Тема 15. Вълново уравнение на полето

В теорията на електромагнитното поле се доказва, че е възможно да съществува поле дори и тогава, когато отсъстват източници на такова, т. е. когато

(1) $\rho = 0$, $\vec{j} = 0$.

За този случай уравненията на Максуел

$$(2)\quad \left| \begin{array}{l} div\,\vec{E} = \dfrac{\rho}{\varepsilon_0}, \\ rot\,\vec{E} = -\dfrac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \\ div\,\vec{B} = 0, \\ rot\,\vec{B} = \mu_0\,\vec{j} + \dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial \vec{E}}{\partial t}, \end{array} \right.$$

добиват вида

$$(3)\quad \left| \begin{array}{l} div\,\vec{E} = 0, \\ rot\,\vec{E} = -\dfrac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \\ div\,\vec{B} = 0, \\ rot\,\vec{B} = \dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial \vec{E}}{\partial t}. \end{array} \right.$$

За да получим вълновото уравнение, което трябва да удовлетворява електричния вектор $\vec{E}$, прилагаме операцията „ротация” спрямо второто от уравненията (3)

$$rot\ rot\,\vec{E} = rot\left(-\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\right) = -\frac{\partial}{\partial t} rot\,\vec{B} = -\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{c^2}\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}\right) = -\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} \quad \text{съгласно (3).}$$

А в лявата страна на горното равенство имаме

$rot\ rot\,\vec{E} = grad\,div\,\vec{E} - \Delta\,\vec{E} \equiv -\Delta\,\vec{E}$, понеже съгласно (3) $div\,\vec{E} = 0$.

Така стигаме до равенството

$$(4)\quad \boxed{\Delta\,\vec{E} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0}.$$

По подобен начин, само че прилагайки операцията „ротация” спрямо четвъртото от уравненията (3), получаваме подобно уравнение и за $\vec{B}$

(5) $$\boxed{\Delta\vec{B}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{B}}{\partial t^2}=0}.$$

Уравнения от вида

$$\Delta\psi(r,t)-\frac{1}{V^2}\frac{\partial^2\psi(r,t)}{\partial t^2}=-f(r,t)$$

се наричат **нехомогенни вълнови уравнения**, в които:

☞ $\psi(r,t)$ - функцията, описваща разпространяващия се вълнов процес;

☞ V - скорост на разпространение на вълновия процес;

☞ $f(r,t)$- плътност на източниците на вълновия процес.

Ако $f(r,t)=0$, то вълновото уравнение става **хомогенно**.

От казаното дотук става ясно, че уравненията (4) и (5) са хомогенни вълнови уравнения, удовлетворявани от полевите вектори $\vec{E}$ и $\vec{B}$ съответно, а скоростта на разпространение на електромагнитната вълна (вълновия процес) е $V=c$.

Извод: векторите на полето $\vec{E}$ и $\vec{B}$ удовлетворяват хомогенни вълнови уравнения.

Нека видим <u>какви вълнови уравнения удовлетворяват потенциалите</u> φ (*скаларен*) и $\vec{A}$ (*векторен*) на ЕМ поле. За целта използваме следната контравариантна форма на запис на уравненията на Максуел, получена в Тема 9, формула (11)

(*) $$\frac{\partial F^{\mu\nu}}{\partial x^\mu}=\mu_0\, j^\nu \text{ за } \mu,\nu=0,1,2,3,$$

където 4-тензорът $F^{\mu\nu}$, наречен контравариантен 4-тензор на електромагнитното поле, има компоненти, изразяващи се чрез компонентите на контравариантния 4-потенциал A^μ посредством съотношението /формула (1) от Тема 7/

(**) $$F^{\mu\nu}=\frac{\partial A^\nu}{\partial x_\mu}-\frac{\partial A^\mu}{\partial x_\nu}, \text{ за } \mu,\nu=0,1,2,3.$$

Нека припомним, че 4-потенциалът A^μ е 4-вектор, който се изразява посредством скаларния φ и векторния $\vec{A}$ потенциали във вида

$$A=\left(\frac{\varphi}{c},\vec{A}\right)\equiv(A^0,A^1,A^2,A^3)=\left(\frac{\varphi}{c},A_x,A_y,A_z\right).$$

Ако заместим (**) в (*), получаваме

$$\frac{\partial}{\partial x^\mu}\left(\frac{\partial A^\nu}{\partial x_\mu}-\frac{\partial A^\mu}{\partial x_\nu}\right)=\mu_0\, j^\nu, \text{ т.е.}$$

(***) $$\frac{\partial^2 A^\nu}{\partial x^\mu\,\partial x_\mu}-\frac{\partial^2 A^\mu}{\partial x^\mu\,\partial x_\nu}=\mu_0\, j^\nu.$$

Може да се покаже, че скаларното произведение от 4-мерните диференциални оператори

$$\partial^2\equiv\partial_\mu\partial^\mu=\frac{\partial}{\partial x^\mu}\frac{\partial}{\partial x_\mu}=-\Box,$$

където

$$\Box\equiv\Delta-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}$$

е **операторът на Даламбер.** Чрез оператора на Даламбер ще изразим първия член $\frac{\partial^2 A^\nu}{\partial x^\mu\,\partial x_\mu}$ в лявата страна на (***), докато втория член $\frac{\partial^2 A^\mu}{\partial x^\mu\,\partial x_\nu}$ просто ще представим във вида

$$\frac{\partial^2 A^\mu}{\partial x^\mu \partial x_\nu} = \frac{\partial}{\partial x_\nu}\left(\frac{\partial A^\mu}{\partial x^\mu}\right).$$

Отчитайки така направените забележки в (***), получаваме следното уравнение, удовлетворявано от 4-потенциала

$$-\square A^\nu - \frac{\partial}{\partial x_\nu}\left(\frac{\partial A^\mu}{\partial x^\mu}\right) = \mu_0\, j^\nu .$$

Понеже потенциалите не са еднозначно определени, можем спрямо тях да прилагаме т.нар. **калибровъчни условия**. Нека в конкретния случай приложим следното калибровъчно условие за 4-потенциала

(6) $$\boxed{\frac{\partial A^\mu}{\partial x^\mu} = 0}.$$

Така ще получим вълново уравнение за 4-потенциала във вида

$\square A^\nu = -\mu_0\, j^\nu$, или още

(7) $$\boxed{\Delta A^\nu - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 A^\nu}{\partial t^2} = -\mu_0\, j^\nu}, \text{ за } \mu,\nu = 0,1,2,3 .$$

Извод: 4-потенциалът $A = \left(\frac{\varphi}{c}, \vec{A}\right)$ удовлетворява **нехомогенни вълнови уравнения**.

Нека запишем уравнения (7) в тримерна форма:

☞ при $\nu = 0 \;\Rightarrow\; \Delta A^0 - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 A^0}{\partial t^2} = -\mu_0\, j^0$,

където $A^0 = \frac{\varphi}{c}$, а $j^0 = \rho \cdot c$. Така получаваме

$$\Delta\left(\frac{\varphi}{c}\right) - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\frac{\varphi}{c}\right) = -\mu_0\, \rho \cdot c .$$

След умножаване с „c" и отчитане, че $\mu_0 = \frac{1}{\varepsilon_0 c^2}$, получаваме

$$\Delta\varphi - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = -\frac{1}{\varepsilon_0 c^2}\rho \cdot c^2 \equiv -\frac{\rho}{\varepsilon_0}, \text{ т.е.}$$

(7$^/$) $$\boxed{\Delta\varphi - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}},$$ **- вълново уравнение за скаларния потенциал φ.**

☞ при $\nu = 1 \;\Rightarrow\; \Delta A^1 - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 A^1}{\partial t^2} = -\mu_0\, j^1$,

където $A^1 = A_x$, а $j^1 = j_x$. Така получаваме

$$\Delta A_x - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 A_x}{\partial t^2} = -\mu_0\, j_x .$$

☞ при $\nu = 2$ и $\nu = 3$ получаваме съответно

$$\Delta A_y - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 A_y}{\partial t^2} = -\mu_0\, j_y , \text{ и}$$

$$\Delta A_z - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 A_z}{\partial t^2} = -\mu_0\, j_z .$$

Обобщавайки последните **три скаларни равенства** в **едно векторно равенство**, получаваме

(7$^{//}$) $\boxed{\Delta \vec{A} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = -\mu_0 \vec{j}}$ - **вълново уравнение за магнитния векторен потенциал** $\vec{A}$.

Нека запишем калибровъчното условие (6) по компоненти с цел и него да представим в тримерна форма

$$\frac{\partial A^\mu}{\partial x^\mu} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\partial A^0}{\partial x^0} + \frac{\partial A^1}{\partial x^1} + \frac{\partial A^2}{\partial x^2} + \frac{\partial A^3}{\partial x^3} = 0,$$ или още

$$\frac{\partial(\varphi/c)}{\partial(ct)} + \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} = 0.$$

Но тъй като $\frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} = div\,\vec{A}$, то очевидно ще имаме

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial \varphi}{\partial t} + div\,\vec{A} = 0,$$ или още

(6$^{/}$) $$div\,\vec{A} = -\frac{1}{c^2}\frac{\partial \varphi}{\partial t}.$$

Това е тримерният запис на калибровъчното условие (6), изразяващ едно съотношение, което следва да удовлетворяват компонентите на потенциалите $\vec{A}$ и φ.

За да знаем полето, следва да знаем:

☞ или **четирите компоненти** (*3+1*) на потенциалите $\vec{A}$ и φ , които при зададени ρ и $\vec{j}$ се получават като решения на (7$^{/}$) и (7$^{//}$);

☞ или **шестте компоненти** на полевите вектори $\vec{E}$ и $\vec{B}$, изразени или като решения на (4) и (5), или напр. чрез потенциалите $\vec{A}$ и φ посредством съотношенията:

(8) $$\left| \begin{array}{l} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - grad\,\varphi \\ \vec{B} = rot\,\vec{A} \end{array} \right. .$$

Ясно е, че по първия начин (чрез $\vec{A}$ и φ) задачата за определяне на полето се облекчава, тъй като се свежда до намирането на 4 неизвестни величини – скалара φ и трите компоненти на вектора $\vec{A}$.

Оказва се, че съществува и алтернативен **трети метод** за определяне на полето посредством една единствена векторна величина, наречена **вектор на Херц** $\vec{Z}$, с което задачата се свежда до намиране само на три компоненти – компонентите на въпросния вектор на Херц. Потенциалите $\vec{A}$ и φ се изразяват чрез вектора на Херц посредством съотношенията

(9) $$\left| \begin{array}{l} \varphi = -div\,\vec{Z} \\ \vec{A} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial \vec{Z}}{\partial t} \end{array} \right. ,$$

или още (*казано с други думи*) ако знаем вектора на Херц $\vec{Z}$**,** можем с помощта на равенства (9) да определим потенциалите $\vec{A}$ и φ, а оттам – чрез равенства (8) да определим полевите вектори $\vec{E}$ и $\vec{B}$.

Самият вектор на Херц може да бъде определен като решение на следното нехомогенно вълново уравнение

(10) $$\Delta \vec{Z} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \vec{Z}}{\partial t^2} = -\frac{\vec{P}}{\varepsilon_0},$$

където $\vec{P}$ е т.нар. **поляризационен вектор** (вектор на поляризацията).

Нека в заключение разгледаме уравнението за непрекъснатостта

(11) $$\frac{\partial \rho}{\partial t} + div\,\vec{j} = 0.$$

Лесно се съобразява, че това уравнение се удовлетворява тъждествено, ако са изпълнени съотношенията

(12) $$\left|\begin{array}{l} \rho = -div\,\vec{P} \\ \vec{j} = \dfrac{\partial \vec{P}}{\partial t} \end{array}\right. ,$$ понеже $$\left|\begin{array}{l} \dfrac{\partial \rho}{\partial t} = \dfrac{\partial}{\partial t}[-div\,\vec{P}] = -div\left(\dfrac{\partial \vec{P}}{\partial t}\right) \\ div\,\vec{j} = div\left(\dfrac{\partial \vec{P}}{\partial t}\right) \end{array}\right.$$

В този смисъл може да се каже, че уравнения (11) и (12) са еднакви.

Същото заключение може да бъде направено и за уравнение ($6^{/}$), записано във вида

($6^{/}$) $$div\,\vec{A} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0,$$

и уравнения (9)

(9) $$\left|\begin{array}{l} \varphi = -div\,\vec{Z} \\ \vec{A} = \dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial \vec{Z}}{\partial t} \cdot \end{array}\right.$$

Наистина ако приложим операцията div спрямо второто от уравнения (9), ще имаме

$$div\,\vec{A} = \frac{1}{c^2}\,div\frac{\partial \vec{Z}}{\partial t} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial}{\partial t}[div\,\vec{Z}] = \ldots\ \text{отчитаме че } \varphi = -div\,\vec{Z}\ \ldots\ = \frac{1}{c^2}\frac{\partial}{\partial t}[-\varphi] = -\frac{1}{c^2}\frac{\partial \varphi}{\partial t},$$

следователно $div\,\vec{A} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial \varphi}{\partial t} = \left(-\frac{1}{c^2}\frac{\partial \varphi}{\partial t}\right) + \frac{1}{c^2}\frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0$, т.е. в сила е ($6^{/}$), к.т.д.