Тема 6. Електромагнитни взаимодействия в релативистичната механика. Движение на частица в зададено електромагнитно поле

За получаване на уравненията на движение се използва вариационния принцип на Хамилтон, според който за **истинско движение** (по физична траектория) се приема движението по тази от множеството възможни траектории, за която **действието** S **има минимум**, т.е. **вариацията на действието е нула**

$\delta S = 0$.

За целта е необходимо по възможно най-коректен начин да се дефинира величината „**действие**". Приема се, че за система, състояща се от **електромагнитно поле** (*за краткост – поле*) и **частици**, действието се определя чрез представянето

(1) $S = S_ч + S_п + S_{вз}$,

където:

$S_ч$ - действието за частици, считани за свободни (*действие, зависещо само от свойствата на частиците*). То се определя чрез постулиране и се изразява посредством пространствено-времения интервал s чрез съотношението $S_ч = -mc\int_1^2 ds$;

$S_п$ - действие, зависещо само от свойствата на полето (*действие за полето*);

$S_{вз}$ - частта от действието, описваща взаимодействието на частиците с електромагнитното поле.

$S_п$ и $S_{вз}$, подобно на известното вече $S_ч$, се определят чрез постулиране. При това тъй като полето е зададено (*счита се за зададено*), то $S_п$ не играе никаква роля при разглеждания проблем, защото дава константен (неизменен) принос към лагранжиана, който принос при съставянето на уравненията на Лагранж (чрез диференциране) се елиминира (изчезва) напълно. За удобство ще считаме дори, че $S_п$ е известно.

За определянето на $S_{вз}$ чрез постулиране ще наложим следните изисквания:

1.) $S_{вз}$ следва да бъде инвариантна величина (*скалар*);

2.) $S_{вз}$ следва да се изразява чрез интеграл, под знака на който може да стои диференциал от I степен; и

3.) $S_{вз}$ следва да съдържа характеристики (*величини*), отнасящи се до **заряда** (големина, знак и др) и до **полето**.

За дефинирането (*чрез постулиране*) на действието $S_{вз}$ се налага да се въведе и дефинира един нов 4-вектор, наречен **4-потенциал**. Този 4-вектор се представя в следния стандартен (*за 4-вектори*) вид

$A^\mu = (A^0, \vec{A})$,

компонентите на който са съответно:

☞ $A^0 = \dfrac{\varphi}{c}$, където φ - **<u>скаларен</u> потенциал на ЕМ поле**;

☞ $\vec{A}$ - **<u>магнитен</u> векторен потенциал на ЕМ поле.**

В общия случай φ и $\vec{A}$ зависят от координатите и от времето, т.е. $\varphi = \varphi(\vec{r}, t)$ и $\vec{A} = \vec{A}(\vec{r}, t)$.

С помощта на 4-потенциала A действието $S_{вз}$ се представя (постулира) във вида

(3) $$S_{вз} = -\int_1^2 q\, A \cdot dx ,$$

където с $dx = (dx^0, dx^1, dx^2, dx^3) \equiv (c.dt, d\,\vec{r})$ е обозначен 4-векторът на безкрайно-малкото преместване по мировата линия от състояние (1) до състояние (2).

Знакът „-„ се поставя, за да се отчете заряда на електрона, а величината ($A \cdot dx$), фигурираща в (3), следва да се разглежда като **скаларно произведение** на два **4-вектора**.

Заместваме намерените представяния за $S_ч$ (2) и за $S_{вз}$ (3) в (1), и получаваме ($S_п$ *не ни е необходимо*):

(4) $$S = -mc\int_1^2 ds - \int_1^2 q\, A \cdot dx .$$

Интегралите в (4) се вземат **по мировата линия** в моменти (1) и (2) съответно, следователно действието (4), изразено посредством лагранжиана на системата „частици-поле", ще се представи още

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L\ d\,t .$$

За безкрайно-малкия пространствено-временен интервал ds използваме познатото съотношение

$$d\,s = c.\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}.d\,t\ ,$$

а скаларното произведение ($A \cdot dx$) представяме както следва

$$A \cdot dx = A^0 \cdot dx^0 - \vec{A} \cdot d\vec{x} = \left(\frac{\varphi}{c}\right) \cdot c.d\,t - \vec{A} \cdot \frac{d\vec{x}}{d\,t} \cdot d\,t = \varphi \cdot d\,t - \vec{A} \cdot \vec{V} \cdot d\,t \equiv (\varphi - \vec{A} \cdot \vec{V}) \cdot d\,t .$$

Заместваме тези два компонента в (4) и получаваме

(5) $$S = -mc\int_{t_1}^{t_2} c.\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}.d\,t\ - \int_{t_1}^{t_2} q\,(\varphi - \vec{A} \cdot \vec{V}) \cdot d\,t = -mc^2 \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}.d\,t\ - \int_{t_1}^{t_2} [q\,\varphi - q(\vec{A} \cdot \vec{V})] \cdot d\,t$$

или още

(5 $^/$) $$\boxed{S = -\int_{t_1}^{t_2} \left[mc^2 \sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}} + q\,\varphi - q(\vec{A} \cdot \vec{V}) \right] d\,t}.$$

Сравнявайки (5 $^/$) с представянето $\boxed{S = \int_{t_1}^{t_2} L\ d\,t}$ стигаме до заключението, че **функцията на Лагранж**, която описва адекватно движението на един (или повече) **заряд**(и) в **ЕМ поле** се дава с израза

(6) $$L = -mc^2 \sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}} - q\,\varphi + q(\vec{A} \cdot \vec{V}) .$$

След като **лагранжианът** на системата „**частица-поле**" е известен, можем да пристъпим към прилагането на стандартния лагранжев формализъм за определяне **уравненията на движение** (уравнения на Лагранж), имащи вида

$$\frac{d}{d\,t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0,\ \text{за}\ i = 1, 2, ..., s ,$$

където s е броя на степените на свобода на частицата.

Величината

(7) $$\vec{P}=\frac{\partial L}{\partial \vec{v}}$$

е **релативистичният импулс** на частицата, а **енергията** ε на релативистката частица се дава с

(8) $$\varepsilon=\frac{\partial L}{\partial \vec{v}}\cdot\vec{V}-L\,.$$

Ако в качеството на обобщени координати вземем декартовите координати на частицата, то уравнението на Лагранж (*във векторен запис*) ще има вида

(9) $$\frac{d}{d\,t}\frac{\partial L}{\partial \vec{v}}-\frac{\partial L}{\partial \vec{r}}=0\,.$$

Нека определим $\vec{P}$ и ε от (7) и (8):

$$\vec{P}=\frac{\partial L}{\partial \vec{v}}=\frac{\partial}{\partial \vec{v}}\left(-mc^2\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}-q\,\varphi+q(\vec{A}\cdot\vec{V})\right)=-\frac{mc^2}{2}\frac{1}{\sqrt{1-V^2/c^2}}\left(-\frac{2.\vec{V}}{c^2}\right)+q\,\vec{A}\text{, т.е.}$$

(10) $$\boxed{\vec{P}=\frac{m.\vec{V}}{\sqrt{1-V^2/c^2}}+q\,\vec{A}},$$

като очевидно **първият член** в дясната страна на (10) е равен на **импулса** $\vec{p}$ **на свободна релативистка частица**

(11) $$\vec{p}=\frac{m.\vec{V}}{\sqrt{1-V^2/c^2}}\ ,$$

а **вторият член** отчита **<u>взаимодействието</u>** на частицата (*имаща заряд* q) **с ЕМ поле**, характеризиращо се с магнитен векторен потенциал $\vec{A}$. С отчитането на (11) обобщеният импулс на частицата в ЕМ поле ще се представи във вида

(12) $$\boxed{\vec{P}=\vec{p}+q\,\vec{A}}.$$

Енергията ε на релативистката частица се дава с

$$\varepsilon=\frac{\partial L}{\partial \vec{v}}\cdot\vec{V}-L=\left(\frac{m.\vec{V}}{\sqrt{1-V^2/c^2}}+q\,\vec{A}\right)\cdot\vec{V}-\left(-mc^2\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}-q\,\varphi+q(\vec{A}\cdot\vec{V})\right)=$$

$$=\frac{m.V^2}{\sqrt{1-V^2/c^2}}+q\,(\vec{A}\cdot\vec{V})+mc^2\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}+q\,\varphi-q\,(\vec{A}\cdot\vec{V})=\frac{m.V^2}{\sqrt{1-V^2/c^2}}+mc^2\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}+q\,\varphi=$$

$$=\frac{m.V^2}{\sqrt{1-V^2/c^2}}+mc^2\sqrt{1-V^2/c^2}\,\frac{\sqrt{1-V^2/c^2}}{\sqrt{1-V^2/c^2}}+q\,\varphi=\frac{m.V^2+m.c^2-m.c^2(V^2/c^2)}{\sqrt{1-V^2/c^2}}+q\,\varphi\,,$$

т.е.

(13) $$\boxed{\varepsilon=\frac{m.c^2}{\sqrt{1-V^2/c^2}}+q\,\varphi}.$$

Очевидно енергията на частица, движеща се в ЕМ поле, представлява сбор от енергията $\dfrac{m.c^2}{\sqrt{1-V^2/c^2}}$ на свободна релативистка частица, и енергията $q\,\varphi$, обусловена от електричното взаимодействие между частицата и полето, имащо скаларен потенциал φ.

Накрая остана да определим уравнението на движение на частицата в ЕМ поле, като за тази цел ще използваме уравнението на Лагранж (9), т.е.

$$\frac{d}{d\,t}\frac{\partial L}{\partial \vec{v}}-\frac{\partial L}{\partial \vec{r}}=0\,.$$

Нека най-напред определим производните:

$$\frac{\partial L}{\partial \vec{r}} = grad\ L = grad\left(-mc^2\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}} - q\,\varphi + q(\vec{A}\cdot\vec{V})\right) = -\ q.\ grad\ \varphi + q.\ grad\,(\vec{A}\cdot\vec{V})\,.$$

За да определим $grad\,(\vec{A}\cdot\vec{V})$, използваме следната формула от векторния анализ

$$grad\,(U\cdot V) = U.GradV + U\times rot\ V + V.GradU + V\times rot\ U\,.$$

С нейното прилагане, отчитайки че $Grad\vec{V}=0$ и $rot\vec{V}=0$, ще имаме

$$\frac{\partial L}{\partial \vec{r}} = -\ q.\ grad\ \varphi + q.\ grad\,(\vec{A}\cdot\vec{V}) = -\ q.\ grad\ \varphi + q.\,(\vec{V}.Grad\,\vec{A} + \vec{V}\times rot\ \vec{A})\,,$$ т.е.

(14) $$\frac{\partial L}{\partial \vec{r}} = -\ q.\ grad\ \varphi + q.\,(\vec{V}.\nabla)\,\vec{A} + q.\vec{V}\times rot\ \vec{A}\,.$$

Ще ни бъде нужна и производната

$$\frac{d}{d\,t}\frac{\partial L}{\partial \vec{v}} = \ \dots\ \textit{отчитаме, че}\ \frac{\partial L}{\partial \vec{v}} = \vec{P}\ \dots\ = \frac{d}{d\,t}\vec{P} = \frac{d}{d\,t}(\vec{p} + q\,\vec{A}) = \frac{d\,\vec{p}}{d\,t} + q\,\frac{d\,\vec{A}(x,y,z,t)}{d\,t} =$$

$$= \frac{d\,\vec{p}}{d\,t} + q\left(\frac{\partial\vec{A}}{\partial x}\frac{dx}{d\,t} + \frac{\partial\vec{A}}{\partial y}\frac{dy}{d\,t} + \frac{\partial\vec{A}}{\partial z}\frac{dz}{d\,t} + \frac{\partial\vec{A}}{\partial t}\right) = \frac{d\,\vec{p}}{d\,t} + q\left(\frac{\partial}{\partial x}\frac{dx}{d\,t} + \frac{\partial}{\partial y}\frac{dy}{d\,t} + \frac{\partial}{\partial z}\frac{dz}{d\,t}\right)\vec{A} + q\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}\,.$$

Понеже $\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y},\frac{\partial}{\partial z}\right)$, и още $\vec{V} = \left(\frac{dx}{dt},\frac{dy}{dt},\frac{dz}{dt}\right)$, то горния запис можем да представим окончателно във вида

(15) $$\frac{d}{d\,t}\frac{\partial L}{\partial \vec{v}} = \frac{d\,\vec{p}}{d\,t} + q.\,(\vec{V}.\nabla)\,\vec{A} + q\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}\,.$$

Заместваме производните (14) и (15) в уравнението на Лагранж (9) , т.е. в $\frac{d}{d\,t}\frac{\partial L}{\partial \vec{v}} - \frac{\partial L}{\partial \vec{r}} = 0$, и получаваме уравнението:

$$\left[\frac{d\,\vec{p}}{d\,t} + q.\,(\vec{V}.\nabla)\,\vec{A} + q\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}\right] - [-\ q.\ grad\ \varphi + q.\,(\vec{V}.\nabla)\,\vec{A} + q.\vec{V}\times rot\ \vec{A}] = 0\,,$$ или още

$$\frac{d\,\vec{p}}{d\,t} + q.\,(\vec{V}.\nabla)\,\vec{A} + q\frac{\partial\vec{A}}{\partial t} + q.\ grad\ \varphi - q.\,(\vec{V}.\nabla)\,\vec{A} - q.\vec{V}\times rot\ \vec{A} = 0\,,$$

откъдето след съкращения получаваме

$$\frac{d\,\vec{p}}{d\,t} = -q\frac{\partial\vec{A}}{\partial t} - q.\ grad\ \varphi + q.\vec{V}\times rot\ \vec{A}\,,$$ или още

(16) $$\frac{d\,\vec{p}}{d\,t} = q\left[-\frac{\partial\vec{A}}{\partial t} - grad\ \varphi\right] + q.\vec{V}\times rot\ \vec{A}\,.$$

Ако въведем величината

(17) $$\vec{E} = -\frac{\partial\vec{A}}{\partial t} - grad\ \varphi\,,$$

представляваща **интензитет на електричното поле**, и величината

(18) $$\vec{B} = rot\ \vec{A}\,,$$

представляваща **индукция на магнитното поле**, то уравнение (16) добива вида

(19) $$\frac{d\,\vec{p}}{d\,t} = q\,\vec{E} + q.\vec{V}\times\vec{B}\,.$$

Тъй като съгласно законите на динамиката производната от импулса $\dfrac{d\vec{p}}{dt}$ дава силата $\vec{F}$, действаща върху частицата, то можем да представим (19) във вида

(20) $\boxed{\vec{F} = q\vec{E} + q.\vec{V}\times\vec{B}}$.

Силата, определена чрез (20), се нарича **сила на Лоренц**. Могат да се разгледат и някои частни случаи:

- $\vec{E} = 0,\ \vec{B} \neq 0$ - чисто магнитно поле, и
- $\vec{E} \neq 0,\ \vec{B} = 0$ - чисто електрично поле.

За да определим работата, която върши всяко от двете полета при движението на частицата, нека умножим скаларно (20) със $\vec{V}$:

$$\vec{F}\cdot\vec{V} = q\vec{E}\cdot\vec{V} + q.(\vec{V}\times\vec{B})\cdot\vec{V} = q\vec{E}\cdot\vec{V},$$

понеже смесеното произведение

$$(\vec{V}\times\vec{B})\cdot\vec{V} \equiv 0.$$

Както вече бе доказано (*в предишен въпрос*) величината

(21) $\vec{F}\cdot\vec{V} = \dfrac{dA}{dt}$

има смисъл на работа, извършена за единица време (*т.е. мощност*). С отчитането на всичко това стигаме до представянето

$$\frac{dA}{dt} = q\vec{E}\cdot\vec{V},$$

от което следва заключението, че **само електричното поле** $\vec{E}$ **върши работа**. Магнитното поле $\vec{B}$ не върши работа, то само „**закривява**" траекторията на частицата.

В заключение ще се спрем на въпроса за **избора** (*т.е. дали този избор е еднозначен или е нееднозначен*) на потенциалите φ и $\vec{A}$. Този въпрос е важен, защото посредством тези потенциали се изразяват векторните характеристики на ЕМ поле:

(17)☞ $\vec{E}(\vec{r},t) = -\dfrac{\partial\vec{A}(\vec{r},t)}{\partial t} - grad\ \varphi(\vec{r},t)$ - **интензитет на електричното поле**; и

(18) ☞ $\vec{B}(\vec{r},t) = rot\ \vec{A}(\vec{r},t)$ - **индукция на магнитното поле**.

Нека вместо $\varphi(\vec{r},t)$ и $\vec{A}(\vec{r},t)$ използваме потенциали $\varphi^{/}(\vec{r},t)$ и $\vec{A}^{/}(\vec{r},t)$, зададени със съотношенията

(22) $\varphi^{/}(\vec{r},t) = \varphi(\vec{r},t) - \dfrac{\partial f(\vec{r},t)}{\partial t}$; и

(23) $\vec{A}^{/}(\vec{r},t) = \vec{A}(\vec{r},t) + grad\ f(\vec{r},t)$,

където $f(\vec{r},t)$ е диференцируема функция.

Нека изразим, използвайки (17), интензитета $\vec{E}$ на електричното поле и индукцията $\vec{B}$ на магнитното поле посредством „новите" потенциали $\varphi^{/}(\vec{r},t)$ и $\vec{A}^{/}(\vec{r},t)$:

а) от (17):

$$\vec{E}(\vec{r},t) = -\frac{\partial\vec{A}^{/}(\vec{r},t)}{\partial t} - grad\ \varphi^{/}(\vec{r},t) = -\frac{\partial}{\partial t}[\vec{A}(\vec{r},t) + grad\ f(\vec{r},t)] - grad\left[\varphi(\vec{r},t) - \frac{\partial f(\vec{r},t)}{\partial t}\right] =$$

$$= -\frac{\partial\vec{A}(\vec{r},t)}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial t}[grad\ f(\vec{r},t)] - grad\ \varphi(\vec{r},t) + grad\left[\frac{\partial f(\vec{r},t)}{\partial t}\right] =$$

$$= -\frac{\partial\vec{A}(\vec{r},t)}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial t}[grad\ f(\vec{r},t)] - grad\ \varphi(\vec{r},t) + \frac{\partial}{\partial t}[grad\ f(\vec{r},t)] = -\frac{\partial\vec{A}(\vec{r},t)}{\partial t} - grad\ \varphi(\vec{r},t)$$

б) от (18):

$\vec{B}(\vec{r},t) = rot\ \vec{A}^{/}\,(\vec{r},t) = rot\,[\vec{A}(\vec{r},t) + grad\ \ f(\vec{r},t)] = rot\ \vec{A}(\vec{r},t) + rot\ grad\ \ f(\vec{r},t) \equiv rot\ \vec{A}(\vec{r},t)$,
понеже $rot[\,grad\ \ f(\vec{r},t)] \equiv 0$.

Извод: посредством (16) и (18) векторните характеристики на ЕМ поле $\vec{E}$ и $\vec{B}$ се определят еднозначно от потенциалите φ и $\vec{A}$ на това поле. На **едно и също поле** $\vec{E}$ и $\vec{B}$, обаче, съответства широк кръг потенциали, зададени с условията (22) и 23). Казано с други думи полетата $\vec{E}$ и $\vec{B}$ са инвариантни (*неизменни*) относно трансформации на потенциалите φ и $\vec{A}$ от типа (22) и 23).

Очевидно потенциалите φ и $\vec{A}$ не са еднозначно определени. Посредством съотношенията (22) и 23), наречени **калибровъчни трансформации**, тези потенциали могат да се подбират така, както е най-удобно.

Калибровъчните трансформации (22) и 23) могат да бъдат записани в следната ковариантна векторна форма посредством 4-вектора на потенциала

(24) $$A_{\mu}^{\;/} = A_{\mu} - \frac{\partial f}{\partial X^{\mu}}, \text{ за } \mu = 0, 1, 2, 3.$$

В заключение ще отбележим, че въпреки нееднозначността, с която са определени, потенциалите φ и $\vec{A}$ предлагат несъмнени удобства (*предимства*) и широко се използват в електродинамиката. **Най-очевидното предимство** от използването на φ и $\vec{A}$ вместо използването на $\vec{E}$ и $\vec{B}$ се заключава в това, че задаването на полето посредством полевите вектори $\vec{E}$ и $\vec{B}$ изисква познаването на 6 величини (6-те компоненти на $\vec{E}$ и $\vec{B}$), докато задаването на полето посредством φ и $\vec{A}$ изисква познаването само на 4 величини (една компонента на скалара φ и трите компоненти на вектора $\vec{A}$).