -B_z & B_y \\ E_y/c & B_z & 0 & -B_x \\ E_z/c & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix} \text{ и } F'^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -E_x'/c & -E_y'/c & -E_z'/c \\ E_x'/c & 0 & -B_z' & B_y' \\ E_y'/c & B_z' & 0 & -B_x' \\ E_z'/c & -B_y' & B_x' & 0 \end{pmatrix},$$

то от 6-те трансформационни закона (1) се получават следните 6 равенства

❶ $F^{01} = F'^{01} \Rightarrow E_x/c = E_x'/c$, т.е. $\boxed{E_x = E'_x}$.

❷ $F^{02} = \gamma[F'^{02} + \beta.F'^{12}] \Rightarrow -\dfrac{E_y}{c} = \gamma\left\{\left[-\dfrac{E'_y}{c}\right] + \dfrac{V}{c}.[-B'_z]\right\} \quad \Big|\cdot(-c)$, т.е.

$\boxed{E_y = \gamma\,(E'_y + V.B'_z)}$.

❸ $F^{03} = \gamma [F^{/\,03} + \beta . F^{/\,13}] \;\Rightarrow\; -\dfrac{E_z}{c} = \gamma \left\{ \left[-\dfrac{E^{/}{}_z}{c} \right] + \dfrac{V}{c}.B^{/}{}_y \right\} \qquad \Big| \cdot (-c)$, т.е.

$\boxed{E_z = \gamma \; (E^{/}{}_z - V.B^{/}{}_y)}$.

❹ $F^{12} = \gamma [F^{/\,12} + \beta . F^{/\,02}] \;\Rightarrow\; -B_z = \gamma \left\{ -B^{/}{}_z + \dfrac{V}{c}. \left[-\dfrac{E^{/}{}_y}{c} \right] \right\} \qquad \Big| \cdot (-1)$, т.е.

$\boxed{B_z = \gamma \left\{ B^{/}{}_z + \dfrac{V}{c^2}.E^{/}{}_y \right\}}$.

❺ $F^{13} = \gamma [F^{/\,13} + \beta . F^{/\,03}] \;\Rightarrow\; B_y = \gamma \left\{ B^{/}{}_y + \dfrac{V}{c} \left[-\dfrac{E^{/}{}_z}{c} \right] \right\}$, т.е.

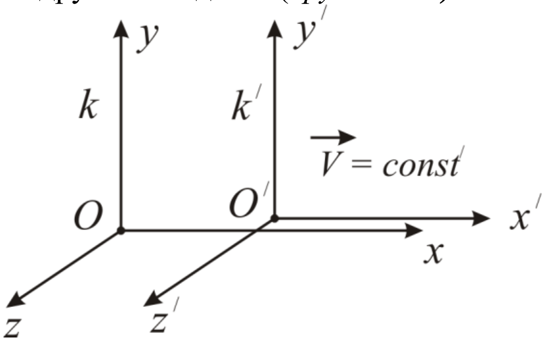
$\boxed{B_y = \gamma \left\{ B^{/}{}_y - \dfrac{V}{c^2}.E^{/}{}_z \right\}}$.

❻ $F^{23} = F^{/\,23} \;\Rightarrow\; -B_x = -B^{/}{}_x$, т.е. $\boxed{B_x = B^{/}{}_x}$.

И така, трансформациите на Лоренц за векторите на електромагнитното поле имат вида:

$$
(2) \qquad \left|
\begin{array}{l}
E_x = E^{/}{}_x , \\[2mm]
E_y = \gamma \; (E^{/}{}_y + V.B^{/}{}_z) \equiv \dfrac{E^{/}{}_y + V.B^{/}{}_z}{\sqrt{1 - V^2/c^2}} , \\[2mm]
E_z = \gamma \; (E^{/}{}_z - V.B^{/}{}_y) \equiv \dfrac{E^{/}{}_z - V.B^{/}{}_y}{\sqrt{1 - V^2/c^2}} ; \quad \text{è} \\[2mm]
B_x = B^{/}{}_x , \\[2mm]
B_y = \gamma \left\{ B^{/}{}_y - \dfrac{V}{c^2}.E^{/}{}_z \right\} \equiv \dfrac{B^{/}{}_y - \dfrac{V}{c^2}.E^{/}{}_z}{\sqrt{1 - V^2/c^2}} , \\[2mm]
B_z = \gamma \left\{ B^{/}{}_z + \dfrac{V}{c^2}.E^{/}{}_y \right\} \equiv \dfrac{B^{/}{}_z + \dfrac{V}{c^2}.E^{/}{}_y}{\sqrt{1 - V^2/c^2}} .
\end{array}
\right.
$$

Трансформациите на Лоренц (2) показват **единната природа на електромагнитното поле**, но разкриват и една негова важна **<u>особеност</u>** - **ЕМ поле е относително**, т.е. то има една стойност за един наблюдател (*една ИОС*) и друга стойност за друг наблюдател (*друга ИОС*).



Тъй като формулите (2) са изведени за случая на т.нар. **специални трансформации** на Лоренц, за които скоростта на системата $K^{/}$ спрямо системата K е $\vec{V} = (V,0,0)$, то очевидно могат да се въведат **успоредни** ($\|$) и **перпендикулярни** ($\perp$) на $\vec{V}$ „компоненти” на полевите вектори $\vec{E}$ и $\vec{B}$, а именно

$\vec{E}_{\|} = (E_x, 0, 0)$ и $\vec{E}_{\perp} = (0, E_y, E_z)$, като $\boxed{\vec{E} = \vec{E}_{\|} + \vec{E}_{\perp}}$;

$\vec{B}_{\parallel} = (B_x, 0, 0)$ и $\vec{B}_{\perp} = (0, B_y, B_z)$, като $\boxed{\vec{B} = \vec{B}_{\parallel} + \vec{B}_{\perp}}$.

Очевидно същото представяне по ($\parallel$) и ($\perp$) спрямо $\vec{V}$ „компоненти" може да се приложи и в ИОС K', т.е за „примованите" координати.

$\vec{E}'_{\parallel} = (E'_x, 0, 0)$ и $\vec{E}'_{\perp} = (0, E'_y, E'_z)$, като $\vec{E}' = \vec{E}'_{\parallel} + \vec{E}'_{\perp}$;

$\vec{B}'_{\parallel} = (B'_x, 0, 0)$ и $\vec{B}'_{\perp} = (0, B'_y, B'_z)$, като $\vec{B}' = \vec{B}'_{\parallel} + \vec{B}'_{\perp}$.

Ако запишем трансформациите на Лоренц (2) с помощта на така въведените „компоненти", то те ще имат вида на следните векторни равенства

(3) $$\left| \begin{aligned} &\vec{E}_{\parallel} = \vec{E}'_{\parallel} \\ &\vec{E}_{\perp} = \gamma[\vec{E}'_{\perp} - \vec{V} \times \vec{B}'_{\perp}] \end{aligned} \right. \quad \text{и} \quad \left| \begin{aligned} &\vec{B}_{\parallel} = \vec{B}'_{\parallel} \\ &\vec{B}_{\perp} = \gamma\left(\vec{B}'_{\perp} + \frac{1}{c^2}[\vec{V} \times \vec{E}'_{\perp}] \right) \end{aligned} \right. .$$

Вижда се, че при смяна на ИОС „компонентите" $\vec{E}_{\parallel}$ и $\vec{B}_{\parallel}$, които са насочени по посока на скоростта $\vec{V}$, **не се изменят**.

Може да се докаже и едно неочевидно свойство: ако напр. спрямо системата K' полето е само електрично (т.е. $\vec{B}' = 0$), или само магнитно (т.е. $\vec{E}' = 0$), то и в двата случая относно системата K електричното и магнитното полета са взаимно перпендикулярни ($\vec{E} \perp \vec{B}$). Действително:

1.) Допускаме, че полето в K' е **само електрично**, т.е. че $\boxed{\vec{B}' = 0}$. Това ще означава, че $\vec{B}'_{\parallel} = 0$ и $\vec{B}'_{\perp} = 0$. Тогава от (3) ще имаме

$$\left| \begin{aligned} &\vec{E}_{\parallel} = \vec{E}'_{\parallel} \\ &\vec{E}_{\perp} = \gamma \vec{E}'_{\perp} \end{aligned} \right. \quad \text{и} \quad \left| \begin{aligned} &\vec{B}_{\parallel} = 0 \\ &\vec{B}_{\perp} = \gamma \frac{1}{c^2}[\vec{V} \times \vec{E}'_{\perp}] \end{aligned} \right. .$$

Ако изразим $\vec{E}'_{\perp} = \dfrac{\vec{E}_{\perp}}{\gamma}$ и заместим в израза за $\vec{B}_{\perp}$, ще получим

$$\vec{B}_{\perp} = \gamma \frac{1}{c^2}[\vec{V} \times \vec{E}'_{\perp}] = \gamma \frac{1}{c^2}[\vec{V} \times \frac{\vec{E}_{\perp}}{\gamma}] = \frac{1}{c^2}[\vec{V} \times \vec{E}_{\perp}] .$$

Тогава, отчитайки че $\vec{B}_{\parallel} = 0$, ще имаме

$$\vec{B} = \vec{B}_{\parallel} + \vec{B}_{\perp} = \frac{1}{c^2}[\vec{V} \times \vec{E}_{\perp}] + 0 \equiv \frac{1}{c^2}[\vec{V} \times \vec{E}_{\perp}],$$

откъдето следва, че действително $\vec{B} \perp \vec{E}$.

2.) Допускаме, че полето в K' е **само магнитно**, т.е. че $\boxed{\vec{E}' = 0}$. Това ще означава, че $\vec{E}'_{\parallel} = 0$ и $\vec{E}'_{\perp} = 0$. Тогава от (3) ще имаме

$$\left| \begin{aligned} &\vec{E}_{\parallel} = 0 \\ &\vec{E}_{\perp} = -\gamma[\vec{V} \times \vec{B}'_{\perp}] \end{aligned} \right. \quad \text{и} \quad \left| \begin{aligned} &\vec{B}_{\parallel} = \vec{B}'_{\parallel} \\ &\vec{B}_{\perp} = \gamma \vec{B}'_{\perp} \end{aligned} \right. .$$

Ако изразим $\vec{B}'_{\perp} = \dfrac{\vec{B}_{\perp}}{\gamma}$ и заместим в израза за $\vec{E}_{\perp}$, ще получим

$$\vec{E}_{\perp} = -\gamma[\vec{V} \times \vec{B}'_{\perp}] = -\gamma[\vec{V} \times \frac{\vec{B}_{\perp}}{\gamma}] = -[\vec{V} \times \vec{B}_{\perp}] .$$

Тогава, отчитайки че $\vec{E}_{\parallel} = 0$, ще имаме

$$\vec{E} = \vec{E}_{\parallel} + \vec{E}_{\perp} = 0 - [\vec{V} \times \vec{B}_{\perp}] \equiv -[\vec{V} \times \vec{B}_{\perp}],$$

откъдето отново следва, че действително $\vec{E} \perp \vec{B}$.

В сила е и твърдение, обратно на току-що доказаното, а именно: ако относно някоя система K полевите вектори $\vec{E}$ и $\vec{B}$ СА взаимно перпендикулярни ($\vec{E} \perp \vec{B}$), но не равни по големина, то съществува такава система $K^{/}$, спрямо която полето е **само електрично** ($\vec{B}^{/} = 0$), или **само магнитно** ($\vec{E}^{/} = 0$).