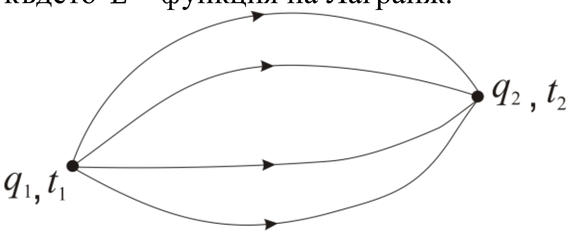
Релативистична механика на материална точка.

В класическата механика уравненията на движение се получават от вариационния принцип на най-малкото действие. В този принцип се използва величината „действие”

(1) $$S = \int_{t_1}^{t_2} L\, dt\,,$$

където L - функция на Лагранж.



Интегралът (1) се взема между две **фиксирани точки 1** и **2** по траекторията на движение на системата, в които точки са известни **координатите** q_1 и q_2 на тази система, и **моментите време** t_1 и t_2, в които тя преминава (*трябва да премине*) през тях.

За **истинското движение** (по физична траектория) според вариационния принцип на най-малкото действие се приема движението по тази от множеството възможни траектории, за която **действието има минимум**, интегралът (1) приема минимална стойност, и следователно

$$\delta S = 0\,,$$

т.е. **вариацията на действието е нула**.

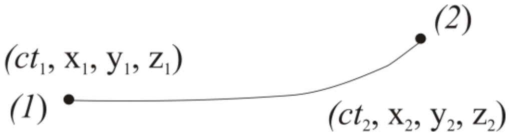
Механиката на релативистични частици може да се изгради на същия принцип (*принцип на най-малкото действие*), предвид неговата универсалност. Но за да се получат релативистично-инвариантни уравнения на движение, действието S, **<u>което се определя чрез постулиране</u>**, трябва да отговаря на няколко **условия** (изисквания):

1.) Действието **не трябва да зависи от избора на ИОС**, т.е. то трябва да бъде инвариантно относно трансформациите на Лоренц. Ето защо действието трябва да бъде **<u>скаларна величина</u>**, инвариантна относно трансформациите на Лоренц, и независеща от избора на КС.

2.) Действието трябва да се изразява чрез интеграл от скалар, като освен това, **подинтегралният израз трябва да съдържа диференциал от първа степен**. Това изискване произтича от нерелативистичната механика и изразява факта, че механичното състояние на една система се определя еднозначно, когато са известни **координатите** и **скоростите** на тази система в даден (начален) момент.

А самите релативистични уравнения на движението следва да бъдат **диференциални уравнения от най-много втори ред**.

Нека разгледаме най-напред движението на свободна релативистка материална точка (частица). Тя не си взаимодейства с други обекти (частици или полета), и следователно скоростта й на движение остава постоянна $\vec{v} = const$.



При отсъствието на каквито и да е сили (или полета) единствената релативистично-инвариантна величина, която характеризира движението на свободната частица в пространство-времето, е безкрайно-малкия **пространствено-временният интервал** ds между <u>две безкрайно близки събития, свързани с частицата</u>. Очевидно ds е <u>точно онзи</u> **диференциал от първа степен**, за присъствието на който в интеграла (1) бе споменато по-горе.

Както вече е известно

$$ds \equiv (c.dt)^2 - \left| d\vec{r} \right|^2 = c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2\,.$$

Следователно действието S може да бъде изразено чрез интервала ds, като се представи във вида

(2) $$S = \int_1^2 \alpha\,.\,ds\,,$$

където α е инвариантна константа, характеризираща дадената частица.

Представянето за действието S, зададено чрез (2), отговаря на дефинираните по-горе условия (изисквания) за величината „действие”, следователно може да послужи като основа за следващите разглеждания (*това е всъщност „нашето” действие*).

Интегралът (2) се взема от точка (събитие) 1 до точка (събитие) 2 в пространство-времето **по мировата линия**. При тези обстоятелства за безкрайно-малкият пространствено-временен интервал ще имаме (*изразът е получен в предишен въпрос*)

(3) $$d\,s = c.\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}.d\,t\ .$$

Заместваме (3) в (2) и получаваме

(4) $$S = \alpha.\int_{t_1}^{t_2} c.\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}.d\,t\,.$$

По този начин времето t става интеграционна променлива, като t_1 и t_2 са моментите време, в които системата (частицата) заема състоянията (1) и (2) в 4-мерното пространство-време (виж чертежа).

От сравняването на (4) и (1) можем да заключим, че функцията на Лагранж, описваща движението (състоянието) на една свободна релативистична частица, се дава с

(5) $$L = \alpha.c.\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}\ .$$

За да бъде напълно коректен анализът, който правим за релативистичния случай $(v \le c)$, трябва изразът за лагранжиана (5) в нерелативистичния случай $(v << c)$ да премине в лагранжиан на свободна нерелативистична частица, даващ се с израза

(6) $$L_{Клас.механ.}.\frac{m.v^2}{2}\ .$$

Ще покажем, че горното изискване е изпълнено. Действително при $v << c$, т.е. при $\frac{v}{c} << 1$ квадратният корен $\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}$ може да бъде „развит” в ред по степените на $\frac{v}{c}$, а именно

$$\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}} \approx 1-\frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2}+............,$$

където поради това, че $\frac{v}{c} << 1$, членовете съдържащи по-високи степени на $\frac{v}{c}$ се пренебрегват. След заместване на това редово развитие в (5) получаваме

(7) $$L = \alpha.c.\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}} = \alpha.c.\left(1-\frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2}+............\right) \approx \alpha.c - \frac{\alpha}{2}\frac{v^2}{c} = const + \left(-\frac{\alpha}{c}\right)\frac{v^2}{2}\ .$$

Ако пренебрегнем константата $\alpha.c$ и положим

(8) $$-\frac{\alpha}{c} = m,\ \text{т.е.}\ \boxed{\alpha = -m.c},$$

то изразът (7) за „релативистичния” лагранжиан придобива точно „класическият” вид (6), което трябваше да докажем.

Заместваме константата α от (8) в уравнения (2), (4) и (5), и получаваме последователно

($2^{/}$) $$S = -m.c\int_1^2 ds\,;$$

($4^{/}$) $$S = -m.c^2.\int_{t_1}^{t_2} \sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}.d\,t\,,\ \text{и}$$

$$(5^{/})\qquad L=-m.c^2.\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}\,.$$

След като функцията на Лагранж за релативистка свободна частица е намерена, можем да пристъпим към определянето на уравнението на движение на тази частица. За целта използваме уравненията на Лагранж

$$\frac{d}{d\,t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}-\frac{\partial L}{\partial q_i}=0\,,\ \text{за}\ i=1,2,....,s\,,$$

където s е броя на степените на свобода на системата (частицата). В случая, който разглеждаме (една свободна частица) този брой е $s=3$. Ето защо ако в качеството на обобщени координати вземем декартовите координати на частицата, то уравнението на Лагранж (във векторен запис) ще има вида

$$\frac{d}{d\,t}\frac{\partial L}{\partial \vec{v}}-\frac{\partial L}{\partial \vec{r}}=0\,.$$

Както непосредствено се вижда от ($5^{/}$) обаче, $L\neq L(\vec{r})$, т.е. $L=L(\vec{v})$, следователно

$$\frac{\partial L}{\partial \vec{r}}=0\,,\ \text{откъдето следва, че и}\ \frac{d}{d\,t}\frac{\partial L}{\partial \vec{v}}=0\,,\ \text{т.е.}$$

$$(9)\qquad \frac{\partial L}{\partial \vec{v}}=const\,.$$

Щом (9) е в сила, то $\dfrac{\partial L}{\partial \vec{v}}$ е интеграл на движението, т.е. уравнението (9) е точно търсеното от нас уравнение на движение на релативистката свободна частица.

Понеже съгласно лагранжевия формализъм величините

$$p_i=\frac{d}{d\,t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\,,\ \ i=1,2,....,s\,,$$

имат смисъл на **обобщени импулси**, то очевидно (във векторен запис) величината $\vec{p}=\dfrac{\partial L}{\partial \vec{v}}$ е **релативистичният импулс** на тази частица, и той, съгласно (9), се запазва постоянен, т.е.

$$(9^{/})\qquad \vec{p}=\frac{\partial L}{\partial \vec{v}}\equiv const\,.$$

Нека определим в явен вид от ($9^{/}$) релативистичният импулс на частицата:

$$\vec{p}=\frac{\partial}{\partial \vec{v}}(L)=\frac{\partial}{\partial \vec{v}}\left(-m.c^2.\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}\right)=-mc^2.\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}\left(-\frac{2\vec{v}}{c^2}\right)=\frac{m\vec{v}}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}\,.$$

И така

$$(10)\qquad \boxed{\vec{p}=\frac{m\vec{v}}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}}\ \text{- импулс на релативистка частица.}$$

Следвайки лагранжевия формализъм, можем да определим още енергията ε на релативистката частица, използвайки за тази цел формулата

$$\varepsilon=\frac{\partial L}{\partial \vec{v}}\cdot\vec{v}-L\equiv\vec{p}\cdot\vec{v}-L=\frac{m\vec{v}}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}\cdot\vec{v}-L=\frac{mv^2}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}-\left(-m.c^2.\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}\right)=$$

$$= \frac{mv^2}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}} + m.c^2.\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}} \times \frac{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}} = \frac{mv^2 + mc^2\left(1-\frac{V^2}{c^2}\right)}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}} = \frac{mv^2 + mc^2 - mv^2}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}, \text{ т.е.}$$

(11) $\boxed{\varepsilon = \frac{mc^2}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}}$ - енергия на свободна релативистка частица.

Нека въведем означението

(12) $m^* = \frac{m}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}$,

където m^* е т.нар. **релативистична маса** на частицата, **зависеща от скоростта $\vec{v}$, с която тя се движи**. В нерелативистичния случай $v << c$, т.е. при $\frac{v}{c} << 1$ очевидно ще бъде изпълнено $\boxed{m^* \to m}$, т.е. релативистичната маса преминава в маса (в класически смисъл).

С помощта на релативистичната маса m^* можем да запишем получените до момента представяния за импулса и енергията във вида

($10^{/}$) $\vec{p} = m^* \vec{v}$ - импулс на релативистка частица; и

($11^{/}$) $\varepsilon = m^* c^2$ - енергия на свободна релативистка частица.

Ако скоростта, с която се движи частицата, е $v = 0$, то съгласно (12) $m^* = m$, и от ($11^{/}$) получаваме представяне за т.нар. **енергия на покой**

(13) $\boxed{\varepsilon_0 = m.c^2}$ - формула на Айнщайн за енергия в покой.

Нека развием израза (11) за енергията на релативистка частица в ред по степените на $\frac{v}{c}$, както по-горе това бе направено за лагранжиана L. При $\frac{v}{c} << 1$ квадратният корен $\left(1-\frac{V^2}{c^2}\right)^{-\frac{1}{2}}$ може да бъде „развит” в ред по степените на $\frac{v}{c}$, а именно

$$\left(1-\frac{V^2}{c^2}\right)^{-\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2} + ... \approx 1 + \frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2},$$

където поради това, че $\frac{v}{c} << 1$, членовете съдържащи по-високи степени на $\frac{v}{c}$ се пренебрегват. След заместване на това редово развитие в (11) получаваме

(14) $$\varepsilon = \frac{mc^2}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}} \approx mc^2\left(1+\frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2}\right) = mc^2 + mc^2\frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2} = mc^2 + \frac{mv^2}{2} = const + E_k,$$

където с E_k е обозначена **релативистичната кинетична енергия** на свободната релативистка частица, а константата mc^2, съгласно (13), е равна на енергията в покой ε_0 на тази частица. Следователно релативистичната кинетична енергия на частицата може да бъде определена от (14) като разлика между **пълната енергия** ε и **енергията в покой** ε_0 на тази частица

(15) $$E_k = \varepsilon - \varepsilon_0 = \frac{mc^2}{\sqrt{1-\dfrac{V^2}{c^2}}} - mc^2 = mc^2\left(\frac{1}{\sqrt{1-\dfrac{V^2}{c^2}}} - 1\right).$$

Очевидно в нерелативистично приближение, т.е при $\dfrac{v}{c} << 1$, $\left(1-\dfrac{V^2}{c^2}\right)^{-\frac{1}{2}} \approx 1+\dfrac{1}{2}\dfrac{v^2}{c^2}$, и следователно

$$E_k = \varepsilon - \varepsilon_0 = mc^2\left(\frac{1}{\sqrt{1-\dfrac{V^2}{c^2}}} - 1\right) \approx mc^2\left(1+\frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2} - 1\right) = mc^2\,\frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2} = \frac{mv^2}{2} \equiv T \text{ , т.е.}$$

$$E_k \to T \text{ ,}$$

където T е „класическата” кинетична енергия на нерелативистка частица (*частица, движеща се с малка скорост* $v << c$).

Според (10), (11) и (12) **не може да се наблюдава движение на материален обект със скорост** $v \geq c$, понеже участващият в тези формули квадратен корен става имагинерно число, което е лишено от физически смисъл**.**

Тези формули отхвърлят възможността $v \geq c$**, обаче** те не отхвърлят възможността да съществува материален обект, имащ маса в покой $m = 0$, който да се движи със скорост $v = c$. Такива материални обекти съществуват и това са **фотоните**, за които (засега) се счита, че имат **маса в покой** $m = 0$.

Запазването на масите в класическата (нерелативистката) механика се разглежда като природен закон. В релативистката механика, обаче, **този закон не е в сила**. Действително, ако законът за запазване на масите бе в сила, то би трябвало общата маса m на една система от частици да се представи като сбор от масите на отделните частици, т.е.

$$m = \sum_i m_i \text{ .}$$

Ако това равенство умножим (формално) със c^2, ще получим

$$mc^2 = \sum_i m_i c^2 \text{, т.е. } \varepsilon_0 = \sum_i (\varepsilon_0)_i \text{ ,}$$

където $\varepsilon_0 = mc^2$ и $(\varepsilon_0)_i = m_i c^2$ са масите в покой на цялата система и на i-тата частица от тази система. Обаче равенството

$$\varepsilon_0 = \sum_i (\varepsilon_0)_i$$

е **некоректно** в релативистката механика, понеже енергията в покой на едно тяло се състои **не само** от енергиите в покой на неговите съставни частици, **но включва още и енергията на взаимодействие** $\varepsilon_{\text{âç}}$ между тези частици. Следователно **коректно** в релативистката механика ще бъде равенството

$$\boxed{\varepsilon_0 = \sum_i (\varepsilon_0)_i + \varepsilon_{\text{âç}}} \text{, или още } \boxed{mc^2 = \sum_i m_i c^2 + \varepsilon_{\text{âç}}}.$$

След разделяне на второто от горните равенства със c^2 се получава

$$m = \sum_i m_i + \frac{\varepsilon_{\text{âç}}}{c^2} \text{ ,}$$

откъдето следва, че $\boxed{m \neq \sum_i m_i}$, т.е. **законът за запазване на масите действително не е изпълнен в релативистката механика**.

Дефектът на масите („масов дефект”) Δm

$$\Delta m = \sum_i m_i - m \equiv -\frac{\varepsilon_{âç}}{c^2}$$

се изразява (зависи) от енергията на взаимодействие $\varepsilon_{âç}$ между частиците от системата. Прието е величината $\Delta m.c^2 = \varepsilon_{âð}$ да се нарича <u>**енергия на връзката**</u> на системата от частици.

Ако приложим тези разглеждания за конкретна материална система, напр. **атомно ядро**, изградено от определен брой **нуклони** (протони и неутрони), то оказва се, че **масата на атомното ядро** m **е по-малка от сбора от масите** $\sum_i m_i$ **на нуклоните, които го изграждат**, т.е. масовият дефект за ядрото ще бъде

$$\Delta m = \sum_i m_{N\,i} - m_{ß} > 0\,,$$

а **енергията на връзката на ядрото** ще бъде $\varepsilon_{âð} = \Delta m.c^2 > 0$, и тя ще обезпечи стабилност на ядрото.

Извод: от направените разглеждания следва, че в релативистичната механика **не е изпълнен закона за запазване на масата**, <u>но е в сила</u> **законът за запазване на енергията** (**ЗЗЕ**).

Ковариантна форма на уравненията на движение

В класическата механика уравнението на движение на частица с маса m

$$\vec{F} = m.\vec{a}$$

е инвариантно относно трансформациите на Галилей, но не и относно трансформациите на Лоренц. За да изразява горното равенство коректен природен закон, то трябва да бъде записано в **ковариантна форма** (*форма, инвариантна относно трансформациите на Лоренц при смяна на ИОС*). За целта е необходимо да бъдат въведени (*още*) някои важни 4-векторни величини, а именно: **4-скорост**, **4-ускорение**, **4-импулс** и **4-сила**.

1. Въвеждане на 4-скорост

Въвежда се аналогично на вектора на скоростта в тримерното пространство, който е $\vec{v} = \dfrac{d\,\vec{r}}{d\,t}$. Така ако запишем производните по **собственото време** $d\tau$ (*понеже е инвариант*) на **компонентите на 4-радиус-вектора** X^{μ}, $\mu = 0, 1, 2, 3$, то съвкупността от тези 4 производни ще даде компонентите на **нов 4-вектор** u^{μ}, $\mu = 0, 1, 2, 3$, който ще наречем **4-скорост**.

И така по горната дефиниция

$$(16) \qquad u^{\mu} = \frac{dX^{\mu}}{d\,\tau}\,, \; \mu = 0, 1, 2, 3\,,$$

където 4-радиус-векторът се представя във вида

$$X = (x^0, \vec{r}) \equiv (ct, \vec{r})\,,$$

а собственото време (инвариант) $d\tau$ се изразява чрез координатното време $d\,t$ посредством съотношението

$$d\,\tau = d\,t\,.\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}\,.$$

Ще търсим представяне за 4-скоростта в типичен за 4-векторите вид

$u = (u^0, \vec{u})$, или още $u = (u^0, u^1, u^2, u^3)$,

т.е. във вид, в който са обособени една временна компонента u^0 и три пространствени компоненти $\vec{u}$ (*компоненти на 3-мерен вектор*(u^1, u^2, u^3)). За да получим тези компоненти в явен вид, използваме дефиниционното равенство (16)

- при $\mu = 0$ $u^0 = \dfrac{dX^0}{d\tau} = \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{c.t}{\sqrt{1-\dfrac{V^2}{c^2}}}\right) = \dfrac{c}{\sqrt{1-\dfrac{V^2}{c^2}}}$;

- при $\mu = 1$ $u^1 = \dfrac{dX^1}{d\tau} = \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{x}{\sqrt{1-\dfrac{V^2}{c^2}}}\right) = \dfrac{V_x}{\sqrt{1-\dfrac{V^2}{c^2}}}$;

- при $\mu = 2$ $u^2 = \dfrac{dX^2}{d\tau} = \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{y}{\sqrt{1-\dfrac{V^2}{c^2}}}\right) = \dfrac{V_y}{\sqrt{1-\dfrac{V^2}{c^2}}}$; и

- при $\mu = 3$ $u^3 = \dfrac{dX^3}{d\tau} = \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{z}{\sqrt{1-\dfrac{V^2}{c^2}}}\right) = \dfrac{V_z}{\sqrt{1-\dfrac{V^2}{c^2}}}$.

Очевидно пространствената част на 4-скоростта се дава с 3-мерния вектор

$$\boxed{\vec{u} = (u^1, u^2, u^3) = \frac{\vec{V}}{\sqrt{1-\dfrac{V^2}{c^2}}}}.$$

Накрая „композираме” целия вектор на 4-скоростта

(17) $$u = (u^0, \vec{u}) = \left(\frac{c}{\sqrt{1-\dfrac{V^2}{c^2}}}, \frac{\vec{V}}{\sqrt{1-\dfrac{V^2}{c^2}}}\right).$$

Лесно може да се установи, че

(18) $$u^2 = u^\mu u_\mu = (u^0)^2 - \vec{u}^2 = \frac{c^2}{1-\dfrac{V^2}{c^2}} - \frac{V^2}{1-\dfrac{V^2}{c^2}} = \frac{c^2 - V^2}{\left(\dfrac{c^2 - V^2}{c^2}\right)} = c^2 = const.$$

2. Въвеждане на 4-ускорение

Следвайки класическата дефиниция за ускорение можем да дефинираме компонентите на този 4-вектор посредством равенствата

(19) $a^\mu = \dfrac{du^\mu}{d\tau}$, $\mu = 0, 1, 2, 3$, или още $a^\mu = \dfrac{d^2 X^\mu}{d\tau^2}$.

След диференциране на 4-скоростта u^μ по собственото време $d\tau$ се оказва, че векторите на 4-скоростта и 4-ускорението са ортогонални, т.е.

(20) $a.u = 0$.

Горното съотношение може да се докаже и директно по следния начин: използваме, че както бе доказано в (18)

$u^2 = c^2 = const$,

следователно ако диференцираме по собственото време $d\tau$ тази константна величина, ще имаме

$$\frac{d}{d\,\tau}(u^2) = 2.u.\frac{du}{d\,\tau} \equiv 0 \text{, т.е.}$$

$$u.\frac{du}{d\,\tau} \equiv u.a = 0 \text{, което доказва (20).}$$

3. Въвеждане на 4-вектора „енергия-импулс” (4-импулса)

Компонентите на този вектор се въвеждат с дефиниционното равенство

(21) $P^{\mu} = m.u^{\mu}\,,\quad \mu = 0, 1, 2, 3\,.$

Както всеки 4-вектор той може да се представи в следния стандартен вид

$P = (\,p^0\,, \vec{p})\,,$

който може да бъде получен след прилагането на (21):

- при $\mu = 0$ $\quad p^0 = m.u^0 = m\dfrac{c}{\sqrt{1-\dfrac{V^2}{c^2}}} = m\dfrac{c}{\sqrt{1-\dfrac{V^2}{c^2}}}\dfrac{c}{c} = \dfrac{1}{c}\left(\dfrac{mc^2}{\sqrt{1-\dfrac{V^2}{c^2}}}\right) = \dfrac{\varepsilon}{c}\,;$

- при $\mu = 1$ $\quad p^1 = m.u^1 = m\dfrac{V_x}{\sqrt{1-\dfrac{V^2}{c^2}}} = \dfrac{m.V_x}{\sqrt{1-\dfrac{V^2}{c^2}}} \equiv p_x\,;$

- при $\mu = 2$ $\quad p^2 = m.u^2 = m\dfrac{V_y}{\sqrt{1-\dfrac{V^2}{c^2}}} = \dfrac{m.V_y}{\sqrt{1-\dfrac{V^2}{c^2}}} \equiv p_y\,;$

- при $\mu = 3$ $\quad p^3 = m.u^3 = m\dfrac{V_z}{\sqrt{1-\dfrac{V^2}{c^2}}} = \dfrac{m.V_z}{\sqrt{1-\dfrac{V^2}{c^2}}} \equiv p_z\,.$

Така достигаме до представянето

(22) $\boxed{P = \left(\dfrac{\varepsilon}{c}\,,\,\vec{p}\right)}.$

Нека определим скаларния квадрат P^2 на този 4-вектор:

а) от една страна, изхождайки направо от дефиниционното съотношение (21), имаме

$P^2 = (m.u)^2 = m^2u^2 =$ ….. *съгласно (18)* $u^2 = c^2$ …… $= m^2c^2\,.$

б) от друга страна по дефиниция за квадрат на контравариантен 4-вектор

$$P^2 = (\,p^0)^2 - \vec{p}^{\,2} = \frac{\varepsilon^2}{c^2} - \vec{p}^{\,2}\,.$$

Приравнявайки десните страни на получените в (а) и (б) равенства, ще имаме

$m^2c^2 = \dfrac{\varepsilon^2}{c^2} - \vec{p}^{\,2}$, или след умножаване с c^2

(23) $\boxed{\varepsilon^2 = m^2c^4 + \vec{p}^{\,2}c^2}.$

Горното съотношение е много важно и полезно, защото дава релативистичното съотношение между енергията и импулса на една релативистична частица. От (23) след кореннуване получаваме

$$\varepsilon = \sqrt{m^2c^4 + \vec{p}^{\,2}c^2} = mc^2\sqrt{1+\frac{\vec{p}^{\,2}c^2}{m^2c^4}} = mc^2\sqrt{1+\frac{\vec{p}^{\,2}}{m^2c^2}} \equiv mc^2\sqrt{1+\left(\frac{\vec{p}}{mc}\right)^2}\,.$$

Лесно може да се установи, че в нерелативистично приближение, т.е. при $\left|\dfrac{\vec{p}}{mc}\right| << 1$, ще имаме

$$\varepsilon = mc^2\sqrt{1+\left(\frac{\vec{p}}{mc}\right)^2} = mc^2\left[1+\left(\frac{\vec{p}}{mc}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}} = mc^2\left[1+\frac{1}{2}\left(\frac{\vec{p}}{mc}\right)^2+.......\right] \approx mc^2\left[1+\frac{1}{2}\left(\frac{\vec{p}}{mc}\right)^2\right] =$$

$$= mc^2 + mc^2\,\frac{1}{2}\left(\frac{\vec{p}}{mc}\right)^2 = const + \frac{\vec{p}^{\,2}}{2m}\text{, т.е. при } \left|\frac{\vec{p}}{mc}\right| << 1$$

$$\boxed{\varepsilon \to \frac{\vec{p}^{\,2}}{2m} + const},$$

което е всъщност **класическата формула** за енергията.

4. Въвеждане на 4-сила

По дефиниция

(24) $F^{\mu} = m.a^{\mu} \equiv m.\dfrac{du^{\mu}}{d\tau}$, $\mu = 0, 1, 2, 3$, или още

(25) $F^{\mu} = \dfrac{d(m.u^{\mu})}{d\tau} \equiv \dfrac{d\,P^{\mu}}{d\tau}$, $\mu = 0, 1, 2, 3$.

Равенството (25) изразява **основното уравнение на релативистичната динамика**, което е обобщение на уравнението на Нютон за пространство-времето.

Нека представим 4-силата в стандартния за 4-вектори вид

$F = (F^0, \vec{f})$, където $\vec{f} = (F^1, F^2, F^3)$

и за целта използваме (25), както и това, че $d\tau = dt\,.\sqrt{1-\dfrac{V^2}{c^2}}$:

- при $\mu = 1$ $\quad F^1 = \dfrac{dP^1}{d\tau} = \dfrac{d}{d\tau}(P_x) = \dfrac{d}{dt}\left[\dfrac{P_x}{\sqrt{1-\dfrac{V^2}{c^2}}}\right] = \dfrac{\dfrac{dP_x}{dt}}{\sqrt{1-\dfrac{V^2}{c^2}}} = \dfrac{F_x}{\sqrt{1-\dfrac{V^2}{c^2}}}$;

- аналогично за $\mu = 2$ и $\mu = 3$ ще имаме

$F^2 = \dfrac{dP^2}{d\tau} = \dfrac{d}{d\tau}(P_y) = ... = \dfrac{F_y}{\sqrt{1-\dfrac{V^2}{c^2}}}$ и $F^3 = \dfrac{dP^3}{d\tau} = \dfrac{d}{d\tau}(P_z) = ... = \dfrac{F_z}{\sqrt{1-\dfrac{V^2}{c^2}}}$,

откъдето, обобщавайки горните 3 представяния, получаваме за пространствената част $\vec{f}$ на 4-силата следното представяне

(27) $\vec{f} = \dfrac{\vec{F}}{\sqrt{1-\dfrac{V^2}{c^2}}}$, където $\vec{F} = \dfrac{d\vec{p}}{dt}$ е класическата Нютонова сила.

Малко по-специфично се определя компонентата F^0:

- при $\mu = 0$

(26) $F^0 = \dfrac{dP^0}{d\tau} = \dfrac{d}{d\tau}\left(\dfrac{\varepsilon}{c}\right) = \dfrac{d}{dt}\left[\dfrac{\left(\dfrac{\varepsilon}{c}\right)}{\sqrt{1-\dfrac{V^2}{c^2}}}\right] = \dfrac{d}{dt}\left[\dfrac{\varepsilon}{c.\sqrt{1-\dfrac{V^2}{c^2}}}\right]$.

Но директното определяне на тази производна е неудобно. Затова използваме, че (*както вече бе доказано*) 4-скоростта и 4-ускорението са ортогонални, т.е.

$a.u = 0$,

откъдето след умножаване с масата m получаваме равенството

$(m.a).u = 0$, т.е. $F.u = 0$.

Последното равенство изразява факта, че **4-силата и 4-скоростта са също ортогонални**.

Ако доказаното равенство $F.u = 0$ разпишем по компоненти, т.е.

$F^0 u^0 - \vec{F}.\vec{u} = 0$,

то можем да изразим F^0 така

$$F^0 = \frac{\vec{F}.\vec{u}}{u^0} = \frac{\left[\vec{F}\big/\sqrt{1-V^2/c^2}\right]\cdot\left[\vec{V}\big/\sqrt{1-V^2/c^2}\right]}{c\big/\sqrt{1-V^2/c^2}} = \frac{\vec{F}\cdot\vec{V}}{c\sqrt{1-V^2/c^2}}\text{, т.е.}$$

$$\boxed{F^0 = \frac{\vec{F}\cdot\vec{V}}{c\sqrt{1-V^2/c^2}}}. \tag{28}$$

Накрая „сглобяваме” вектора 4-сила:

$$F = (F^0, \vec{f}\,) = \left(\frac{\vec{F}\cdot\vec{V}}{c\sqrt{1-V^2/c^2}}, \frac{\vec{F}}{\sqrt{1-\dfrac{V^2}{c^2}}}\right). \tag{29}$$

Нека сравним десните страни на равенства (26) и (28), изразяващи компонентата F^0 на 4-силата по два различни начина:

$$F^0 = \frac{d}{dt}\left[\frac{\varepsilon}{c.\sqrt{1-\dfrac{V^2}{c^2}}}\right],\ \text{и}$$

$$F^0 = \frac{\vec{F}\cdot\vec{V}}{c\sqrt{1-V^2/c^2}},$$

следователно

$$\frac{\vec{F}\cdot\vec{V}}{c\sqrt{1-V^2/c^2}} = \frac{1}{c\sqrt{1-V^2/c^2}}\frac{d\varepsilon}{dt}\text{, т.е.}$$

$$\boxed{\frac{d\varepsilon}{dt} = \vec{F}\cdot\vec{V}}.$$

С горното равенство се дефинира изменението на енергията (т.е. работата) за единица време. Действително, както е известно

$dA = \vec{F}\cdot d\vec{r}$,

следователно (при $\vec{F} = const$)

$$\frac{dA}{dt} = \vec{F}\cdot\frac{d\vec{r}}{dt} \equiv \vec{F}\cdot\vec{V}.$$

Доказаното съотношение позволява да запишем

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = \vec{F}\cdot\vec{V} = \frac{dA}{dt}. \tag{30}$$

Накрая ще запишем един релативистично инвариантен закон, който обединява в едно два класически закона за запазване – ЗЗЕ и ЗЗИ. Този закон се изразява посредством 4-вектора „енергия-импулс” по следния начин

$$\frac{dP^\mu}{d\tau} = 0,\quad \mu = 0, 1, 2, 3. \tag{31}$$

Като се има предвид представянето (22) за този четиривектор, а именно $P = \left(\frac{\varepsilon}{c}, \, \vec{p} \right)$, то:

а) при $\mu = 0$ ще имаме $\frac{dP^0}{d\tau} = \frac{d}{d\tau}\left(\frac{\varepsilon}{c} \right) \equiv \frac{1}{c}\frac{d\varepsilon}{d\tau} = 0$, $\Rightarrow$ $\boxed{\varepsilon = const}$, т.е. ЗЗЕ!

б) при $\mu = 1, 2, 3$ ще имаме $\frac{d\,\vec{p}}{d\,\tau} = 0$, $\Rightarrow$ $\boxed{\vec{p} = const}$, т.е. ЗЗИ!