Тема 4. Ковариантни величини

Ковариантни са тези величини (*скалари, вектори или тензори*), записването на природните закони посредством които обезпечава тяхната (*на уравненията*) **инвариантност относно преобразуванията на Лоренц** в псевдоевклидовото пространство $\boldsymbol{R^4}$.

В $\boldsymbol{R^4}$ могат да бъдат дефинирани следните Ковариантни величини:

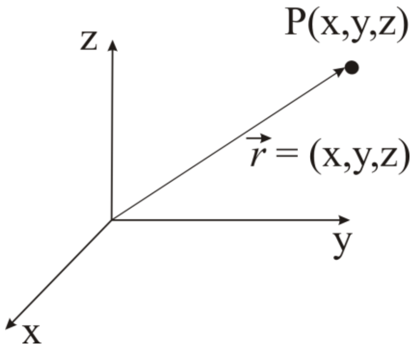
А) 4-скалари

Скаларът е еднокомпонентна величина, която при смяна на ИОС се трансформира по закона

$$a = a^{/}$$

Тази формула определя скалара като величина, независеща от избора на ИОС. **Пространствено-временният интервал** ΔS между две събития, както вече видяхме, е инвариантна величина, и следователно може да се разглежда като 4-скалар.

Б) 4-радиус-вектор.



В тримерното евклидово пространство точка с координати x, y, z е геометричен образ на радиус-вектора $\vec{r} = (x, y, z)$ с компоненти съответно компонентите на точката.

По съвсем аналогичен начин координатите на една пространствено-временна точка (т.е. събитие) (ct, x, y, z) могат да се разглеждат като компоненти на **4-радиус-вектор**. Прието е тези компоненти да се означават по следния начин:

$$c.t = x^0; \qquad x = x^1; \qquad y = y^1; \qquad z = z^1,$$

или в по-кратък запис като **<u>4-радиус-вектор</u>**:

$\boxed{X \equiv X^{\mu} = (x^0, x^1, x^2, x^3) \equiv (x^0, \vec{r})}$, където $\mu = 0, 1, 2, 3$.

(**Забележка**: за по-голяма яснота в бъдеще:

- с латински индекси i, j, k, l ще означаваме само **пространствените** компоненти на вектори;
- с гръцки индекси $\mu, \nu, \lambda, \sigma$ ще означаваме **пространствено-времените** компоненти на 4-вектори.)

В горния запис на 4-радиус-вектор компонентата $\boxed{x^0}$ се нарича **временна компонента**, а $\boxed{\vec{r}}$ - **пространствена компонента** на 4-радиус-вектора.

На понятието „4-радиус-вектор” може да се даде и следното аналитично определение:

Определение: **4-радиус-вектор** е величина с 4 компоненти, която при смяна на координатната система (КС) се трансформира по закона (1) $X^{\mu} = \Lambda^{\mu}_{\nu} . X^{/\nu}$, където $\mu = 0, 1, 2, 3$.

В горния запис Λ^{μ}_{ν} е следната матрица

$$(2) \qquad \Lambda^{\mu}_{\nu} = \begin{pmatrix} \gamma & \beta\gamma & 0 & 0 \\ \beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

където са използвани означенията

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}, \text{ а } \beta = \frac{v}{c}.$$

С отчитането на (2) трансформационният закон (1) за 4-радиус-вектор може да се запише във вида

$$\begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & \beta\gamma & 0 & 0 \\ \beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x'^{0} \\ x'^{1} \\ x'^{2} \\ x'^{3} \end{pmatrix}.$$

Горното матрично равенство може да бъде записано във вида

$$(1') \qquad \left| \begin{array}{l} x^0 = \gamma.x'^{0} + \beta\gamma.x'^{1} \equiv \gamma(x'^{0} + \beta.x'^{1}) \\ x^1 = \beta\gamma.x'^{0} + \gamma.x'^{1} \equiv \gamma(x'^{1} + \beta.x'^{0}) \\ x^2 = x'^{2} \\ x^3 = x'^{3} \end{array} \right.$$

Равенствата ($1'$) изразяват специалните трансформации на Лоренц за компонентите на 4-радиус-вектора. Обратните на ($1'$) трансформации се получават с помощта на матрицата $\Lambda^{-1}(\beta) \equiv \Lambda(-\beta)$.

Формулите ($1'$) изразяват трансформационния закон на т.нар. **<u>контравариантни компоненти</u>** на 4-радиус-вектора X^{μ} (където $\mu = 0, 1, 2, 3$). А понякога се казва още, че формули ($1'$) изразяват т.нар. **<u>контравариантен запис</u>** на трансформационния закон на 4-радиус-вектора X^{μ}.

Въвеждат се също и **<u>ковариантни компоненти</u>** на 4-радиус-вектора X_{μ} (където $\mu = 0, 1, 2, 3$).

Едно **формално различие** между **ковариантни** и **контравариантни** компоненти е, че първите са с **долен индекс**, а вторите – с **горен индекс**.

Връзката между въведените **ковариантни** и **контравариантни** компоненти се дава с матричното равенство

(3) $\quad x_{\mu} = g_{\mu\nu} x^{\nu}$, където $\mu, \nu = 0, 1, 2, 3$.

В горното равенство величината $g_{\mu\nu}$ се определя с представянето

$$(4) \qquad g_{\mu\nu} = \begin{cases} 0, & \mu \neq \nu \\ 1, & \mu = \nu = 0 \\ -1, & \mu = \nu = 1, 2, 3 \end{cases}, \quad \text{т.е. } g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

В дясната страна на (3) по повтарящи се долен и горен индекс се подразбира сумиране от 0 до 3. Понякога вместо (3) може да се използва още връзката

($3'$) $\quad x^{\mu} = g^{\mu\nu} x_{\nu}$, където $\mu, \nu = 0, 1, 2, 3$.

С помощта на (3) и (4) ще получим представяне в явен вид на 4-радиус-вектора в ковариантен запис:

- при $\mu = 0$ (и $\nu = 0$) имаме $g_{00} = 1$, $\Rightarrow$ $x_0 = g_{00}.x^0 = 1.x^0 \equiv x^0$;

- при $\mu = 1$ (и $\nu = 1$) имаме $g_{11} = -1$, $\Rightarrow$ $x_1 = g_{11}.x^1 = (-1).x^1 \equiv -x^1$;
- при $\mu = 2$ (и $\nu = 2$) имаме $g_{22} = -1$, $\Rightarrow$ $x_2 = g_{22}.x^2 = (-1).x^2 \equiv -x^2$; и
- при $\mu = 3$ (и $\nu = 3$) имаме $g_{33} = -1$, $\Rightarrow$ $x_3 = g_{33}.x3 = (-1).x^3 \equiv -x^3$.

В по-обозрим запис получаваме, че

$$\boxed{x_0 = x^0; \qquad x_1 = -x^1; \qquad x_2 = -x^2, \text{ и } \; x_3 = -x^3.}$$

Лесно се вижда, че в ковариантен запис временната компонента ($\mu = 0$) не променя знака си, обаче пространствените компоненти ($\mu = 1, 2, 3$) променят знака си.

<u>Извод</u>: **контравариантния** X^μ и **ковариантния** X_μ **4-радиус-вектори** имат **<u>еднакви</u> временни компоненти** ($x_0 = x^0$), но **<u>противоположни</u> пространствени компоненти** ($x_i = -x^i, \quad i = 1, 2, 3$).

Казаното може да се обобщи със следните две представяния

(5) $\qquad X^\mu = (x^0, x^1, x^2, x^3) \equiv (x^0, \vec{r})$, докато

(5$^/$) $\qquad X_\mu = (x_0, x_1, x_2, x_3) = (x^0, -x^1, -x^2, -x^3) \equiv (x^0, -\vec{r})$.

Квадратът X^2 **на 4-радиус-вектора** може да се получи с помощта на известното вече представяне за квадрата S^2 на пространствено-времения интервал между две точки (събития) в псевдоевклидовото пространство, при положение че едната от тях има координати, равни на нула:

(6) $\quad S^2 \equiv X^2 = c^2t^2 - x^2 - y^2 - z^2 = (x^0)^2 - (x^1)^2 - (x^2)^2 - (x^3)^2 =$ … *от (5) и (5$^/$)* …

…… $\quad = (x^0)(x_0) - (x^1)(-x_1) - (x^2)(-x_2) - (x^3)(-x_3) = x^0x_0 + x^1x_1 + x^2x_2 + x^3x_3$.

И така показахме, че квадратът X^2 на 4-радиус-вектора е

$\boxed{X^2 = x^0x_0 + x^1x_1 + x^2x_2 + x^3x_3 \equiv x^\mu x_\mu}$, където $\mu, \nu = 0, 1, 2, 3$, и по повтарящия се индекс μ се извършва сумиране.

Ако отчетем факта, че $r^2 = x^2 + y^2 + z^2 \equiv x_i^2$ за $i = 1, 2, 3$, то от (6) ще получим

(6$^/$) $\qquad X^2 = (x^0)^2 - (x^1)^2 - (x^2)^2 - (x^3)^2 = (x^0)^2 - r^2$.

Нека в заключение отбележим, че е без значение компонентите на кой вектор (ковариантния или контравариантния) стоят на първо място в израза за X^2, т.е. в сила е

$\boxed{X^2 = x^\mu x_\mu = x_\mu x^\mu = (x^0)^2 - r^2}$.

В) 4-вектор

По аналогия с трикомпонентните вектори, дефинирани в тримерното евклидово пространство, какъвто е например векторният магнитен потенциал

$$\vec{A} = (A_x, A_y, A_z) = (A^1, A^2, A^3),$$

могат да се дефинират и вектори в четиримерното псевдоевклидово пространство, които следва да се нарекат **4-вектори** (т.е. 4-компонентни величини), имащи представяне от вида

$\boxed{A^\mu = (A^0, A^1, A^2, A^3) \equiv (A^0, \vec{A})}$.

И тук, както при 4-радиус-вектор, се различават два типа компоненти на 4-вектор: **контравариантни** A^μ и **ковариантни** A_μ.

Определение: **контравариантен** 4-вектор е величина с 4 компоненти, която при преход от една КС в друга се трансформира по закона

(7) $\qquad A^\mu = \Lambda^\mu_\nu . A^{/\nu}$,

където $\mu = 0, 1, 2, 3$.

Следвайки аналогията с 4-радиус-вектора, можем да запишем още, че ковариантният запис на един 4-вектор се получава от равенството

$A_\mu = g_{\mu\nu} A^\nu$, където $\mu, \nu = 0, 1, 2, 3$,

и има вида

$$\boxed{A_\mu = (A_0, A_1, A_2, A_3) \equiv (A^0, -\vec{A})},$$

т.е. контравариантният A^μ и ковариантният A_μ 4-вектори имат **еднакви временни** и **противоположни пространствени** компоненти.

Скаларният квадрат A^2 на 4-вектор се дава с израза

(8) $$A^2 = (A.A) = A^\mu A_\mu = A_\mu A^\mu = (A^0)^2 - (\vec{A})^2.$$

А ако имаме два 4-вектора $A = (A^0, \vec{A})$ и $B = (B^0, \vec{B})$, то **скаларното им произведение** в 4-мерното пространство се дефинира по следния начин

(9) $$(A.B) = A^\mu B_\mu = A_\mu B^\mu = A^0 B^0 - (\vec{A}.\vec{B}).$$

Г) 4-тензори

Определение: контравариантен тензор от II ранг е величина с 4x4=16 компоненти, която при смяна на КС се трансформира по закона (трансформационен закон за 4-тензор)

(10) $$\Phi^{\mu\nu} = \Lambda^\mu_\lambda . \Lambda^\nu_\sigma . \Phi'^{\lambda\sigma}$$

Според мястото на индексите си 4-тензорите могат да бъдат:

- контравариантни $\Phi^{\mu\nu}$;
- ковариантни $\Phi_{\mu\nu}$;
- смесени $\Phi_\mu{}^\nu$ или $\Phi^\mu{}_\nu$, като тук има значение кой индекс (първи, т.е. ляв, или втори, т.е. десен) е ковариантен (т.е. долен) и кой – контравариантен (т.е. горен), поради което в общия случай $\Phi_\mu{}^\nu \neq \Phi^\mu{}_\nu$.

При 4-тензорите първият (левият) индекс е индекс на ред, докато вторият (десният) индекс е индекс на стълб от 4x4-матрицата, чрез която се представя аналитично този тензор. Например един контравариантен тензор $\Phi^{\mu\nu}$ и един тензор от смесен тип $\Phi^\mu{}_\nu$ се представят посредством следните матрици

$$\Phi^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} \Phi^{00} & \Phi^{01} & \Phi^{02} & \Phi^{03} \\ \Phi^{10} & \Phi^{11} & \Phi^{12} & \Phi^{13} \\ \Phi^{20} & \Phi^{21} & \Phi^{22} & \Phi^{23} \\ \Phi^{30} & \Phi^{31} & \Phi^{32} & \Phi^{33} \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad \Phi^\mu{}_\nu = \begin{pmatrix} \Phi^0{}_0 & \Phi^0{}_1 & \Phi^0{}_2 & \Phi^0{}_3 \\ \Phi^1{}_0 & \Phi^1{}_1 & \Phi^1{}_2 & \Phi^1{}_3 \\ \Phi^2{}_0 & \Phi^2{}_1 & \Phi^2{}_2 & \Phi^2{}_3 \\ \Phi^3{}_0 & \Phi^3{}_1 & \Phi^3{}_2 & \Phi^3{}_3 \end{pmatrix}.$$

В алгебрата на тензорите се използват т.нар. операции „сваляне” и „качване” на индекс(и), като се следва едно общо **<u>правило</u>**: когато индексът е „0” (т.е. **временен индекс**), знакът на компонентата на тензора **не се променя**, <u>обаче</u> когато индексът е 1, 2 или 3 (т.е. **пространствен индекс**), то знакът на компонентата на тензора **се променя**.

Например имаме:

☞ $\Phi_{01} = \Phi^0{}_1$, понеже е „качен” „временен” индекс 0;

☞ $\Phi_{01} = -\Phi_0{}^1$, понеже е „качен” „пространствен” индекс 1;

☞ $\Phi_{01} = -\Phi^{01}$, понеже са „качени” „временен” индекс 0 и „пространств.” индекс 1;

☞ $\Phi^{13} = -\Phi_1{}^3$, понеже е „свален” „пространствен” индекс 1;

☞ $\Phi^{13} = \Phi_{13}$, понеже са „свалени” 2 „пространствени” индекса 1 и 3, всеки един от които променя знака, обаче двата заедно дават принос $(-1).(-1) = +1$ и следователно не променят знака на компонентата на тензора;

☞ $\Phi^{13} = -\Phi^{1}{}_{3}$, понеже е „свален” „пространствен” индекс 3; и т.н.

Когато $\Phi_{\mu\nu} = \Phi_{\nu\mu}$, то тензорът се нарича **<u>симетричен тензор</u>** (елементите на тензора, разположени симетрично относно главния му диагонал, са **равни по големина**).

А когато $\Phi_{\mu\nu} = -\Phi_{\nu\mu}$, то тензорът се нарича **<u>антисиметричен тензор</u>** (елементите на тензора, разположени симетрично относно главния му диагонал, са **противоположни по големина**).

Сега не е трудно да се убедим, че въведената с равенство (4) величина $g_{\mu\nu}$ представлява 4-тензор от II , наречен **<u>метричен тензор</u>**. Той се представя в следния явен вид

$$(4^{/}) \qquad g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

и очевидно е **ковариантен симетричен тензор**. Той е изключителен със свойството си, че компонентите му са едни и същи във всяка ИОС, т.е. те са *инвариантни компоненти*.

Чрез метричния тензор се изразява връзката между ковариантни и контравариантни компоненти на 4-вектор, както и скаларен квадрат на 4-вектор, а именно:

$A_{\mu} = g_{\mu\nu}A^{\nu}$, или $A^{\mu} = g^{\mu\nu}A_{\nu}$, където $\mu, \nu = 0, 1, 2, 3$, а $\boxed{g_{\mu\nu} = g^{\mu\nu}}$.

$X^2 = X^{\mu}.X_{\nu} = g_{\mu\nu}X^{\nu}X^{\mu} \equiv S^2$, както и квадратът на безкрайно малкия пространствено-временен интервал

$$(11) \qquad (dS)^2 = g_{\mu\nu}dX^{\mu}dX^{\nu}.$$

От определението за антисиметричен тензор, дадено по-горе, следва, че този тензор има нули по главния си диагонал, а останалите му (недиагонални) елементи, разположени симетрично относно диагонала, са равни по големина и противоположни по знак, т.е.

$$\Phi^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & \Phi^{01} & \Phi^{02} & \Phi^{03} \\ -\Phi^{01} & 0 & \Phi^{12} & \Phi^{13} \\ -\Phi^{02} & -\Phi^{12} & 0 & \Phi^{23} \\ -\Phi^{03} & -\Phi^{13} & -\Phi^{23} & 0 \end{pmatrix}.$$

От горното представяне следва, че един антисиметричен тензор от II ранг има 6 независими компоненти – **или** тези <u>над главния диагонал</u>, **или** тези <u>под него</u>. Следователно тези компоненти могат да се разглеждат като компоненти на два тримерни вектора:

- **полярен** $\vec{p} = (\Phi^{01}, \Phi^{02}, \Phi^{03})$, и

- **аксиален** $\vec{a} = (-\Phi^{23}, \Phi^{13}, -\Phi^{12})$.

С помощта на компонентите на тези два вектора могат да бъдат изразени компонентите на антисиметричния тензор $\Phi^{\mu\nu}$

$$\Phi^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & p_x & p_y & p_z \\ -p_x & 0 & -a_z & a_y \\ -p_y & a_z & 0 & -a_x \\ -p_z & -a_y & a_x & 0 \end{pmatrix}.$$