Тема 14. Магнитни мултиполни моменти

Магнитните мултиполни моменти са понятия, свързани с задачата за намиране на магнитното поле на **ограничена система** от **стационарни токове** на **голямо разстояние** от системата.

Разглеждаме обемни токове с плътност $\vec{j}(r)$, течащи в ограничена пространствена област V. Магнитното поле на тези токове ще представим чрез магнитния векторен потенциал $\vec{A}(r,t)$ посредством формула (7) от тема 12, а именно

(1) $$\vec{A}(r) = \int_V \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\vec{j}(r^{/})}{\left| r - r^{/} \right|} dV^{/} .$$

Понеже се интересуваме от магнитното поле на големи разстояния от областта V, в която текат стационарните токове, приемаме, че

$$\frac{r^{/}}{r} << 1 .$$

Тогава функцията $\dfrac{1}{\left| r - r^{/} \right|}$, участваща в подинтегралната функция на (1), може да бъде представена в ред по степените на $\dfrac{r^{/}}{r}$, а именно

(3) $$\frac{1}{\left| r - r^{/} \right|} = ... = \frac{1}{r} + \frac{\vec{r}\cdot\vec{r}^{\,/}}{r^3} + ...$$

* **Забележка**: *третия член в редовото развитие (3) е сложен, затова не е представен.*

Заместваме (3) в (1) и за магнитния векторен потенциал получаваме

$$\vec{A}(r)=\int_V \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{\vec{j}(r^{/})}{\left|r-r^{/}\right|}\,dV^{/}=\frac{\mu_0}{4\pi}\int_V \vec{j}(r^{/})\left(\frac{1}{r}+\frac{\vec{r}\cdot\vec{r}^{/}}{r^3}+....\right)dV^{/}\text{, т.е.}$$

$$(4)\qquad \vec{A}(r)=\frac{\mu_0}{4\pi}\left[\int_V \frac{\vec{j}(r^{/})}{r}\,dV^{/}+\int_V \frac{\vec{j}(r^{/})(\vec{r}\cdot\vec{r}^{/})}{r^3}\,dV^{/}+....\right].$$

Ще докажем, че първият интеграл в (4) е равен на нула. За тази цел разглеждаме израза $div^{/}\left[(\vec{a}\cdot\vec{r}^{/})\,\vec{j}(\vec{r}^{/})\right]$, в който:

- ☞ $\vec{a}$ - константен вектор;
- ☞ $div^{/}$ - това е дивергенция, „действаща” само върху $r^{/}$, но не и върху r.

За намирането на горната дивергенция използваме формулата от векторното смятане

$$div\,(u.\vec{U})=u\,div\vec{U}+\vec{U}\cdot grad\,u\text{, следователно}$$

$$div^{/}(\vec{a}\cdot\vec{r}^{/})\,\vec{j}(\vec{r}^{/})=(\vec{a}\cdot\vec{r}^{/})\;div^{/}\vec{j}(\vec{r}^{/})+\vec{j}(\vec{r}^{/})\cdot grad^{/}(\vec{a}\cdot\vec{r}^{/})\,.$$

Тук следва да отчетем 2 неща:

1. съгласно условието за стационарност на токовете $div^{/}\vec{j}(\vec{r}^{/})\equiv 0$, и
2. $grad^{/}(\vec{a}\cdot\vec{r}^{/})=\vec{a}$, следователно

$$\Rightarrow div^{/}\left[(\vec{a}\cdot\vec{r}^{/})\,\vec{j}(\vec{r}^{/})\right]=(\vec{a}\cdot\vec{r}^{/}).0+\vec{j}(\vec{r}^{/})\cdot\vec{a}=\vec{a}\cdot\vec{j}(\vec{r}^{/})\,.$$

Нека така полученото равенство

$$(5)\qquad div^{/}\left[(\vec{a}\cdot\vec{r}^{/})\,\vec{j}(\vec{r}^{/})\right]=\vec{a}\cdot\vec{j}(\vec{r}^{/})$$

интегрираме върху областта V :

$$(5^{/})\qquad \int_V div^{/}\left[(\vec{a}\cdot\vec{r}^{/})\,\vec{j}(\vec{r}^{/})\right]dV^{/}=\int_V \vec{a}\cdot\vec{j}(\vec{r}^{/})\,dV^{/}\,.$$

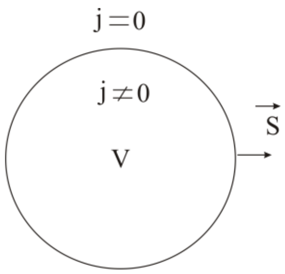
Обемният интеграл в лявата страна на горното равенство представяме чрез повърхнинен интеграл с помощта на теоремата на Остроградски-Гаус:

$$\int_V div^{/}\left[(\vec{a}\cdot\vec{r}^{/})\,\vec{j}(\vec{r}^{/})\right]dV^{/}=\oint_S (\vec{a}\cdot\vec{r}^{/})\,\vec{j}(\vec{r}^{/})\cdot d\vec{S}\,,$$

като по този начин $(5^{/})$ добива вида

$$\oint_S (\vec{a}\cdot\vec{r}^{/})\,\vec{j}(\vec{r}^{/})\cdot d\vec{S}=\int_V \vec{a}\cdot\vec{j}(\vec{r}^{/})\,dV^{/}\text{, или още }\boxed{\oint_S (\vec{a}\cdot\vec{r}^{/})\,\vec{j}(\vec{r}^{/})\cdot d\vec{S}=\vec{a}\cdot\int_V \vec{j}(\vec{r}^{/})\,dV^{/}}.$$

Скаларното произведение в повърхнинния интеграл представяме във вида $\vec{j}(\vec{r}^{/})\cdot d\vec{S}=\vec{j}(\vec{r}^{/})\cdot\vec{n}\left|d\vec{S}\right|=j_n(r^{/})\left|d\vec{S}\right|$, където $j_n(r^{/})$ е проекцията на $\vec{j}(\vec{r}^{/})$ върху $\vec{n}$.



Обаче съгласно постановката на задачата, която решаваме, липсват токове, които да пресичат ограничената област V (*и по този начин да я напускат*), следователно $\boxed{j_n(r^{/})\equiv 0}$ (*виж чертежа*).

От казаното става ясно, че

$$\oint_S (\vec{a}\cdot\vec{r}^{/})\,\vec{j}(\vec{r}^{/})\cdot d\vec{S}=\oint_S (\vec{a}\cdot\vec{r}^{/})\,j_n(r^{/})\left|d\vec{S}\right|\equiv 0\,,$$

следователно и $\vec{a}\cdot\int_V \vec{j}(\vec{r}^{/})\,dV^{/}=0$.

Но тъй като векторът $\vec{a}$ е константен, но произволен вектор (т.е. $\vec{a}\neq 0$), то равенството $\vec{a}\cdot\int_V \vec{j}(\vec{r}^{/})\,dV^{/}=0$ е възможно само тогава, когато

$$(6)\qquad \int_V \vec{j}(\vec{r}^{/})\,dV^{/}=0\,.$$

Ако първият от интегралите в (4) представим във вида

$\int\limits_V \frac{\vec{j}\,(r^{/})}{r}\, dV^{/} = \frac{1}{r}\int\limits_V \vec{j}\,(r^{/})\, dV^{/}$ (*изнасяме* r, *защото по него не се интегрира*), и отчетем (6), получаваме, че действително $\int\limits_V \frac{\vec{j}\,(r^{/})}{r}\, dV^{/} = 0$, с което доказателството, че първият интеграл в (4) е равен на нула, е завършено.

С „отпадането” на първия интеграл това равенство (4) добива вида

$$\vec{A}(r) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int\limits_V \frac{\vec{j}\,(r^{/})(\vec{r}\cdot\vec{r}^{\,/})}{r^3}\, dV^{/} + ... \approx \frac{\mu_0}{4\pi}\int\limits_V \frac{\vec{j}\,(r^{/})(\vec{r}\cdot\vec{r}^{\,/})}{r^3}\, dV^{/},$$ или още

$$(4^{/}) \quad \vec{A}(r) = \frac{\mu_0}{4\pi r^3}\int\limits_V \vec{j}\,(r^{/})(\vec{r}\cdot\vec{r}^{\,/})\, dV^{/},$$

което означава, че на практика мултиполното разложение на магнитния векторен потенциал $\vec{A}(r)$ започва от втория член в (4). Ще отбележим, че изнасянето в знаменател на (r^3) извън интеграла ($4^{/}$) е възможно, тъй като интегрирането се извършва по $r^{/}$, а не по r.

Нека преобразуваме този втори член, прилагайки векторното равенство

$$(\vec{a}\times\vec{b})\times\vec{c} = (\vec{a}\cdot\vec{c})\vec{b} - (\vec{b}\cdot\vec{c})\vec{a}$$

спрямо съдържащия се в ($4^{/}$) израз $\vec{j}\,(r^{/})(\vec{r}\cdot\vec{r}^{\,/})$, приемайки $\vec{a}\equiv\vec{r}^{\,/}$, $\vec{b}\equiv\vec{j}\,(r^{/})$ и $\vec{c}\equiv\vec{r}$, което ще ни даде

$$[\vec{r}^{\,/}\times\vec{j}\,(r^{/})]\times\vec{r} = (\vec{r}^{\,/}\cdot\vec{r})\,\vec{j}\,(r^{/}) - [\vec{j}\,(r^{/})\cdot\vec{r}]\,\vec{r}^{\,/},$$ откъдето

$$(\vec{r}^{\,/}\cdot\vec{r})\,\vec{j}\,(r^{/}) = [\vec{r}^{\,/}\times\vec{j}\,(r^{/})]\times\vec{r} + [\vec{j}\,(r^{/})\cdot\vec{r}]\,\vec{r}^{\,/}.$$

Заместваме с така намереното представяне на $(\vec{r}^{\,/}\cdot\vec{r})\,\vec{j}\,(r^{/})$ в ($4^{/}$) и получаваме

$$(4^{//}) \quad \vec{A}(r) = \frac{\mu_0}{4\pi r^3}\int\limits_V \vec{j}\,(r^{/})(\vec{r}\cdot\vec{r}^{\,/})\, dV^{/} = \frac{\mu_0}{4\pi r^3}\left[\int\limits_V [\vec{r}^{\,/}\times\vec{j}\,(r^{/})]\times\vec{r}\, dV^{/} + \int\limits_V [\vec{j}\,(r^{/})\cdot\vec{r}]\,\vec{r}^{\,/}\, dV^{/}\right]$$

С помощта на (5) се доказва, че вторият интеграл вдясно $\int\limits_V [\vec{j}\,(r^{/})\cdot\vec{r}]\,\vec{r}^{\,/}\, dV^{/}$ е равен на взетия със знак „минус” интеграл отляво $\int\limits_V \vec{j}\,(r^{/})(\vec{r}\cdot\vec{r}^{\,/})\, dV^{/}$, в резултат на което от горният израз за $\vec{A}(r)$ получаваме следното равенство

$$\int\limits_V \vec{j}\,(r^{/})(\vec{r}\cdot\vec{r}^{\,/})\, dV^{/} = \int\limits_V [\vec{r}^{\,/}\times\vec{j}\,(r^{/})]\times\vec{r}\, dV^{/} - \int\limits_V \vec{j}\,(r^{/})(\vec{r}\cdot\vec{r}^{\,/})\, dV^{/},$$

от което следва, че

$$2\cdot\int\limits_V \vec{j}\,(r^{/})(\vec{r}\cdot\vec{r}^{\,/})\, dV^{/} = \int\limits_V [\vec{r}^{\,/}\times\vec{j}\,(r^{/})]\times\vec{r}\, dV^{/},$$ т.е.

$$\boxed{\int\limits_V \vec{j}\,(r^{/})(\vec{r}\cdot\vec{r}^{\,/})\, dV^{/} = \frac{1}{2}\int\limits_V [\vec{r}^{\,/}\times\vec{j}\,(r^{/})]\times\vec{r}\, dV^{/}}.$$

С така намереното представяне за интеграла $\int\limits_V \vec{j}\,(r^{/})(\vec{r}\cdot\vec{r}^{\,/})\, dV^{/}$ заместваме в ($4^{//}$), и за $\vec{A}(r)$ получаваме

$$\vec{A}(r) \equiv \frac{\mu_0}{4\pi r^3}\int\limits_V \vec{j}\,(r^{/})(\vec{r}\cdot\vec{r}^{\,/})\, dV^{/} = \frac{\mu_0}{4\pi r^3}\frac{1}{2}\int\limits_V [\vec{r}^{\,/}\times\vec{j}\,(r^{/})]\times\vec{r}\, dV^{/} = \frac{\mu_0}{4\pi r^3}\left[\frac{1}{2}\int\limits_V [\vec{r}^{\,/}\times\vec{j}\,(r^{/})]\, dV^{/}\right]\times\vec{r}$$

т.е

$$\vec{A}(r) = \frac{\mu_0}{4\pi r^2}\left[\frac{1}{2}\int\limits_V [\vec{r}^{\,/}\times\vec{j}\,(r^{/})] dV^{/}\right]\times\left(\frac{\vec{r}}{r}\right) = \frac{\mu_0}{4\pi r^2}\left[\frac{1}{2}\int\limits_V [\vec{r}^{\,/}\times\vec{j}\,(r^{/})] dV^{/}\right]\times\vec{r}_0.$$

Ако по аналогия с електричния диполен момент въведем **магнитен диполен момент** $\vec{m}$, дефиниран със съотношението

(7) $$\vec{m} = \frac{1}{2}\int_V [\vec{r}^{\,/} \times \vec{j}(r^/)]dV^/ ,$$ /аналог на $\vec{p} = \int_V \rho(r^/)\cdot \vec{r}^{\,/}\, dV^/$ /

то окончателно за мултиполното разложение на магнитния векторен потенциал получаваме представянето

(8) $$\vec{A}(r) = \frac{\mu_0}{4\pi r^2}\vec{m}\times\vec{r}_0 \equiv \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{\vec{m}\times\vec{r}_0}{r^2}$$ /аналог на $\varphi(r) = \dfrac{\vec{p}\cdot\vec{r}_0}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$ /.

Формула (8) изразява магнитния векторен потенциал на голямо разстояние от ограничена система от стационарни токове. Формула (8) се нарича още **формула за полето на магнитен дипол**.

Както се вижда от (7) **магнитният диполен** момент **зависи от разпределението на стационарните токове** $\vec{j}(r^/)$ в пространствената област V.

Нека определим и индукцията $\vec{B}$ на магнитното поле на голямо разстояние от ограничена система от стационарни токове. За целта прилагаме съотношението

$$\vec{B} = rot\,\vec{A},$$

което, приложено спрямо (8), дава

(*) $$\vec{B} = rot\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{\vec{m}\times\vec{r}_0}{r^2} = \frac{\mu_0}{4\pi}rot\frac{\vec{m}\times\vec{r}}{r^3} = \frac{\mu_0}{4\pi}rot\left[\frac{1}{r^3}(\vec{m}\times\vec{r})\right].$$

За получената ротация от произведението „*скалар х вектор*” прилагаме формулата от векторния анализ

$$\boxed{rot(u\vec{V}) = u\,rot\vec{V} - \vec{V}\times grad\,u},$$

от която за $u = \dfrac{1}{r^3}$ и $\vec{V} = \vec{m}\times\vec{r}$ получаваме

$$rot\left[\frac{1}{r^3}(\vec{m}\times\vec{r})\right] = \frac{1}{r^3}rot(\vec{m}\times\vec{r}) - (\vec{m}\times\vec{r})\times grad\frac{1}{r^3} = \frac{1}{r^3}rot(\vec{m}\times\vec{r}) - (\vec{m}\times\vec{r})\times\left(\frac{-3}{r^4}\,\vec{r}_0\right).$$

За пресмятането пък на ротацията $rot(\vec{m}\times\vec{r})$ от векторното произведение на два вектора, използваме друга формула от векторния анализ, а именно

$$\boxed{rot(\vec{U}\times\vec{V}) = \vec{U}\,div\vec{V} - \vec{U}\cdot Grad\vec{V} + \vec{V}\,div\vec{U} - \vec{V}\cdot Grad\vec{U}}.$$

Прилагането на горната формула спрямо $rot(\vec{m}\times\vec{r})$ дава

$$rot(\vec{m}\times\vec{r}) = \vec{m}\,div\,\vec{r} - \vec{m}\cdot Grad\,\vec{r} + \vec{r}\,div\,\vec{m} - \vec{r}\cdot Grad\,\vec{m}.$$

Обаче:

- ☞ $div\,\vec{r} = 3$;
- ☞ $Grad\,\vec{r} = \delta$ (*единичен тензор*);
- ☞ $Grad\,\vec{m} = 0$ (*градиент от константен вектор*),

следователно $rot(\vec{m}\times\vec{r}) = 3\vec{m} - \vec{m}\cdot\delta \equiv 3\vec{m} - \vec{m} = 2\vec{m}$, откъдето за $rot\left[\dfrac{1}{r^3}(\vec{m}\times\vec{r})\right]$ получаваме

(**) $$rot\left[\frac{1}{r^3}(\vec{m}\times\vec{r})\right] = \frac{1}{r^3}2\vec{m} - (\vec{m}\times\vec{r})\times\left(\frac{-3}{r^4}\,\vec{r}_0\right) = \frac{2\vec{m}}{r^3} + \frac{3}{r^3}(\vec{m}\times\vec{r}_0)\times\vec{r}_0 .$$

Развиваме двойното векторно произведение $(\vec{m}\times\vec{r}_0)\times\vec{r}_0$ по известната вече формула $\boxed{(\vec{a}\times\vec{b})\times\vec{c} = (\vec{a}\cdot\vec{c})\vec{b} - (\vec{b}\cdot\vec{c})\vec{a}}$, и получаваме

$(\vec{m}\times\vec{r}_0)\times\vec{r}_0 = (\vec{m}\cdot\vec{r}_0)\vec{r}_0 - (\vec{r}_0\cdot\vec{r}_0)\vec{m} = (\vec{m}\cdot\vec{r}_0)\vec{r}_0 - \vec{m}$. Заместваме $(\vec{m}\times\vec{r}_0)\times\vec{r}_0$ в (**) и получаваме

$$rot\left[\frac{1}{r^3}(\vec{m}\times\vec{r})\right] = \frac{2\vec{m}}{r^3} + \frac{3}{r^3}(\vec{m}\times\vec{r}_0)\times\vec{r}_0 = \frac{2\vec{m}}{r^3} + \frac{3}{r^3}[(\vec{m}\cdot\vec{r}_0)\vec{r}_0 - \vec{m}] = \frac{2\vec{m}}{r^3} + \frac{3}{r^3}(\vec{m}\cdot\vec{r}_0)\vec{r}_0 - \frac{3\vec{m}}{r^3}\text{, т.е.}$$

$$rot\left[\frac{1}{r^3}(\vec{m}\times\vec{r})\right]=\frac{3}{r^3}(\vec{m}\cdot\vec{r}_0)\vec{r}_0-\frac{\vec{m}}{r^3}=\frac{3(\vec{m}\cdot\vec{r}_0)\vec{r}_0-\vec{m}}{r^3}$$

Остава да заместим така намерената ротация в (*), и да получим следния израз за индукцията на полето на магнитен дипол

(9) $$\vec{B}=\frac{\mu_0}{4\pi}rot\left[\frac{1}{r^3}(\vec{m}\times\vec{r})\right]=\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{3(\vec{m}\cdot\vec{r}_0)\vec{r}_0-\vec{m}}{r^3}.$$

Ако сравним (9) с формула (11) от предната тема 14, даваща интензитета на електричното поле на електричен дипол

$$\vec{E}(r)=\frac{3(\vec{p}\cdot\vec{r}_0)\vec{r}_0-\vec{p}}{4\pi\varepsilon_0 r^3},$$

ще установим голяма прилика. Именно тази прилика е дала основание величината $\vec{m}$, фигурираща в (9), да бъде наречена *магнитен диполен момент* (*по аналогия с* $\vec{p}$ - *електричен диполен момент*).