📖 **Плоска монохроматична електромагнитна вълна**

✓ $\vec{E}(\vec{r},t)=\vec{E}_0\, e^{i\omega\left(t-\frac{\vec{n}\cdot\vec{r}}{c}\right)}$; и ✓ $\vec{B}(\vec{r},t)=\vec{B}_0\, e^{i\omega\left(t-\frac{\vec{n}\cdot\vec{r}}{c}\right)}$,

където $\vec{E}_0$ и $\vec{B}_0$ са **комплексни постоянни вектори** (*постоянни вектори с комплексни компоненти*). Тези уравнения са решения на **хомогенните вълнови уравнения**, явяващи се следствия от уравненията на Максуел при **отсъствие на източници** ($\rho=0$ и $\vec{j}=0$):

✓
$$\left|\begin{aligned} & div\,\vec{E}=0, \\ & rot\,\vec{E}=-\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}, \\ & div\,\vec{B}=0, \\ & rot\,\vec{B}=\varepsilon_0\mu_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}. \end{aligned}\right.$$

✓ $\vec{E}\cdot\vec{n}=0$, ✓ $\vec{B}\cdot\vec{n}=0$, ✓ $\vec{B}=\dfrac{\vec{n}\times\vec{E}}{c}$.

✸ **Задача:** Да се докаже, че полевите вектори $\vec{E}$ и $\vec{B}$ на плоска електромагнитна вълна

(1) $\vec{E}(\vec{r},t)=\vec{E}_0\, e^{i\omega\left(t-\frac{\vec{n}\cdot\vec{r}}{c}\right)}$; и (2) $\vec{B}(\vec{r},t)=\vec{B}_0\, e^{i\omega\left(t-\frac{\vec{n}\cdot\vec{r}}{c}\right)}$,

където $\vec{E}_0$ и $\vec{B}_0$ са **комплексни постоянни вектори**, удовлетворяват съотношенията

(3.1) $\vec{E}\cdot\vec{n}=0$, (3.2) $\vec{B}\cdot\vec{n}=0$, (3.3) $\vec{B}=\dfrac{\vec{n}\times\vec{E}}{c}$.

Доказателство:

Уравненията (1) и (2) са решения на **хомогенните вълнови уравнения**, явяващи се следствия от уравненията на Максуел при **отсъствие на източници** ($\rho=0$ и $\vec{j}=0$):

$$(4)\quad\left|\begin{aligned} & div\,\vec{E}=0, \\ & rot\,\vec{E}=-\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}, \\ & div\,\vec{B}=0, \\ & rot\,\vec{B}=\varepsilon_0\mu_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}. \end{aligned}\right.$$

Ако се заместят (1) и (2) в (4), се получават връзки, даващи много полезна информация относно пространствената структура на ЕМ поле.

А) Доказателство на (3.1):

Ако заместим (1) в първото от уравнения (4), получаваме:

$$div\,\vec{E}(\vec{r},t) = div\left(\vec{E}_0\, e^{i\omega\left(t-\frac{\vec{n}\cdot\vec{r}}{c}\right)}\right) = \left(div\,\vec{E}_0\right)e^{i\omega\left(t-\frac{\vec{n}\cdot\vec{r}}{c}\right)} + \vec{E}_0 .grad\, e^{i\omega\left(t-\frac{\vec{n}\cdot\vec{r}}{c}\right)} \equiv$$

$$\equiv \vec{E}_0 .grad\, e^{i\omega\left(t-\frac{\vec{n}\cdot\vec{r}}{c}\right)} = \vec{E}_0 .grad\left(e^{i\omega t}\, e^{-i\omega\frac{\vec{n}\cdot\vec{r}}{c}}\right) = \vec{E}_0\, e^{i\omega t} .grad\, e^{-i\omega\frac{\vec{n}\cdot\vec{r}}{c}} =$$

$$= \vec{E}_0\, e^{i\omega t} e^{-i\omega\frac{\vec{n}\cdot\vec{r}}{c}} .grad\left(-i\omega\frac{\vec{n}\cdot\vec{r}}{c}\right) = -\frac{i\omega}{c}\vec{E}_0\, e^{i\omega\left(t-\frac{\vec{n}\cdot\vec{r}}{c}\right)} .grad\,(\vec{n}\cdot\vec{r}) =$$

$$= -\frac{i\omega}{c}\vec{E}\ .grad\,(\vec{n}\cdot\vec{r}).$$

Ако използваме формулата от векторния анализ $grad\,(\vec{n}\cdot\vec{r}) = \vec{n}$, получаваме

$$div\,\vec{E}(\vec{r},t) = -\frac{i\omega}{c}\vec{E}\ .\vec{n}\,.$$

Но съгласно (4) $div\,\vec{E}(\vec{r},t) = 0$, откъдето следва

$-\frac{i\omega}{c}\vec{E}\ .\vec{n} = 0$, т.е. $\vec{E}\ .\vec{n} = 0$, к.т.д.

Б) Доказателство на (3.2): напълно аналогично на това за (3.1), като в този случай заместваме (2) във третото от уравнения (4).

В) Доказателство на (3.3):

Заместваме (1) и (2) във второто от уравнения (4) и получаваме:

$$rot\left(\vec{E}_0\, e^{i\omega\left(t-\frac{\vec{n}\cdot\vec{r}}{c}\right)}\right) = -\frac{\partial}{\partial t}\left(\vec{B}_0\, e^{i\omega\left(t-\frac{\vec{n}\cdot\vec{r}}{c}\right)}\right).$$

Ако приложим формулата от векторния анализ

$rot(uU) = u\,rotU - U\times grad\,u$,

ще получим

$$e^{i\omega\left(t-\frac{\vec{n}\cdot\vec{r}}{c}\right)} rot\left(\vec{E}_0\right) - \vec{E}_0\times grad\left(e^{i\omega\left(t-\frac{\vec{n}\cdot\vec{r}}{c}\right)}\right) = -\vec{B}_0\, e^{-i\omega\frac{\vec{n}\cdot\vec{r}}{c}}\frac{\partial}{\partial t}(e^{i\omega t}).$$

Отчитайки, че $rot\,(\vec{E}_0) = 0$, получаваме

$$-\vec{E}_0\times e^{i\omega t} grad\left(e^{-i\omega\frac{\vec{n}\cdot\vec{r}}{c}}\right) = -\vec{B}_0\, e^{-i\omega\frac{\vec{n}\cdot\vec{r}}{c}}(i\omega e^{i\omega t})$$

$$-\vec{E}_0\times e^{i\omega t} e^{-i\omega\frac{\vec{n}\cdot\vec{r}}{c}} grad\left(-i\omega\frac{\vec{n}\cdot\vec{r}}{c}\right) = -i\omega\vec{B}_0\, e^{i\omega t} e^{-i\omega\frac{\vec{n}\cdot\vec{r}}{c}}$$

$$-\left(\frac{-i\omega}{c}\right)\vec{E}_0\, e^{i\omega\left(t-\frac{\vec{n}\cdot\vec{r}}{c}\right)}\times grad\,(\vec{n}\cdot\vec{r}) = -i\omega\vec{B}_0\, e^{i\omega\left(t-\frac{\vec{n}\cdot\vec{r}}{c}\right)} \qquad \Big| :(-i\omega)$$

$$-\frac{1}{c}\vec{E}\times\vec{n}=\vec{B}, \text{ т.е. } \quad \vec{B}=-\frac{\vec{E}\times\vec{n}}{c}\equiv\frac{\vec{n}\times\vec{E}}{c}, \text{ к.т.д.}$$