Лекции
по **Електродинамика**

Тема 1. Принцип на относителността на Айнщайн

❶ В класическата физика се работи с **инерциални отправни системи** (ИОС). В тази връзка е необходимо да се избере подходяща **отправна система**, а именно ИОС трябва да се свърже с отправно тяло с неподвижна(и) точка(и).

Инерциална отправна система е такава отправна система, относно която една материална точка се движи с постоянна скорост $\vec{v} = const$ (*която, в частност, може и да бъде равна на **нула***), т.е. точката се движи **праволинейно и равномерно**, **или** е в **състояние на покой**.

Под **свободна материална точка** се разбира точка, която **не си взаимодейства** с други физични обекти (*тела или материални точки*).

Съществуването на инерциални ОС **се постулира**.

❷ **Свойства на пространството и времето**:

Пространството е хомогенно и изотропно, а **времето** е хомогенно (*замяната на* t *с* $-t$ *в функцията на Лагранж не води до промяна на уравненията на движение*). Изобщо от гледна точка на законите на механиката, ако е възможно едно движение, то винаги е възможно и обратното движение.

Времето е „**абсолютно**”, т.е. то тече по един и същ начин спрямо всеки наблюдател.

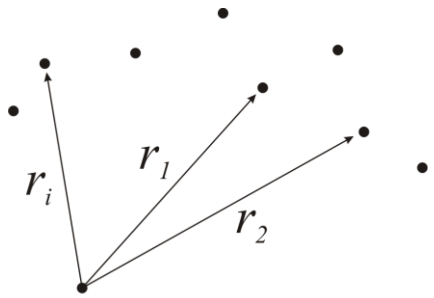
Пространството е: **относително**, **безкрайно**, **тримерно** (*триизмерно*), като в него е в сила Евклидовата геометрия.

❸ **Класически принцип на относителността на Галилей**:

Ако имаме една **инерциална отправна система**, то **всяка** друга отправна система, която се движи праволинейно и равномерно (**или е в покой**) спрямо дадената ИОС, е **също инерциална**, или казано с други думи **всички инерциални отправни системи са равноправни** според законите на механиката.

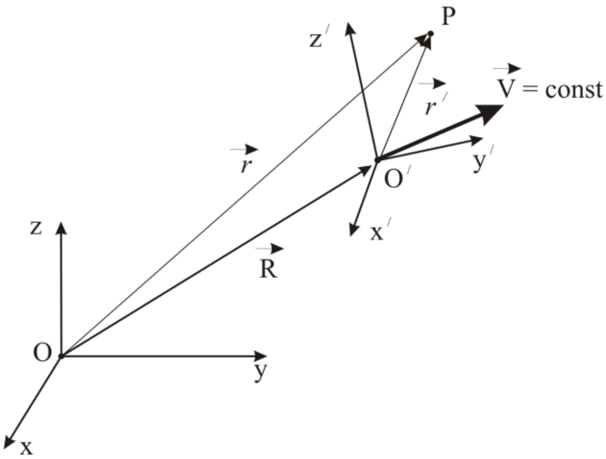
При това всички **механични явления** протичат по един и същ начин спрямо **коя да е** инерциална ОС (**независимо от нейния избор**).

❹ **Възможност за съществуване на безкрайно голяма скорост, с която се предават взаимодействията между обекти. Мигновенност на взаимодействието.**



Потенциалната енергия $U(\vec{r}_1, \vec{r}_2, ..., \vec{r}_n, t)$ на една система от материални обекти (точки) зависи от взаимното разположение на тези обекти. Следователно ако настъпи изменение в положението на кой да е обект, това се чувства във всички останали обекти, и влияе върху стойността на потенциалната енергия $U(\vec{r}_1, \vec{r}_2, ..., \vec{r}_n, t)$.

Според класическата механика координатите и времето на една материална точка относно различни наблюдатели (*наблюдатели в различни ИОС*) са свързани помежду си посредством равенства (*съотношения*), наречени **трансформации на Галилей.**



Тези равенства имат вида

$$t = t^{/}, \qquad \vec{r} = \vec{r}^{\,/} + \vec{R},$$

където

$$\vec{R} = \vec{V}.t,$$

следователно

$$\boxed{\begin{array}{|l} \vec{r} = \vec{r}^{\,/} + \vec{V}.t \\ t = t^{/} \end{array}} \qquad (1)$$

Съотношенията (1) изразяват математически трансформациите на Галилей.

Чрез последователно диференциране на (1) могат да бъдат получени:

а) Закон за събиране на скоростите

$\dot{\vec{r}} = \vec{v}$ (скорост на движение на т. Р спрямо ИОС (К)),

$\dot{\vec{r}}^{\,/} = \vec{V}^{/}$ (скорост на движение на т. Р спрямо ИОС (К $^{/}$)),

$(\vec{V}.t)^{/} \equiv \vec{V}$,

Следователно $\dot{\vec{r}} = \dot{\vec{r}}^{\,/} + \vec{V}$, т.е.

(2) $\boxed{\vec{v} = \vec{V}^{/} + \vec{V}}$ - закон за събиране на скоростите.

б) Закон за ускоренията

След повторно диференциране, отчитайки, че скоростта, с която ИОС ($K^{/}$) се движи спрямо ИОС (K), е $\vec{V} = const$, т.е. $\dot{\vec{V}} = 0$, за ускоренията получаваме

$\dot{\vec{v}} = \dot{\vec{V}}^{/} + \dot{\vec{V}}$, т.е.

(3) $\boxed{\vec{a} = \vec{a}^{\,/}}$.

Равенството (3) изразява математически факта, че **ускорението е инвариантна величина**, т.е. величина, независеща от избора на отправната система.

А от инвариантността на ускорението следва (*по законите на Нютоновата механика*) **инвариантността на уравненията на движение**, т.е. II закон на Нютон

$$\vec{F} = m.\vec{a} = m.\vec{a}^{\,/} = \vec{F}^{/}$$

запазва вида си за всяка инерциална отправна система.

В горното равенство е взет под внимание факта, че масата (в нерелативистката механика) е също **инвариантна величина**, т.е. $\boxed{m = m^{/}}$.

Решението на уравнението на движение

$$m.\ddot{\vec{r}} = F$$

зависи от **броя на степените на свобода** на системата (частицата), която е обект на разглеждане. За една частица, движеща се в тримерното Евклидово пространство, този брой е $s = 3$, което означава, че законът за движението

$$\vec{r} = \vec{r}(t),$$

изразяващ законът, по който се изменят с времето координатите на частицата, ще се изрази чрез 6 интеграционни константи, т.е.

$$\vec{r} = \vec{r}(C_1, C_2, ..., C_6, t).$$

<u>*Пояснение*</u>: Интеграционните константи се определят от началните условия, т.е. от стойностите в начален момент $t = 0$, които приемат (*имат*) **координатите** и **скоростите** на частицата, т.е.

$$\left| \begin{array}{l} x_0 = x(0) \\ y_0 = y(0) \\ z_0 = z(0) \end{array} \right. \text{(т.е. 3 константи)} + \left| \begin{array}{l} \dot{x}_0 = V_x(0) \\ \dot{y}_0 = V_y(0) \\ \dot{z}_0 = V_z(0) \end{array} \right. \text{(т.е. 3 константи)} = \underline{\text{6 константи общо}}.$$

Айнщайн обобщава понятието ИОС и разширява пределите на използването на това понятие и за физични явления (изобщо). Така се стига до едно обобщение на свойствата на пространството и времето, изразено във следното

Обобщение на принципа на Галилей за всички физични явления

Всички физични явления протичат по един и същ начин спрямо всяка инерциална отправна система.

Горното твърдение се нарича още **Първи постулат на Айнщайн**.

Айнщайн отхвърля тезата за мигновения характер на взаимодействието, и издига хипотезата за съществуването на крайна (*пределна*) скорост $c = 3.10^8\ m/s$, с която то (взаимодействието) се предава (*осъществява*). Така се стига до следния

Втори постулат на Айнщайн:

Скоростта на светлината във вакуум е една и съща спрямо всяка инерциална ОС. Тя **не зависи** от движението на източника или приемника на светлината.

Съвкупността от постулатите **I** и **II** се нарича **Принцип на относителността на Айнщайн**, който е основополагащ принцип в **Специалната теория на относителността (СТО)**.

А механиката, основана на тази теория, се нарича **релативистична механика**.

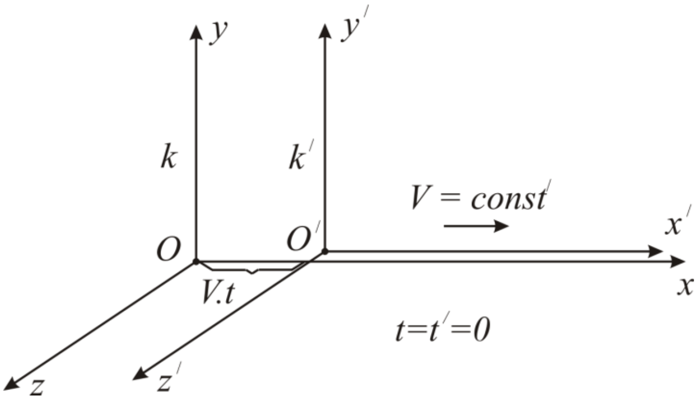
Класическата механика описва движението на макрообекти, движещи се с класически скорости, т.е. скорости $V << c$, докато релативистичната механика описва тела, движещи се както с класическа, така и с релативистична скорост, т.е. скорост $V \to c$. Ето защо релативистичната механика „съдържа” в себе си класическата механика, законите на която могат да се получат от законите на релативистичната механика чрез (*формален*) граничен преход $\dfrac{V}{c} \to 0$.

Айнщайн (*теорията на Айнщайн*) не приема трансформациите на Галилей. Действително, ако допуснем, че $V^{/} = c$, то от закона за събиране на скорости ще имаме

$$v = c + V,$$

откъдето следва, че $\boxed{v > c}$, а това очевидно е **в противоречие** с II постулат, което е **недопустимо**.

Тема 2. Трансформации на Лоренц. Следствия от тях



Ако някакво елементарно събитие е станало в дадена пространствена точка (x, y, z) в даден момент t, то координатите на събитието са (x, y, z, t).

Нека разгледаме едно елементарно събитие във всяка от отправните системи K и $K^{/}$.

За K: (x, y, z, t),

За $K^{/}$: $(x^{/}, y^{/}, z^{/}, t^{/})$,

Връзката между координатите на събитието за (в) едната и другата система очевидно може да бъде представена посредством следната система от равенства

(1) $$\left| \begin{aligned} x' &= a_1 x + b_1 y + c_1 z + d_1 t \\ y' &= a_2 x + b_2 y + c_2 z + d_2 t \\ z' &= a_3 x + b_3 y + c_3 z + d_3 t \\ t' &= a_4 x + b_4 y + c_4 z + d_4 t \end{aligned} \right.$$

Системата (1) съдържа линейни хомогенни равенства, в които коефициентите a_i, b_i, c_i и d_i не зависят от координатите и времето, както и от посоката на скоростта на движение на K' спрямо K. Този извод следва от хомогенността и изотропността на пространството и хомогенността на времето. Остава единствено (разбира се) зависимостта от големината на скоростта $V = \left|\vec{V}\right|$.

Доказва се, че

$$a_2 = a_3 = 0, \quad b_1 = b_3 = b_4 = 0, \quad c_1 = c_2 = c_4 = 0, \quad d_2 = d_3 = 0,$$

$$b_2 = c_3 = 1, \quad a_1 = d_4 = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}, \quad d_1 = \frac{V}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}, \quad a_4 = \frac{\left(-\frac{V}{c^2}\right)}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}.$$

След заместването на тези коефициенти в уравненията (1), последните добиват вида

(2) $$\left| \begin{aligned} x' &= \frac{x - V.t}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} = \gamma.(x - V.t) \\ y' &= y \\ z' &= z \\ t' &= \frac{t - \frac{V}{c^2}x}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} = \gamma.\left(t - \frac{V}{c^2}x\right) \end{aligned} \right.$$, или (3) $$\left| \begin{aligned} x &= \frac{x' + V.t'}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} = \gamma.(x' + V.t') \\ y &= y' \\ z &= z' \\ t &= \frac{t' + \frac{V}{c^2}x'}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} = \gamma.\left(t' + \frac{V}{c^2}x'\right) \end{aligned} \right.$$.

Формули (2) и/или (3) се наричат **специални трансформации на Лоренц**.

Те са аналог на формулите на Галилей в класическата (нерелативистката) механика. В класическата механика скоростта на движение на телата е $V << c$, следователно отношението в тези скорости ще дава много малка величина

(4) $\beta = \frac{V}{c} << 1$, и $\frac{V}{c^2} \approx 0$, което означава, че $\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}} \approx 1$.

Последните неравенства и оценки изразяват в математически вид условията на т.нар. класическо приближение (движение с класическа скорост).

Ако заместим (4) в (3), ще получим трансформационните съотношение

$$\left| \begin{aligned} x &= x' + V.t' \\ y &= y' \\ z &= z' \\ t &= t' \end{aligned} \right. ,$$

които съвпадат с формулите на Галилей. Важно е да се отбележи, че в класическата физика времето не търпи промяна (трансформация).

Ако разгледаме трансформационния закон за случая $\vec{V} = (V,0,0)$, то записан чрез радиус-векторите $r = (x, y, z)$ и $r' = (x', y', z')$ за двете ИОС (K) и (K'), той ще има вида

$$\left| \begin{array}{l} \vec{r} = \vec{r}^{\,/} + \vec{V}.t \\ t = t^{/} \end{array} \right. ,$$

което представлява друг вариант на запис на (4).

Следствия от трансформациите на Лоренц

❶ Скоростта на сигнал във вакуум е гранична скорост за движение на материални обекти и сигнали, като под сигнал се има предвид материален носител на информация (напр. светлинен лъч).

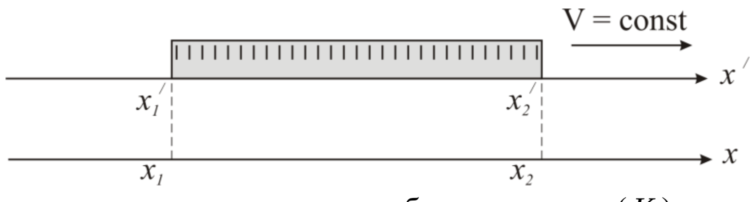
Това е пряко следствие от трансформациите на Лоренц. Действително нека приемем, че имаме обект, движещ се със скорост $V^{/} > c$ спрямо ИОС ($K^{/}$) и нека определим координатите на този обект в ИОС (K) с помощта на формули (2). Оказва се, обаче, че $\dfrac{V}{c} > 1$ и следователно квадратният корен $\sqrt{1-\dfrac{V^2}{c^2}}$ ще бъде **комплексно число**. Щом координатите на това събитие не се изразяват чрез реални числа, то това събитие не е елемент на обективната реалност, т.е. **то не може да съществува**. Следователно трябва да отхвърлим направеното допускане.

Нека сега допуснем, че е възможно движение със скорост $V = c$. В този случай $\dfrac{V}{c} = 1$, а квадратният корен $\sqrt{1-\dfrac{V^2}{c^2}} = 0$. И тъй като този квадратен корен стои в знаменател, то замествайки в (2), стигаме до друго противоречие – координатите на обект, движещ се със скорост $V = c$, клонят към ∞, което означава, че и това събитие не е елемент на обективната реалност, т.е. то също не може да съществува. Следователно трябва да отхвърлим и това направено допускане.

Все пак съществуват частици, наречени **тахиони**, които са теоретично доказани, но експериментално не са получени, за които се предполага, че могат да се движат със скорости $V > c$, и с които се свързва идеята те да дават информация от бъдещето.

❷ Друго следствие от трансформациите на Лоренц е **относителността на пространствените интервали** (*скъсяване на дължините*). Разгледано в контекста на **принципа за причинност** (т.е. че **<u>причината винаги предшества следствието</u>**), то води до много интересни резултати.

Както е известно в класическата механика дължината на един обект е неизменна величина.



Нека допуснем, че имаме линия, и нека наблюдател в ИОС ($K^{/}$) е свързан с нея, а спрямо наблюдател в ИОС (K) тази линия се движи. За да измери дължината на тази линия, наблюдателят от (K) определя (измерва) едновременно, т.е. в момент $t_1 = t_2$, координатите x_1 и x_2 на линията, което му позволява да определи дължината й в (K) $\Delta x = x_2 - x_1$.

За да определим в същото време дължината на линията в системата $K^{/}$), използваме формулите (2), даващи връзката между x_1 и $x_1^{/}$; и x_2 и $x_2^{/}$. Така от (2) ще имаме

$$x_1^{/} = \frac{x_1 - V.t_1}{\sqrt{1-\dfrac{V^2}{c^2}}} \text{, и}$$

$$x_2^{/} = \frac{x_2 - V.t_2}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}.$$

Изваждаме почленно тези две равенства, с което определяме дължината на линията в ($K^{/}$) $\Delta x^{/} = x_2^{/} - x_1^{/}$. Получава се

$$\Delta x^{/} \equiv x_2^{/} - x_1^{/} = \frac{x_2 - V.t_2}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}} - \frac{x_1 - V.t_1}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}} = \frac{x_2 - x_1}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}} - \frac{V.(t_2 - t_1)}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}} \equiv \frac{x_2 - x_1}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}} = \frac{\Delta x}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}.$$

Така получихме връзката

$$\Delta x^{/} = \frac{\Delta x}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}.$$

Нека въведем означенията:

$\Delta x^{/} = l_0$ - **собствена дължина** на обекта (*дължина в* $K^{/}$*, т.е. спрямо наблюдател, движещ се заедно с линийката, но намиращ се в покой спрямо нея*); и

$\Delta x = l$ - **координатна дължина** на обекта (*дължина в* K*, т.е. спрямо неподвижен наблюдател, относно който, обаче, линийката се движи*).

В тези обозначения горното равенство добива вида

$$\boxed{l = l_0.\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}, \text{ т.е. } l = \frac{l_0}{\gamma}. \tag{5}$$

Това е формула, даваща връзката между дължините на един обект, определяни от различни наблюдатели.

Понеже винаги $V < c$, т.е. $\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}} < 1$, то очевидно $\boxed{l < l_0}$. Последното неравенство показва, че **координатната дължина** l **е винаги по-малка от собствената дължина** l_0, и изразява факта, че **дължината на движещи се обекти се скъсява** (*намалява*), което е и доказателството на това следствие от трансформациите на Лоренц.

При земни условия имаме приближението на класическата механика $V << c$, т.е. $\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}} \approx 1$, и следователно $\boxed{l \approx l_0}$.

Колкото обаче, скоростта на едно тяло расте и $\boxed{V \to c}$, т.е. $\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}} \to 0$, толкова разликата между l и l_0 става **<u>по-съществена</u>.**

❸ <u>Следствие</u>: Относителност на времеинните интервали

Нека отново разгледаме две събития, които за наблюдател, намиращ се в подвижната координатна система $K^{/}$, се случват в една и съща точка $x_1^{/} = x_2^{/}$, т.е. $\Delta x^{/} = 0$, но в **<u>различни моменти време</u>** $t_1^{/} \neq t_2^{/}$, т.е. $\Delta t^{/} \neq 0$. Нека определим какъв ще бъде интервалът време между същите тези две събития за наблюдател, намиращ се в неподвижната ИОК K. За целта използваме съотношенията (3)

$$t_1 = \frac{t_1^{/} + \frac{V}{c^2}x_1^{/}}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}, \qquad \text{а} \qquad t_2 = \frac{t_2^{/} + \frac{V}{c^2}x_2^{/}}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}},$$

следователно (*след почленно изваждане*) получаваме

$$t_2 - t_1 \equiv \Delta t = \frac{t_2{}' - t_1{}'}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}} + \frac{V}{c^2}\frac{(x_2{}' - x_1{}')}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}} = \frac{t_2{}' - t_1{}'}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}} \equiv \frac{\Delta t'}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}, \text{ т.е.}$$

$$\Delta t = \frac{\Delta t'}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}.$$

Ако вземем под внимание, че

- $\Delta t' \approx \Delta\tau$ - собствено време в K';
- Δt - координатно време, определено от наблюдател, спрямо който обектът се движи, то получаваме следното съотношение

(6) $$\Delta t = \frac{\Delta\tau}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}, \text{ т.е. } \Delta t = \gamma.\Delta\tau$$

и понеже при $V < c$ очевидно $\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}} < 1$, т.е. $\frac{1}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}} > 1$, можем да заключим, че $\Delta t > \Delta\tau$, т.е. **координатното време** (*времето спрямо неподвижен наблюдател, относно който обектът се движи*) **е по-голямо от собственото време** (*времето спрямо наблюдател, който се движи заедно с обекта, но относно който обектът е в покой*).

❹ Като пряк резултат от ❸ следва **относителността на едновременността**, т.е. ще покажем, че две събития, които са едновременни относно дадена ИОС, са нееднoвременни относно всяка друга ИОС, движеща се със скорост $V \neq 0$ спрямо дадената ИОС.

За целта разглеждаме две събития, които за наблюдател от системата K' са едновременни ($t_1' = t_2'$, т.е. $\Delta t' = 0$), без да са пространствено съвпадащи, ($x_1' \neq x_2'$, т.е. $\Delta x' \neq 0$). Нека определим какъв е интервалът от време $\Delta t = t_2 - t_1$ между същите тези две събития относно наблюдател, намиращ се в ИОС K. За целта отново използваме формули (3), от които определяме

$$\Delta t \equiv t_2 - t_1 = \frac{t_2{}' + \frac{V}{c^2}x_2{}'}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}} - \frac{t_1{}' + \frac{V}{c^2}x_1{}'}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}} = \frac{t_2{}' - t_1{}'}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}} + \frac{V}{c^2}\frac{(x_2{}' - x_1{}')}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}} \equiv \frac{V}{c^2}\frac{(x_2{}' - x_1{}')}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}} = \frac{V}{c^2}\frac{\Delta x'}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}$$

Очевидно тъй като по условие $x_1' \neq x_2'$, то и $\Delta t \equiv t_2 - t_1 \neq 0$, т.е. $t_2 \neq t_1$.

Извод: събитията, които за наблюдател от системата K' са едновременни ($t_1' = t_2'$) са нееднoвременни за наблюдател от системата K с ($t_1 \neq t_2$), което означава, че едновременността е относително понятие.

❺ Релативистичен закон за събиране на скоростите

$\vec{r} = \vec{r}\,' + \vec{V}.t$, следователно

(**) $\boxed{\vec{v} = \vec{v}\,' + \vec{V}}$, където

$$\vec{v} = \left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}\right) \text{ и } \vec{v}\,' = \left(\frac{dx'}{dt}, \frac{dy'}{dt}, \frac{dz'}{dt}\right).$$

Нека диференцираме по времето формули (3), отчитайки, че $\vec{V}$ и c са константни скорости:

$$\left|\begin{array}{l} dx = \dfrac{dx' + V.dt'}{\sqrt{1-\dfrac{V^2}{c^2}}} \\ dy = dy' \\ dz = dz' \\ dt = \dfrac{dt' + \dfrac{V}{c^2}dx'}{\sqrt{1-\dfrac{V^2}{c^2}}} \end{array}\right.$$

Делим почленно dx, dy и dz на dt:

$$\Rightarrow v_x = \frac{dx}{dt} = \frac{dx' + V.dt'}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}} \Bigg/ \frac{dt' + \frac{V}{c^2}dx'}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}} = \frac{(dx' + V.dt')/dt'}{(dt' + \frac{V}{c^2}dx')/dt'} =$$

$$= \frac{(dx' + V.dt')/dt'}{(dt' + \frac{V}{c^2}dx')/dt'} = \frac{\frac{dx'}{dt'} + V}{1 + \frac{V}{c^2}.\frac{dx'}{dt'}} = \ldots \; \frac{dx'}{dt'} = v'_x \; \ldots = \frac{v'_x + V}{1 + \frac{V}{c^2}.v'_x}.$$

И така, $\boxed{v_x = \dfrac{v'_x + V}{1 + \dfrac{V}{c^2}.v'_x}}$.

Аналогично:

$$v_y = \frac{dy}{dt} = dy' \Bigg/ \frac{dt' + \frac{V}{c^2}dx'}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}} = \frac{dy'\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}{dt' + \frac{V}{c^2}dx'} = \frac{dy'\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}} \Big/ dt'}{dt' + \frac{V}{c^2}dx' \Big/ dt'} = \frac{v'_y.\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}{1 + \frac{V}{c^2}v'_x}, \text{ и}$$

$$v_z = \frac{dz}{dt} = dz' \Bigg/ \frac{dt' + \frac{V}{c^2}dx'}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}} = \frac{dz'\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}{dt' + \frac{V}{c^2}dx'} = \frac{dz'\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}} \Big/ dt'}{dt' + \frac{V}{c^2}dx' \Big/ dt'} = \frac{v'_z.\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}{1 + \frac{V}{c^2}v'_x}.$$

Обобщавайки получените резултати стигаме до т.нар. релативистичен закон за събиране на скоростите:

$$(7) \qquad \left|\begin{array}{l} v_x = \dfrac{v'_x + V}{1 + \dfrac{V}{c^2}.v'_x}, \\ v_y = \dfrac{v'_y.\sqrt{1-\dfrac{V^2}{c^2}}}{1 + \dfrac{V}{c^2}v'_x}, \\ v_z = \dfrac{v'_z.\sqrt{1-\dfrac{V^2}{c^2}}}{1 + \dfrac{V}{c^2}v'_x}. \end{array}\right.$$

Ще покажем, че от (7) в нерелативисткия случай $v << c$ следва законът за събиране на скорости (**). Действително при $v << c$ отношението $\frac{v}{c} << 1$, т.е. $\frac{v}{c} \approx 0$, следователно $\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}} \approx 1$, и тогава от (7) ще следва

$$v_x = \frac{v_x^{/} + V}{1 + \frac{V}{c^2}.v_x^{/}} \approx \frac{v_x^{/} + V}{1 + 0.v_x^{/}} = v_x^{/} + V\,, \qquad v_x = v_x^{/} + V\,,$$

$$v_y = \frac{v_y^{/}.\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}{1 + \frac{V}{c^2}v_x^{/}} \approx \frac{v_y^{/}.1}{1 + 0.v_x^{/}} = v_y^{/}\,, \qquad \text{или} \qquad v_y = v_y^{/}\,,$$

$$v_z = \frac{v_z^{/}.\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}{1 + \frac{V}{c^2}v_x^{/}} \approx \frac{v_z^{/}.1}{1 + 0.v_x^{/}} = v_z^{/}\,. \qquad v_z = v_z^{/}\,.$$

Тогава $\vec{v} = \vec{v}^{/} + \vec{V}$, където $\vec{V} = (V,0,0)$. Така полученото равенство изразява точно (**).

Тема 3. Геометричен смисъл на трансформациите на Лоренц

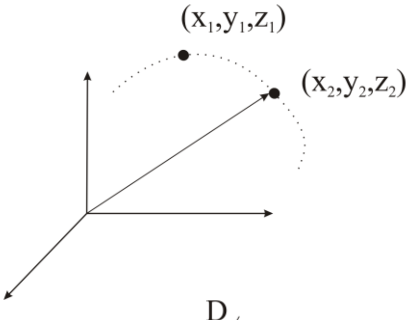
Трансформациите на Лоренц показват, че пространствените координати и времето се изменят съгласувано при преход от една ИОС към друга такава, което показва, че колкото и да са различни (разнородни), в релативисткната механика те, бидейки форма за съществуване и движение на материята, не са независими.

Понятие за пространство-време (*четирипространство*). Това пространство характеризира четиримерния свят на събитията и се въвежда от съображения за нагледност.

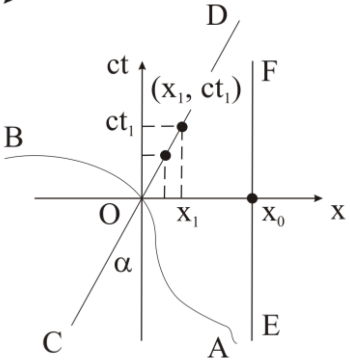
Пространство-времето е съвкупността от всички събития. То по абстрактен начин съединява пространството и времето. Всяка точка от това пространство-време е „геометричен” образ на едно събитие.

Следователно в това 4-пространство всяко събитие има за пространствени координати координатите на точката, в която става (*се случва*) събитието, а за временна координата има времето (момента), в което става това събитие, т.е. (x, y, z, t).

Общоприето за координатите в 4-пространството е представянето ($c.t, x, y, z$), като умножаването на t със c прави четирите координати с еднаква размерност. Пространство-времето може да се разглежда като съвкупност от всички елементарни събития, или още като съвкупност от всички наредени четворки реални числа ($c.t, x, y, z$).



В тримерното пространство траекторията на материална точка е съвкупност от точки, съответстващи на различните положения, което движещо се тяло заема в различни моменти от време t.



В четиримерното пространство-време аналог на траекторията е т.нар. **мирова линия**. Мировата линия е последователност от кинематични положения на някакъв обект, описвани с различни набори ($c.t, x, y, z$).

Ако (*за удобство*) се изобрази двумерно сечение на пространство-времето (*виж фигурата*), при което на две взаимноперпендикулярни оси се нанесат трите пространствени координати и времето (*на абцисната ос е нанесена само* *координатата* x), то:

- мировата линия на обект, **движещ се с променлива скорост** $\vec{v}(t)$ и минаващ през началото O на координатната система при $t=0$, ще се изобрази с кривата AOB;

- мировата линия на обект, **движещ се с постоянна скорост** $\vec{v}=const$ и минаващ през началото O на координатната система при $t=0$, ще се изобрази с правата CD, наклонена спрямо оста Oct под ъгъл α, като $tg\alpha = v/c = x/ct$;

- мировата линия на обект, **неподвижен в пространствена точка** x_0, ще се изобрази с правата EF, успоредна на оста Oct и минаваща през точката x_0.

Последният случай показва, че **мирова линия притежават както движещите се, така и неподвижните относно дадена ИОС обекти** (тела), което означава, че понятията „траектория” и „мирова линия” се различават съществено.

Геометричен смисъл на трансформациите на Лоренц

Нека разгледаме следните две събития (*за наблюдател в* ИОС ***К*** – неподвижна):

С1: **изпращане** на светлинен сигнал (*импулс*) от т. (x_1, y_1, z_1) в момент време t_1; и

С2: **приемане** на този светлинен сигнал в т. (x_2, y_2, z_2) в момент време t_2.

Координатите на тези две събития в четирипространството (пространство-време) са съответно (ct_1, x_1, y_1, z_1) и (ct_2, x_2, y_2, z_2).

А за наблюдател от системата ***К***$^{/}$ (*подвижна КС*) координатите на същите тези две събития са съответно $(ct^{/}{}_1, x^{/}{}_1, y^{/}{}_1, z^{/}{}_1)$ и $(ct^{/}{}_2, x^{/}{}_2, y^{/}{}_2, z^{/}{}_2)$.

За наблюдател в ИОС ***К*** величината

$c.(t_2 - t_1)$ има смисъл на път, изминат от лъчението от точката на изпращане до точката на получаване на светлинния сигнал.

Но този път може да бъде изразен и чрез пространствените координати:

(1) $$|\Delta r| = \sqrt{(x_2-x_1)^2 + (y_2-y_1)^2 + (z_2-z_1)^2}\ .$$

Понеже това са две различни представяния на едно и също нещо, можем да запишем

$$c.(t_2-t_1) = \sqrt{(x_2-x_1)^2 + (y_2-y_1)^2 + (z_2-z_1)^2}\ ,$$

откъдето след повдигане в квадрат получаваме

$$c^2.(t_2-t_1)^2 = (x_2-x_1)^2 + (y_2-y_1)^2 + (z_2-z_1)^2,$$ или още

(2) $$c^2.(t_2-t_1)^2 - (x_2-x_1)^2 - (y_2-y_1)^2 - (z_2-z_1)^2 = 0\,.$$

Нека означим лявата страна на (2) с $(\Delta S)^2$. Така получаваме

(3) $$(\Delta S)^2 = c^2.(t_2-t_1)^2 - (x_2-x_1)^2 - (y_2-y_1)^2 - (z_2-z_1)^2,$$ или след коренуване

(3$^{/}$) $$\Delta S = \sqrt{c^2.(t_2-t_1)^2 - (x_2-x_1)^2 - (y_2-y_1)^2 - (z_2-z_1)^2}\ .$$

Получените дотук равенства се отнасят за наблюдател в ИОС ***К***. А за наблюдател в ИОС ***К***$^{/}$ може да бъде получено следното аналогично на (3) равенство

$$(\Delta S^{/})^2 = c^2.(t^{/}{}_2 - t^{/}{}_1)^2 - (x^{/}{}_2 - x^{/}{}_1)^2 - (y^{/}{}_2 - y^{/}{}_1)^2 - (z^{/}{}_2 - z^{/}{}_1)^2,$$ или още

$$\Delta S^{/} = \sqrt{c^2.(t^{/}{}_2 - t^{/}{}_1)^2 - (x^{/}{}_2 - x^{/}{}_1)^2 - (y^{/}{}_2 - y^{/}{}_1)^2 - (z^{/}{}_2 - z^{/}{}_1)^2}$$

Ако изходим от последното равенство, в което „примованите” координати (*т.е. координатите в ИОС* ***К***$^{/}$) изразим от трансформациите на Лоренц

$$x^{/} = \frac{x - V.t}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}, \qquad y^{/} = y, \qquad z^{/} = z, \qquad t^{/} = \frac{t - \frac{V}{c^2}x}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}\ ,$$

то след несложни преобразования се доказва, че

$$(\Delta S^{/})^2 = c^2.(t^{/}{}_2 - t^{/}{}_1)^2 - (x^{/}{}_2 - x^{/}{}_1)^2 - (y^{/}{}_2 - y^{/}{}_1)^2 - (z^{/}{}_2 - z^{/}{}_1)^2 = ...$$

$$......... = c^2.(t_2 - t_1)^2 - (x_2 - x_1)^2 - (y_2 - y_1)^2 - (z_2 - z_1)^2 = (\Delta S)^2,$$

т.е.

(4) $\quad (\Delta S)^2 = (\Delta S^/)^2 = (\Delta S^{//})^2 = (\Delta S^{///})^2 = inv$.

Извод: Величината $(\Delta S)^2$ не се променя при промяна на координатната система, следователно $(\Delta S)^2$ е **инвариантна** относно трансформациите на Лоренц величина, имаща смисъл на <u>**пространствено-временен интервал**</u> („*разстояние*”) между две събития в 4-мерното пространство-време.

Тук може да се осъществи една полезна **аналогия**:

- величината $\Delta r^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2$ е разстоянието между две точки $\vec{r}_1 = (x_1, y_1, z_1)$ и $\vec{r}_2 = (x_2, y_2, z_2)$ в тримерното Евклидово пространство $\boldsymbol{R^3}$, като очевидно Δr е **инвариантна величина** в $\boldsymbol{R^3}$.
- величината $(\Delta S)^2 = c^2.(t_2 - t_1)^2 - (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2$ е също инвариантна, но в 4-мерното псевдоевклидово пространство-време $\boldsymbol{R^4}$.

Между двата инварианта съществуват **принципни** и **формални** (външни) различия. Например съществено различие е, че в евклидовата геометрия разстоянието между две точки $|\Delta r|$ е нула, когато тези точки съвпадат. В псевдоевклидовата (4-мерната) геометрия, обаче, пространствено-времинният интервал ΔS може да бъде нула дори за две съвършено различни точки от пространство-времето, стига само да бъде изпълнено условието $c^2.(t_2 - t_1)^2 = \Delta r^2$. Друго съществено различие е присъствието на члена, съдържащ времето в представянето за $(\Delta S)^2$, както и присъствието на знака „-„ пред „пространствената” част на израза за $(\Delta S)^2$.

Лесно се вижда, че $\boxed{(\Delta S)^2 = c^2.(t_2 - t_1)^2 - \Delta r^2}$.

На основата на тази аналогия величината ΔS може да бъде наречена още разстояние между две точки (събития) в 4-мерното пространство-време $\boldsymbol{R^4}$, но по-точното й наименование е все пак <u>**пространствено-временен интервал**</u>.

Интервалът $(\Delta S)^2$ може да бъде представен още в следните еквивалентни записи

($3^{//}$) $\quad (\Delta S)^2 = c^2.(\Delta t)^2 - (\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2$, или още

($3^{///}$) $\quad \boxed{(\Delta S)^2 = c^2.(\Delta t)^2 - |\Delta r|^2}$.

Две събития, чиито координати се различават с безкрайно малка величина, се наричат **безкрайно близки**, а интервалът dS между тях – **безкрайно малък**

(5) $\quad \boxed{(d\,S)^2 = c^2.(d\,t)^2 - |d\,r|^2}$.

Нека разгледаме две безкрайно близки събития, които за наблюдател в ИОС $\boldsymbol{K^/}$ се реализират **в една и съща пространствена точка**, т.е. в $\boldsymbol{K^/} \Rightarrow |d\,r| = 0$. Тогава за безкрайно малкия интервал между тези събития (в $\boldsymbol{K^/}$) ще имаме

$(d\,S^/)^2 = c^2.(d\,t^/)^2$.

Прието е времето $d\,t^/$, участващо в горното представяне, да се нарича <u>**собствено време**</u>. За него се използва и специално въведено означение

$\boxed{d\,t^/ \equiv d\tau}$ - <u>**собствено време**</u>.

Следователно **пространствено-временният интервал** dS и **собственото време** $d\tau$ се оказват свързани помежду си със съотношението

(6) $\quad \boxed{d\,S = c.d\,\tau}$.

Понеже разглеждаме случай, при който за наблюдател в $\boldsymbol{K^/}$ $|d\,r| = 0$, т.е. $dx^/ = 0$, то от трансформациите на Лоренц ще следва, че

$$dt = \frac{dt^{/} + \dfrac{V}{c^2}dx^{/}}{\sqrt{1-\dfrac{V^2}{c^2}}} \equiv \frac{dt^{/}}{\sqrt{1-\dfrac{V^2}{c^2}}} \equiv \frac{d\,\tau}{\sqrt{1-\dfrac{V^2}{c^2}}}, \text{ т.е. } d\,\tau = d\,t\,.\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}\,.$$

Така всъщност получихме следната връзка между **собственото време** $d\tau$ и **координатното време** $d\,t$ (времето в ИОС $\boldsymbol{K}$)

(7) $\boxed{d\,\tau = d\,t\,.\sqrt{1-\dfrac{V^2}{c^2}}}$.

Извод: Докато собственото време $d\tau$ е инвариант, то координатното време $d\,t$ зависи от избора на отправната координатна система (откъдето, всъщност, идва и наименованието му – координатно).

Ако с така намереното в (7) представяне за собственото време заместим в (6), ще получим следната връзка между **пространствено-временният интервал** dS и **координатното време** dt

(8) $d\,S = c.\sqrt{1-\dfrac{V^2}{c^2}}.d\,t$.

Нека отново се върнем на разглежданите две събития (за наблюдател в ИОС $\boldsymbol{K}$ – <u>неподвижна</u>):

С1: изпращане на светлинен сигнал (импулс) от т. (x_1, y_1, z_1) в момент време t_1; и

С2: приемане на този светлинен сигнал в т. (x_2, y_2, z_2) в момент време t_2.

От (3) и (2) можем да заключим, че

$(2^{/})$ $\boxed{(d\,S)^2 = 0}$.

Извод: Събитията изпращане и приемане на светлинен сигнал са свързани с интервал $d\,S$, който е равен на нула. Интервали от типа $(2^{/})$ се наричат **<u>светлинно-подобни интервали</u>**.

Наименованието идва от факта, че изпращането и приемането на сигнал между указаните 2 точки се характеризира с интервал $d\,S$, който може да бъде равен на нула само тогава, когато „посредникът” при пренасянето на този сигнал е **светлината**, защото единствено тя се разпространява със скорост c !

Но в 4-мерното пространство-време има множество точки, за интервала между всеки две от които е възможно $(d\,S)^2 > 0$, или пък $(d\,S)^2 < 0$.

А. Нека разгледаме случая

(9) $\boxed{(d\,S)^2 > 0}$.

Такъв интервал се нарича **<u>временно-подобен интервал</u>**.

Две събития, които са свързани с временно-подобен интервал (9), се наричат **<u>причинно-свързани събития.</u>** Това означава, че от точката на **първото събитие** (x_1, y_1, z_1) в момент време t_1 може да се изпрати сигнал (светлинен), който да достигне до точката на **второто събитие** (x_2, y_2, z_2) в момент време t_2, и **да го предизвика**.

Ако представим (9) в по-детайлен запис, ще имаме

$(d\,S)^2 \equiv c^2.(d\,t)^2 - \left|\,d\,r\,\right|^2 > 0$, т.е.

$c^2.(d\,t)^2 > \left|\,d\,r\,\right|^2$, или още

$c > \dfrac{|\,d\,r\,|}{d\,t} = v$, където v е скорост на движение на „нашия” обект. Очевидно последното неравенство изразява факта, че при събития, свързани с временно-подобен интервал, скоростта на движение на обекта е по-малка от скоростта на светлината във вакуум, или още, че скоростта на предаване на сигнала е $c > v$.

Извод: тъй като $v < c$, то събитията с координати (ct_1, x_1, y_1, z_1) и (ct_2, x_2, y_2, z_2) **могат да са в причинно-следствена връзка**.

Две събития, свързани със съотношение (9), могат да бъдат дори и **едноместни** – т.е. стават в една и съща пространствена точка $|d\,r| = 0$, но в различни моменти от време, т.е. $\Delta t \neq 0$.

Редът на събитията, свързани с временно-подобен интервал $(d\,S)^2 > 0$ **е абсолютен** (във времето)**,** т.е. ако спрямо една ИОС събитие №2 става **след** събитие №1, то тази последователност **се запазва** във всяка друга (**произволна**) ИОС.

Понеже за временно-подобни интервали $c^2.(d\,t)^2 > |d\,r|^2$, или още $c.d\,t > |d\,r|$, а $|d\,r| > 0$, то следователно и $\boxed{d\,t > 0}$, като това неравенство остава в сила за всяка ИОС.

Б. Нека разгледаме и другият случай

(10) $\boxed{(d\,S)^2 < 0}$.

Интервали от типа (10) се наричат **<u>пространствено-подобни интервали.</u>**

Две събития, свързани с пространствено-подобен интервал, **<u>не могат</u> да бъдат причинно-следствено свързани помежду си**! Причината за това е, че не може да бъде намерен **<u>материален</u>** носител, чрез който да се предаде информация между двете точки със скорост $v > c$. Действително ако запишем (10) в по-детайлен вид, ще имаме

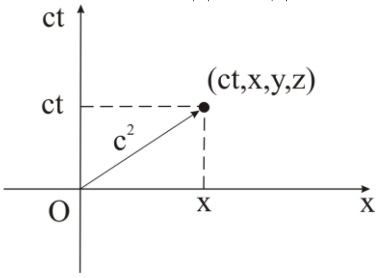
$(d\,S)^2 \equiv c^2.\Delta t^2 - |\Delta r|^2 < 0$, т.е. $c^2.\Delta t^2 < |\Delta r|^2$, или още $c.\Delta t < |\Delta r|$, откъдето следва, че

$$c < \frac{|\Delta r|}{\Delta t} \equiv v\text{, или още } \boxed{c < v}.$$

Полученото съотношение между скоростите е недопустимо (противоречи на принципите на СТО), поради което го отхвърляме. А с това **отхвърляме и възможността** от точката на **първото събитие** (x_1, y_1, z_1) в момент време t_1 може да се изпрати сигнал (светлинен), който да достигне до точката на **второто събитие** (x_2, y_2, z_2) в момент време t_2, и <u>да го предизвика</u> – при пространствено-подобни интервали това е просто **невъзможно**. С това всъщност доказахме, че две събития, свързани с пространствено-подобен интервал, <u>не могат да бъдат причинно-следствено свързани помежду си</u>**.** Тези събития ще наричаме **<u>причинно несвързани събития.</u>**

Оказва се, обаче, че причинно несвързаните събития **могат да бъдат едновременни** в някаква ИОС ($\Delta t = 0$), но **<u>в никакъв случай не могат да се „случат” в една и съща точка на тази ИОС</u>**, т.е. $\Delta r \neq 0$. Поради това **не може да бъде определена тяхната последователност във времето**, което ще рече, че:

- съществуват ИОС, в които събитие 1 е **преди** събитие 2,
- съществуват ИОС, в които събитие 1 е **едновременно** със събитие 2 ($\Delta t = 0$),
- ала съществуват и ИОС, в които събитие 1 е **след** събитие 2, както всъщност следва и да се очаква при причинно несвързани събития.



Нека разгледаме отново двумерно сечение на пространство-времето, изобразено чрез двумерна координатна система, по абцисната ос на която са нанесени пространствените координати (в случая – координатата x), а по ординатата - времето.

Началото O на тази координатна система приемаме за геометричен образ на събитие с координати, равни на нула. Тогава разстоянието между събитието O и произволно друго събитие, изобразено с точка от равнината, е

(11) $\quad S^2 = c^2t^2 - x^2 - y^2 - z^2$.

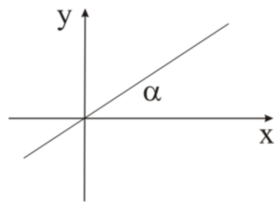
Геометричното място от точки, отстоящи на едно и също разстояние S от точка O, се дава с представянето

$S^2 = c^2t^2 - x^2 = const$.

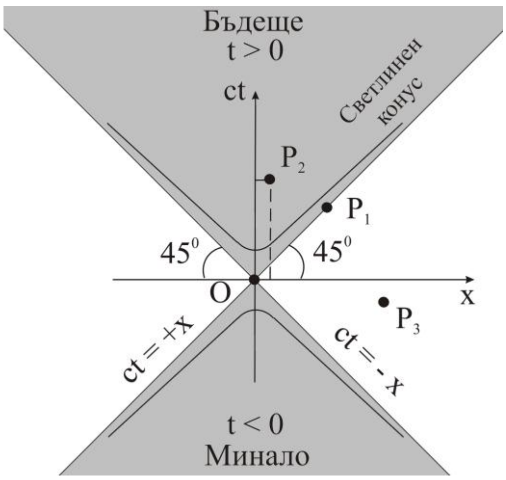
В псевдоевклидовото пространство $\boldsymbol{R^4}$ с геометрия (*метрика*), определена със съотношението (3 $^/$) с последното уравнението е всъщност **уравнение на хипербола** (*докато в тримерното евклидово пространство* $\boldsymbol{R^3}$ *аналогичното по смисъл уравнение* $r^2 = x^2 + y^2 + z^2 = const$ *е уравнение на окръжност*).

Асимптотите на тази хипербола се определят от условието $S^2 = 0$, т.е. $c^2t^2 - x^2 = 0$; или още $c^2t^2 = x^2$, откъдето получаваме търсените асимптоти (*уравнения на прави*):

$ct = \pm x$.



Сравнявайки с класическото аналитично представяне на права $y = k.x$, където $k = tg\alpha$, стигаме до извода, че уравненията $ct = +x$ и $ct = -x$ са уравнения на прави, минаващи през началото O на координатната система и наклонени спрямо абсцисната ос под ъгли, чиито тангенси са равни съответно на $+1$ и -1 (т.е. ъглите са съответно $+45^0$ и -45^0). При завъртането на тези асимптоти (прави) около оста Oct се описва конична повърхнина (конус), чиято ос съвпада с оста Oct. Вътрешността на този конус се нарича **<u>светлинен конус</u>**.



В зависимост от стойността на интервала S псевдоевклидовата равнина (ct, x) се разделя на три области:

Първа област: произволни две точки от **асимптотите** $ct = +x$ и $ct = -x$ (напр. т. P_1 и т. O) са свързани с интервал S, който е равен на **нула**, понеже абсцисата и ординатата на т. P_1 са равни, а такъв интервал е **светлинно-подобен интервал**. Такива две точки изразяват събитията „**излъчване на светлинен сигнал от дадена точка в даден момент време**” и „**приемане на светлинен сигнал в друга точка в друг момент време**”.

Втора област (<u>област на светлинния конус</u>, ***изобразен в сиво***)**:** коя да е точка от светлинния конус (напр. т. P_2), е свързана с т. O посредством <u>*временно-подобен интервал*</u>, т.е. интервал, за който $S^2 > 0$. Действително за т. P_2 ординатата е по-голяма от абсцисата, т.е. $c.t > x$, следователно $c^2.t^2 - x^2 > 0$, откъдето следва, че действително $S^2 > 0$. Щом интервалът между точките P_2 и O е временно-подобен интервал, то събитията в тези две точки са **причинно свързани** (*казаното означава напр., че от т. O* ***<u>може</u>*** *да се изпрати светлинен сигнал към т.* P_2*, който да предизвика в тази точка дадено събитие*).

При това събития от вътрешността на светлинния конус, ставащи в момент:

а) $t > 0$, са **бъдещи** по отношение на събитието O и спадат към т.нар. **бъдеще**;

б) $t < 0$, са **минали** по отношение на събитието O и спадат към т.нар. **минало**.

Частта от светлинния конус, определена от условието $c.t > 0$, се нарича **абсолютно бъдеще**, а тази, за която $c.t < 0$, се нарича **абсолютно минало**.

Трета област (<u>област извън светлинния конус</u>)**:** коя да е точка извън светлинния конус (напр. т. P_3), е свързана с т. O посредством <u>*пространствено-подобен интервал*</u>, т.е. интервал, за който $S^2 < 0$. Действително за т. P_3 ординатата е по-малка от абсцисата, т.е.

$c.t < x$, следователно $c^2.t^2 - x^2 < 0$, откъдето следва, че действително $S^2 < 0$. Щом интервалът между точките P_3 и O е пространствено-подобен интервал, то събитията в тези две точки са **причинно несвързани** (*казаното означава напр., че от т. O* ***не може*** *да се изпрати светлинен сигнал към т. P_3, който да предизвика в тази точка дадено събитие*).

Ето защо областта извън светлинния конус се нарича **абсолютно отдалечена област**. В тази област понятията „*по-рано*", „*по-късно*" и „*едновременно*" имат **относителен характер**.