Тема 16. Плоска монохроматична електромагнитна вълна

Всяка вълна може да се представи в дадена точка като суперпозиция от **плоски монохроматични вълни**.

Ако електромагнитното поле има характер на плоска монохроматична вълна, то полевите вектори $\vec{E}$ и $\vec{B}$ са

(1[А]) $\vec{E}(\vec{r},t) = \vec{E}_0\, e^{i\omega\left(t-\frac{\vec{n}\cdot\vec{r}}{c}\right)}$; и

(1[Б]) $\vec{B}(\vec{r},t) = \vec{B}_0\, e^{i\omega\left(t-\frac{\vec{n}\cdot\vec{r}}{c}\right)}$,

където $\vec{E}_0$ и $\vec{B}_0$ са **комплексни постоянни вектори** (*постоянни вектори с комплексни компоненти*). Модулът на всяка компонента (1) е амплитудата, а аргумента – **фазовата константа** на съответния полеви вектор ($\vec{E}$ или $\vec{B}$).

Уравненията (1) са решения на **хомогенните вълнови уравнения**, явяващи се следствия от уравненията на Максуел при **отсъствие на източници** ($\rho = 0$ и $\vec{j} = 0$):

$$(2)\quad \left| \begin{array}{l} div\,\vec{E}=0\,, \\ rot\,\vec{E}=-\dfrac{\partial \vec{B}}{\partial t}\,, \\ div\,\vec{B}=0\,, \\ rot\,\vec{B}=\varepsilon_0\mu_0\,\dfrac{\partial \vec{E}}{\partial t}\,. \end{array} \right.$$

Ако се заместят ($1^{А,Б}$) в (2), се получават следните връзки, даващи много полезна информация относно пространствената структура на ЕМ поле:

(3.1) $\vec{E}\cdot\vec{n}=0$, (3.2) $\vec{B}\cdot\vec{n}=0$, (3.3) $\vec{B}=\dfrac{\vec{n}\times\vec{E}}{c}$.

А) Доказателство на (3.1):

Ако заместим ($1^{А}$) в първото от уравнения (2), получаваме:

$$div\,\vec{E}(\vec{r},t)=div\left(\vec{E}_0\,e^{i\omega\left(t-\frac{\vec{n}\cdot\vec{r}}{c}\right)}\right)=\left(div\,\vec{E}_0\right)e^{i\omega\left(t-\frac{\vec{n}\cdot\vec{r}}{c}\right)}+\vec{E}_0.grad\,e^{i\omega\left(t-\frac{\vec{n}\cdot\vec{r}}{c}\right)}\equiv$$

$$\equiv\vec{E}_0.grad\,e^{i\omega\left(t-\frac{\vec{n}\cdot\vec{r}}{c}\right)}=\vec{E}_0.grad\left(e^{i\omega t}\,e^{-i\omega\frac{\vec{n}\cdot\vec{r}}{c}}\right)=\vec{E}_0\,e^{i\omega t}.grad\,e^{-i\omega\frac{\vec{n}\cdot\vec{r}}{c}}=$$

$$=\vec{E}_0\,e^{i\omega t}e^{-i\omega\frac{\vec{n}\cdot\vec{r}}{c}}.grad\left(-i\omega\frac{\vec{n}\cdot\vec{r}}{c}\right)=-\frac{i\omega}{c}\vec{E}_0\,e^{i\omega\left(t-\frac{\vec{n}\cdot\vec{r}}{c}\right)}.grad\,(\vec{n}\cdot\vec{r})=$$

$$=-\frac{i\omega}{c}\vec{E}\,.grad\,(\vec{n}\cdot\vec{r})\,.$$

Ако използваме формулата от векторния анализ $grad\,(\vec{n}\cdot\vec{r})=\vec{n}$, получаваме

$$div\,\vec{E}(\vec{r},t)=-\frac{i\omega}{c}\vec{E}\,.\vec{n}\,.$$

Но съгласно (2) $div\,\vec{E}(\vec{r},t)=0$, откъдето следва

$-\dfrac{i\omega}{c}\vec{E}\,.\vec{n}=0$, т.е. $\vec{E}\,.\vec{n}=0$, к.т.д.

Б) Доказателство на (3.2): напълно аналогично на това за (3.1), като в този случай заместваме ($1^{Б}$) във третото от уравнения (2).

В) Доказателство на (3.3):

Заместваме ($1^{А}$) и ($1^{Б}$) в третото от уравнения (2) и получаваме:

$$rot\left(\vec{E}_0\,e^{i\omega\left(t-\frac{\vec{n}\cdot\vec{r}}{c}\right)}\right)=-\frac{\partial}{\partial t}\left(\vec{B}_0\,e^{i\omega\left(t-\frac{\vec{n}\cdot\vec{r}}{c}\right)}\right).$$

Ако приложим формулата от векторния анализ

$rot(uU)=u\,rotU-U\times grad\,u$,

ще получим

$$e^{i\omega\left(t-\frac{\vec{n}\cdot\vec{r}}{c}\right)}rot\left(\vec{E}_0\right)-\vec{E}_0\times grad\left(e^{i\omega\left(t-\frac{\vec{n}\cdot\vec{r}}{c}\right)}\right)=-\vec{B}_0\,e^{-i\omega\frac{\vec{n}\cdot\vec{r}}{c}}\frac{\partial}{\partial t}(e^{i\omega t})\,.$$

Отчитайки, че $rot(\vec{E}_0)=0$, получаваме

$$-\vec{E}_0\times e^{i\omega t}grad\left(e^{-i\omega\frac{\vec{n}\cdot\vec{r}}{c}}\right)=-\vec{B}_0\,e^{-i\omega\frac{\vec{n}\cdot\vec{r}}{c}}(i\omega e^{i\omega t})$$

$$-\vec{E}_0 \times e^{i\omega t} e^{-i\omega\frac{\vec{n}\cdot\vec{r}}{c}} grad\left(-i\omega\frac{\vec{n}\cdot\vec{r}}{c}\right) = -i\omega\vec{B}_0 e^{i\omega t} e^{-i\omega\frac{\vec{n}\cdot\vec{r}}{c}}$$

$$-\left(\frac{-i\omega}{c}\right)\vec{E}_0 e^{i\omega\left(t-\frac{\vec{n}\cdot\vec{r}}{c}\right)} \times grad(\vec{n}\cdot\vec{r}) = -i\omega\vec{B}_0 e^{i\omega\left(t-\frac{\vec{n}\cdot\vec{r}}{c}\right)} \qquad \Big| : (-i\omega)$$

$$-\frac{1}{c}\vec{E}\times\vec{n} = \vec{B}, \text{ т.е. } \quad \vec{B} = -\frac{\vec{E}\times\vec{n}}{c} \equiv \frac{\vec{n}\times\vec{E}}{c}, \text{ к.т.д.}$$

От (3.1) и (3.2) следва, че електричното и магнитното полета при плоска монохроматична вълна са перпендикулярни на вектора $\vec{n}$ (*векторът, даващ посоката на разпространение на ЕМ вълна*).

От (3.3) следва, че $\vec{E}$ и $\vec{B}$ са перпендикулярни помежду си и лежат в равнина с уравнение $\vec{n}\cdot\vec{r} = d$, където d е разстоянието до началото координатната система. При това трите вектора $\vec{n}$, $\vec{E}$ и $\vec{B}$ образуват дясна тройка взаимно ортогонални вектори. Това означава, че векторът $\vec{B}$ се „получава” от $\vec{E}$ като го завъртим около $\vec{n}$ на ъгъл $\pi/2$, и след това умножим с константата $1/c$. Всичко това означава, че можем да изследваме ЕМ вълна, изучавайки само и единствено $\vec{E}$.

Нека разгледаме координатна система, спрямо която

(4) $\qquad \vec{n} = (0, 0, 1)$,

т.е. оста $O\vec{z}$ на тази координатна система има посоката на разпространение на вълната, която следва да няма компонента по $O\vec{z}$, т.е.

$$\vec{E} = (E_x, E_y, 0).$$

Компонентите на вектора на полето са равни на реалните части на комплексните вектори (1), следователно зависимостта от координатите и времето на коя да е от тези компоненти може да се запише във вида

(5) $$u(\vec{r}, t) = u_0 \cos\left[\omega\left(t - \frac{\vec{n}\cdot\vec{r}}{c}\right) + \varphi\right],$$

където u_0 и φ са съответно амплитудата и фазовата константа на разглежданата компонента.

Имайки предвид това, и отчитайки, че $\vec{E}_0 = (A, B, 0)$, за проекциите E_x и E_y на електричния вектор получаваме

(6) $$\left| \begin{aligned} E_x &= a\cdot\cos\left[\omega\left(t-\frac{z}{c}\right)+\alpha\right] \\ E_y &= b\cdot\cos\left[\omega\left(t-\frac{z}{c}\right)+\beta\right] \end{aligned} \right.,$$

където:

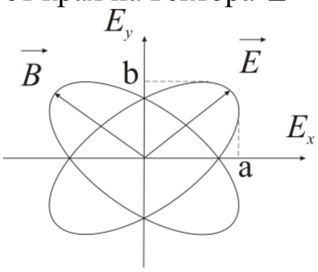
- ☞ $A = a\cdot e^{i\alpha}$,
- ☞ $B = b\cdot e^{i\cdot\beta}$,
- ☞ $\vec{n}\cdot\vec{r} = z$.

Равенства (6) могат да бъдат записани още във вида

$$\left| \begin{aligned} \frac{E_x}{a} &= \cos\,(\psi+\alpha) = \cos\psi\cdot\cos\alpha - \sin\psi\cdot\sin\alpha \\ \frac{E_y}{b} &= \cos\,(\psi+\beta) = \cos\psi\cdot\cos\beta - \sin\psi\cdot\sin\beta \end{aligned} \right.,$$

където $\psi = \omega\left(t - \frac{z}{c}\right)$.

Решавайки тази система от уравнения спрямо $\cos\psi$ и $\sin\psi$, и замествайки след това в тъждеството $\sin^2\psi + \cos^2\psi = 1$, получаваме уравнение на траекторията, описвано от края на вектора $\vec{E}$



(7) $$\frac{E_x^2}{a^2} + \frac{E_y^2}{b^2} - 2\frac{E_x \cdot E_y}{a \cdot b}\cos(\alpha - \beta) = \sin^2(\alpha - \beta).$$

Съгласно (6) E_x и E_y са ограничени, следователно (7) е **уравнение на елипса в неканоничен вид**. Тази елипса е вписана в правоъгълник със страни $2a$ и $2b$ (виж фигурата).

Елипсата, описвана от края на вектора $\vec{B}$ има оси, завъртени относно осите на елипсата на електричния вектор $\vec{E}$ на ъгъл $\pi/2$, а посоките на въртене на векторите $\vec{E}$ и $\vec{B}$ съвпадат.

Определение: Плоска монохроматична вълна, в която краят на вектора $\vec{E}$ описва елипса, се нарича **елиптично-поляризирана вълна**, а самото явление – **елиптична поляризация на светлината**.

Ще разгледаме два частни случая:

1) $\alpha - \beta = (2k+1)\frac{\pi}{2}$, където k - цяло число. За този случай уравнение (7) добива вида

$$\frac{E_x^2}{a^2} + \frac{E_y^2}{b^2} = 1$$ - уравнение на елипса в каноничен вид.

При $a = b$ елипсата преминава в окръжност

(8) $$E_x^2 + E_y^2 = a^2,$$

А самата вълна в този случай ще бъде (*ще се нарича*) **кръгово поляризирана вълна**.

2) $\alpha - \beta = k \cdot \pi$, където k - цяло число. За този случай уравнение (7) добива вида

$$\left(\frac{E_x}{a} \pm \frac{E_y}{b}\right)^2 = 0.$$

От това уравнение може да се заключи, че краят на вектора $\vec{E}$ остава върху отсечка, лежаща върху права, минаваща през началото на координатната система, и чийто ъглов коефициент („*наклон*") е $\pm\frac{b}{a}$. Вълната в този случай се определя като **линейно поляризирана вълна**.

Когато гледано от посоката на $\vec{n}$, краят на вектора $\vec{E}$ се движи по елипсата в **директна посока** (т.е. посока, обратна на часовниковата стрелка), то вълната се нарича **дясно поляризирана вълна**, а когато движението на края на електричния вектор $\vec{E}$ е в **индиректна посока** (т.е. посока на часовниковата стрелка), то вълната се нарича **ляво поляризирана вълна**. При първия случай $0 < \alpha - \beta < \pi$, а при втория случай $\pi < \alpha - \beta < 2 \cdot \pi$. За линейно поляризирани вълни тези понятия нямат смисъл.

Определение: равнината, определена от посоката на разпространение на вълната (т.е. от $\vec{n}$) и малката полуос на елипсата, описвана от края на вектора $\vec{E}$, се нарича **равнина на поляризацията**, докато равнината, определена от $\vec{n}$ и голямата полуос на елипсата, описвана от края на вектора $\vec{E}$, се нарича **равнина на трептенето**. Тези две равнини са взаимно перпендикулярни.

За кръгово поляризирани вълни тези равнини не са определени. Ако посоките на трептене на векторите $\vec{E}$ и $\vec{B}$ хаотично се променят, то вълната е неполяризирана.

Може да се докаже, че всяка елиптично поляризирана вълна може да се представи като **суперпозиция от две линейно поляризирани вълни с взаимно перпендикулярни равнини на поляризация**, както и като **суперпозиция от две кръгово поляризирани в противоположни посоки плоски електромагнитни вълни**.

За вектора на Умов-Пойтинг на плоска монохроматична електромагнитна вълна ще имаме

$$\vec{S} = \frac{\vec{E}\times\vec{B}}{\mu_0} = \ \ldots\text{от (3) } \vec{B} = \frac{\vec{n}\times\vec{E}}{c}\ \ldots\ = \frac{1}{\mu_0 c}\vec{E}\times(\vec{n}\times\vec{E}) = \frac{1}{\mu_0 c}[(\vec{E}\cdot\vec{E})\vec{n} - (\vec{E}\cdot\vec{n})\vec{E}] = \ldots$$

$$\ldots\text{ пак от (3) } \vec{E}\cdot\vec{n} = 0\ \ldots.$$

$$= \frac{1}{\mu_0 c}[(\vec{E}\cdot\vec{E})\vec{n} - 0\cdot\vec{E}] = \frac{(\vec{E}\cdot\vec{E})\vec{n}}{\mu_0 c}, \text{ т.е.}$$

$$(8)\qquad \vec{S} = \frac{\vec{E}^{\,2}}{\mu_0 c}\vec{n}.$$

Определяме също и плътността ω на електромагнитната енергия на полето на плоска вълна

$$\omega = \frac{\varepsilon_0\vec{E}^{\,2}}{2} + \frac{\vec{B}^{\,2}}{2\mu_0} = \omega_E + \omega_M.$$

С помощта на съотношенията (3), т.е. $\vec{E}\cdot\vec{n} = 0$, $\vec{B}\cdot\vec{n} = 0$ и $\vec{B} = \dfrac{\vec{n}\times\vec{E}}{c}$ лесно може да се покаже, че $\omega_E = \omega_M$. Действително

$$(*)\qquad \omega_M = \frac{\vec{B}^{\,2}}{2\mu_0} = \frac{1}{2\mu_0}\frac{(\vec{n}\times\vec{E})^2}{c^2}.$$

За определянето на $(\vec{n}\times\vec{E})^2$ използваме известната формула от векторното смятане

$(\vec{a}\times\vec{b})\cdot(\vec{c}\times\vec{d}) = (\vec{a}\cdot\vec{c})(\vec{b}\cdot\vec{d}) - (\vec{a}\cdot\vec{d})(\vec{b}\cdot\vec{c})$, или още

$(\vec{a}\times\vec{b})^2 \equiv (\vec{a}\times\vec{b})\cdot(\vec{a}\times\vec{b}) = (\vec{a}\cdot\vec{a})(\vec{b}\cdot\vec{b}) - (\vec{a}\cdot\vec{b})(\vec{b}\cdot\vec{a}) \equiv \vec{a}^{\,2}\vec{b}^{\,2} - (\vec{a}\cdot\vec{b})^2$.

При $\vec{a}\to\vec{n}$ и $\vec{b}\to\vec{E}$ от горната формула получаваме, че

$(\vec{n}\times\vec{E})^2 = \vec{n}^{\,2}\vec{E}^{\,2} - (\vec{n}\cdot\vec{E})^2 \equiv \vec{E}^{\,2}$, понеже $\vec{n}^{\,2} = 1$ и $\vec{n}\cdot\vec{E} = 0$ съгласно (3).

Заместваме така намереното $(\vec{n}\times\vec{E})^2$ в (*) и получаваме

$$\omega_M = \frac{1}{2\mu_0}\frac{(\vec{n}\times\vec{E})^2}{c^2} = \frac{1}{2\mu_0 c^2}\vec{E}^{\,2} = \frac{\varepsilon_0\vec{E}^{\,2}}{2} \equiv \omega_E, \text{ к.т.д.}$$

Щом $\omega_M = \omega_E = \dfrac{\varepsilon_0\vec{E}^{\,2}}{2}$, то общата обемна плътност на ЕМ лъчение на плоска монохроматична вълна е

$$(9)\qquad \omega = \omega_E + \omega_M = 2\cdot\omega_E = 2\cdot\frac{\varepsilon_0\vec{E}^{\,2}}{2} = \varepsilon_0\vec{E}^{\,2}.$$

От (8) и (9) следва, че

$$(10)\qquad \vec{S} = \frac{\vec{E}^{\,2}}{\mu_0 c}\vec{n} = \frac{\varepsilon_0}{\varepsilon_0}\frac{\vec{E}^{\,2}}{\mu_0 c}\vec{n} = \frac{\varepsilon_0\vec{E}^{\,2}}{(\varepsilon_0\mu_0)c}\vec{n} = \frac{\omega}{(1/c^2)c}\vec{n} = c\,\omega\vec{n}.$$

Извод: електромагнитната енергия на полето на плоска монохроматична вълна се разпространява по посока на единичния вектор $\vec{n}$ със скорост „c”.

Тъй като полето е бързопроменлива функция на времето, можем да определим и **средните по време** стойности на $\vec{S}$ и ω. С помощта на (8) и (9) се доказва, че тези средни стойности са съответно

(11) $\qquad \bar{\vec{S}} = \dfrac{1}{2}\dfrac{\left|\vec{E}_0\right|^2}{\mu_0 c}\,\vec{n}$, и

(12) $\qquad \overline{\varpi} = \dfrac{1}{2}\dfrac{\left|\vec{E}_0\right|^2}{\mu_0 c^2}$,

където $\left|\vec{E}_0\right|^2 = a^2 + b^2$.

Лесно се вижда, че и между средните стойности на $\vec{S}$ и ω съществува съотношение, аналогично на (10), т.е.

$\bar{\vec{S}} = c\,\overline{\varpi}\,\vec{n}$.

Величината $I = \left|\bar{\vec{S}}\right|$ се нарича **интензитет на плоска електромагнитна вълна**. Това е **енергията**, преминала **за единица време през единица площ**, разположена **перпендикулярно** на посоката на разпространение на вълната.