$$-\frac{1}{c}\vec{E}\times\vec{n}=\vec{B},\ \text{т.е.}\quad \vec{B}=-\frac{\vec{E}\times\vec{n}}{c}\equiv\frac{\vec{n}\times\vec{E}}{c},\ \text{к.т.д.}$$

✸ **Задача:** да се аргументират представянията на електричния и магнитния вектори $\vec{E}=-\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}-grad\,\varphi$ и $\vec{B}=rot\,\vec{A}$ с помощта на уравненията на Максуел по чисто теоретичен (*аналитичен*) начин, използвайки единствено съображения от векторния анализ.

Решение:

Съгласно уравненията на Максуел:

$$(1)\quad \left|\begin{array}{l} div\,\vec{E}=0, \\ rot\,\vec{E}=-\dfrac{\partial\vec{B}}{\partial t}, \\ div\,\vec{B}=0, \\ rot\,\vec{B}=\varepsilon_0\mu_0\dfrac{\partial\vec{E}}{\partial t}. \end{array}\right.$$

От третото от тях следва, че щом $div\,\vec{B}=0$ тъждествено, то векторът $\vec{B}$ трябва да има представянето

$$(2)\qquad \vec{B}=rot\ \vec{A},$$

защото тогава $div\,\vec{B}=div\,rot\ \vec{A}=\nabla.\nabla\times\vec{A}=\nabla\times\nabla.\vec{A}\equiv 0$.

Щом $\vec{B}$ има представянето (2), то тогава второто от уравнения (1) ще добие вида

$$(3)\qquad rot\,\vec{E}+\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}=0,\ \text{т.е.}\qquad rot\,\vec{E}+\frac{\partial}{\partial t}(rot\,\vec{A})=0,\ \text{или още}$$

$$(4)\qquad rot\,\vec{E}+rot\left(\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}\right)=0,\ \text{т.е.}\quad rot\left(\vec{E}+\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}\right)=0.$$

Но от векторния анализ е известно, че НДУ $rot\,\vec{V}=0$ е $\vec{V}=\pm grad\,\varphi$. С отчитане на този факт можем за запишем, че

$$(5)\qquad \vec{E}+\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}=-grad\,\varphi$$ (*взема се знак „-„ по исторически съображения*).

Така от (5) можем да заключим, че

$$(6)\qquad \vec{E}=-\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}-grad\,\varphi,\qquad \text{к.т.д.}$$

✸ **Задача:** да се получат вълновите уравнения за потенциалите φ и $\vec{A}$, като се изходи от уравненията на Максуел.

Решение: при решаването на този проблем ще бъде наложително да се използват калибровъчни условия за потенциалите. Те са 2 основни типа:

А) калибровъчно условие на Лоренц:

(1) $4-div\,A=0$, т.е. $\dfrac{\partial A^{\mu}}{\partial x^{\mu}}=0$, $\mu=0,1,2,3$.

Ако 4-мерната дивергенция от 4-потенциала $A^{\mu}=\left(\dfrac{\varphi}{c},\vec{A}\right)$ по компонентите на 4-радиус-вектора $x^{\mu}=(ct,x,y,z)$ се „разпише” по компоненти, ще имаме

(2) $\dfrac{\partial A^0}{\partial x^0}+\dfrac{\partial A^1}{\partial x^1}+\dfrac{\partial A^2}{\partial x^2}+\dfrac{\partial A^3}{\partial x^3}=0$, т.е. $\dfrac{\partial(\varphi/c)}{\partial(ct)}+\dfrac{\partial A_x}{\partial x}+\dfrac{\partial A_y}{\partial y}+\dfrac{\partial A_z}{\partial z}=0$,

откъдето получаваме тримерна форма на запис на калибровъчното условие на Лоренц

(3) $\dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial\varphi}{\partial t}+div\,\vec{A}=0$, или още $div\,\vec{A}=-\dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial\varphi}{\partial t}$.

Б) калибровъчно условие на Кулон:

(4) $div\,\vec{A}=0$.

След тези уточнения можем да пристъпим към намирането на вълновите уравнения.

А.) вълново уравнение за φ:

Заместваме $\vec{E}=-\dfrac{\partial\vec{A}}{\partial t}-grad\,\varphi$ в първото от уравненията на Максуел

$$\left|\begin{aligned} &div\,\vec{E}=\frac{\rho}{\varepsilon_0},\\ &rot\,\vec{E}=-\frac{\partial\vec{B}}{\partial t},\\ &div\,\vec{B}=0,\\ &rot\,\vec{B}=\mu_0\,\vec{j}+\frac{1}{c^2}\frac{\partial\vec{E}}{\partial t},\end{aligned}\right.$$

(5) $div\left(-\dfrac{\partial\vec{A}}{\partial t}-grad\,\varphi\right)=\dfrac{\rho}{\varepsilon_0}$, т.е.

(6) $-\dfrac{\partial}{\partial t}(div\,\vec{A})-div\,grad\,\varphi=\dfrac{\rho}{\varepsilon_0}$.

**Забележка*: Ако приложим спрямо (6) калибровъчното условие на Кулон $div\,\vec{A}=0$ и отчетем, че $div\,grad\,\varphi=\Delta\varphi$, то (6) добива вида

(7) $-\Delta\varphi=\dfrac{\rho}{\varepsilon_0}$, т.е. $\Delta\varphi=-\dfrac{\rho}{\varepsilon_0}$, което е уравнението на Поасон.

Нека спрямо (6) обаче приложим калибровъчното условие (3) на Лоренц, т.е.

(8) $div\,\vec{A}=-\dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial\varphi}{\partial t}$.

Тогава (6) добива вида

(7) $$-\frac{\partial}{\partial t}\left(-\frac{1}{c^2}\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right)-\Delta\varphi=\frac{\rho}{\varepsilon_0},$$ или още

(8) $$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}-\Delta\varphi=\frac{\rho}{\varepsilon_0}.$$

С помощта на оператора на Д’Аламбер

$$\Box\equiv\Delta-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}$$

получаваме следното уравнение, удовлетворявано от потенциала

$$\Box\varphi=-\frac{\rho}{\varepsilon_0}.$$

Б.) вълново уравнение за $\vec{A}$:

Заместваме $\vec{E}=-\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}-grad\ \varphi$ и $\vec{B}=rot\ \vec{A}$ в четвъртото от уравненията на Максуел**:**

(9) $$rot\ rot\ \vec{A}=\mu_0\,\vec{j}+\frac{1}{c^2}\frac{\partial}{\partial t}\left(-\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}-grad\ \varphi\right).$$

Но $rot\ rot\ \vec{A}=grad\ div\,\vec{A}-\Delta\vec{A}$, следователно

(10) $$grad\ div\,\vec{A}-\Delta\vec{A}=\mu_0\,\vec{j}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial}{\partial t}(grad\ \varphi),$$ т.е.

(11) $$-\Delta\vec{A}=\mu_0\,\vec{j}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2}-grad\ div\,\vec{A}-grad\left(\frac{1}{c^2}\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right),$$ т.е.

(12) $$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2}-\Delta\vec{A}=\mu_0\,\vec{j}-grad\left(div\,\vec{A}+\frac{1}{c^2}\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right).$$

Лявата страна на (12) се представя посредством оператора на д’Аламбер, а в дясната страна прилагаме калибровката на Лоренц , т.е. $\left(div\,\vec{A}+\frac{1}{c^2}\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right)=0$. Така (12) добива вида

$$\Box\vec{A}=-\mu_0\,\vec{j}\ .$$

✸ **Задача:** да се получат вълновите уравнения за векторите на ЕМ поле $\vec{E}$ и $\vec{B}$, като се изходи от уравненията на Максуел.

Решение:

Уравненията на Максуел са:

(1.1) $$div\,\vec{E}=\frac{\rho}{\varepsilon_0},$$

(1.2) $$rot\,\vec{E}=-\frac{\partial\vec{B}}{\partial t},$$

(1.3) $$div\,\vec{B}=0,$$

(1.4) $\quad rot\,\vec{B} = \mu_0\,\vec{j} + \dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial\vec{E}}{\partial t}$.

А.) вълново уравнение за $\vec{E}$:

Прилагаме операцията rot спрямо уравнение (1.2)

(2) $\quad rot\,rot\,\vec{E} = -\dfrac{\partial}{\partial t}(rot\,\vec{B})$.

В дясната страна на (2) заместваме $rot\,\vec{B}$ от (1.4), а в лявата страна използваме, че $rot\ rot\ \vec{E} = grad\,div\,\vec{E} - \Delta\,\vec{E}$. Така уравнение (2) добива вида

(3) $\quad grad\,div\,\vec{E} - \Delta\,\vec{E} = -\dfrac{\partial}{\partial t}\left(\mu_0\,\vec{j} + \dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial\vec{E}}{\partial t}\right)$.

Сега заместваме $div\,\vec{E}$ от (1.1)

(4) $\quad grad\left(\dfrac{\rho}{\varepsilon_0}\right) - \Delta\,\vec{E} = -\mu_0\dfrac{\partial}{\partial t}(\,\vec{j}\,) - \dfrac{\partial}{\partial t}\left(\dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial\vec{E}}{\partial t}\right)$.

Ако зарядите са разпределени хомогенно ($\rho = const$) или пък заряди липсват ($\rho = 0$), то $grad\left(\dfrac{\rho}{\varepsilon_0}\right) = 0$.

Ако токовете са стационарни ($\vec{j} = const$) или пък токове липсват ($\vec{j} = 0$), то $\dfrac{\partial}{\partial t}(\,\vec{j}\,) = 0$. Ако приемем, че е налице някой от горните два случая, то (4) добива вида

(5) $\quad -\Delta\,\vec{E} = -\dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial}{\partial t}\left(\dfrac{\partial\vec{E}}{\partial t}\right)$, или още

(6) $\quad \Delta\,\vec{E} - \dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2} = 0$, т.е. $\quad \Box\,\vec{E} = 0$.

Б.) вълново уравнение за $\vec{B}$:

Прилагаме отново операцията rot, но спрямо уравнение (1.4)

(7) $\quad rot\,rot\,\vec{B} = rot\left(\mu_0\,\vec{j} + \dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial\vec{E}}{\partial t}\right)$, т.е.

(8) $\quad rot\,rot\,\vec{B} = \mu_0\,rot\,\vec{j} + \dfrac{1}{c^2}rot\left(\dfrac{\partial\vec{E}}{\partial t}\right)$, където $rot\left(\dfrac{\partial\vec{E}}{\partial t}\right) = \dfrac{\partial}{\partial t}(rot\,\vec{E})$.

В дясната страна на (8) заместваме $rot\,\vec{E}$ от (1.2), а в лявата страна използваме, че $rot\ rot\ \vec{B} = grad\,div\,\vec{B} - \Delta\,\vec{B}$. Но съгласно (1.3) $div\,\vec{B} = 0$, следователно $rot\ rot\ \vec{B} = -\Delta\,\vec{B}$. Така уравнение (8) добива вида

(9) $\quad -\Delta\,\vec{B} = \mu_0\,rot\,\vec{j} + \dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial}{\partial t}\left(-\dfrac{\partial\vec{B}}{\partial t}\right)$.

Ако токовете са стационарни ($\vec{j} = const$) или пък токове липсват ($\vec{j} = 0$), то $rot\,\vec{j} = 0$, следователно

(10) $\quad -\Delta\vec{B} = -\dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial^2\vec{B}}{\partial t^2}$, т.е.

(11) $\quad \Delta\vec{B} - \dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial^2\vec{B}}{\partial t^2} = 0$, или още $\quad \Box\,\vec{B} = 0$.

✸ **Задача:** Да се докаже, че за плоска ЕМ вълна $\varepsilon_0\,E^2 = \mu_0\,H^2$.

Доказателство: за плоска ЕМ вълна бяха доказани вече съотношенията

(1.1) $\vec{E}\cdot\vec{n} = 0$, $\quad$ (1.2) $\vec{B}\cdot\vec{n} = 0$, $\quad$ (1.3) $\quad \vec{B} = \dfrac{\vec{n}\times\vec{E}}{c}$.

Ако отчетем, че

(2) $\quad \vec{H} = \dfrac{\vec{B}}{\mu_0}$, и $\qquad$ (3) $\quad c = \dfrac{1}{\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}}$,

то (1.3) добива вида

(4) $\quad \vec{H} = \dfrac{\vec{n}\times\vec{E}}{\mu_0}\sqrt{\varepsilon_0\mu_0} = \sqrt{\dfrac{\varepsilon_0}{\mu_0}}\,(\vec{n}\times\vec{E})$.

Нека повдигнем двете страни на (4) в квадрат, като отчетем, че

(5) $\quad (\vec{n}\times\vec{E})^2 = (\vec{n}\times\vec{E}).(\vec{n}\times\vec{E}) = \vec{n}^2\vec{E}^2 - (\vec{n}.\vec{E})^2$.

Но съгласно (1.1) $\vec{E}\cdot\vec{n} = 0$, а $\vec{n}^2 = 1$, следователно

(6) $\quad (\vec{n}\times\vec{E})^2 = \vec{E}^2$.

С отчитането на (6) получаваме

(7) $\quad \vec{H}^2 = \dfrac{\varepsilon_0}{\mu_0}\vec{E}^2$, откъдето следва $\varepsilon_0\,E^2 = \mu_0\,H^2$, к.т.д.

✸ **Задача:** Да се изведе **уравнението на непрекъснатостта** (*в тримерна форма*) от уравненията на Максуел в материална среда.

Решение:

Уравненията на Максуел са:

(1.1) $\quad div\,\vec{E} = \dfrac{\rho}{\varepsilon_0}$,

(1.2) $\quad rot\,\vec{E} = -\dfrac{\partial\vec{B}}{\partial t}$,

(1.3) $\quad div\,\vec{B} = 0$,

(1.4) $\quad rot\,\vec{B} = \mu_0\,\vec{j} + \dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial\vec{E}}{\partial t}$.

Изразяваме ρ от (1.1) и го диференцираме по времето:

(1) $\quad \rho = \varepsilon_0\,div\,\vec{E}$, следователно

(2) $$\frac{\partial\rho}{\partial t} = \varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t}(div\,\vec{E}) \equiv \varepsilon_0\, div\, \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}.$$

Изразяваме $\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$ от (1.4): $\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = c^2(rot\,\vec{B} - \mu_0\,\vec{j})$, и заместваме в (2)

(3) $$\frac{\partial\rho}{\partial t} = \varepsilon_0\, div\,(c^2(rot\,\vec{B} - \mu_0\,\vec{j})) = \varepsilon_0\, c^2(div\ rot\,\vec{B}) - \varepsilon_0\,\mu_0\, c^2\, div\,\vec{j}.$$

Но $div\ rot\,\vec{B} = \nabla.\nabla\times\vec{B} \equiv 0$, а $\varepsilon_0\,\mu_0\, c^2 = 1$, понеже $c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}}$. По този начин (3) добива вида

(4) $$\frac{\partial\rho}{\partial t} = -div\,\vec{j},$$ т.е.

(5) $$\frac{\partial\rho}{\partial t} + div\,\vec{j} = 0,$$

което представлява точно уравнението за непрекъснатостта в тримерна форма.

***<u>Забележка</u>**: Цитираните в настоящото ръководство задачи (Стр. *xxx*, Зад. *yyy*) визират „**Сборник задачи по теоретична физика**”, с автори **Кръстю Иванов**, **Вълю Великов**, **Стефка Казакова**, Пловдивско университетско издание, **2002 г**.

Декември 2009 г. Гл. ас. Петко Митев