Тема: Електростатика

❖ **Теоретичен минимум**

Потенциал и интензитет на електростатично поле:

- $\varphi(\vec{r}) = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int\limits_V \dfrac{\rho(r^/)}{\left|r - r^/\right|} dV^/$, и

- $\vec{E}(\vec{r}) = -grad\varphi = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int\limits_V \dfrac{\rho(r^/)\cdot(r - r^/)}{\left|r - r^/\right|^3} dV^/$,

понеже: $grad\dfrac{1}{\left|r - r^/\right|} = -\dfrac{\vec{r} - \vec{r}^{\,/}}{\left|r - r^/\right|^3}$.

Уравнение на Поасон:

- $\Delta\,\varphi = -\dfrac{\rho}{\varepsilon_0}$.

Уравнение на Лаплас:

- $\Delta\,\varphi = 0$.

Тези уравнения се решават, като на границата между всеки две среди се прилагат изискванията (*идващи от граничните условия за* $\vec{E}$) за непрекъснатост на потенциала и на неговата първа производна, т.е. ако $r = r_0$ е гранична точка, то

- $\varphi_i(r)\Big|_{r=r_0} = \varphi_j(r)\Big|_{r=r_0}$ и ✓ $\dfrac{\partial\varphi_i(r)}{\partial r}\Big|_{r=r_0} = \dfrac{\partial\varphi_j(r)}{\partial r}\Big|_{r=r_0}$.

Разложение на кулоновия потенциал:

- $\dfrac{1}{\left|\vec{R} - \vec{r}\right|} = \dfrac{1}{\sqrt{R^2 - 2rR\cos\theta + r^2}} = \sum\limits_{l=0}^{\infty} P_l(\cos\theta)\,\dfrac{r^l}{R^{l+1}}$, като за полиномите на Лежандър е в сила условието за ортогоналност

✓ $$\int_{-1}^{+1} P_l(x).P_{l'}(x)\,dx = \frac{2}{2l+1}\delta_{ll'}.$$

📖 **Функции на Грийн**

а) за оператора на Лаплас:

✓ $$\Delta G(r) = -\delta(r), \qquad G(r) = \frac{1}{4\pi r}.$$

б) за оператора на Хелмхолц:

✓ $$(\Delta + k^2)G(r) = -\delta(r), \qquad G(r) = \frac{e^{ikr}}{4\pi r}.$$

в) за оператора на Д'Аламбер:

✓ $$\left(\Delta - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)G(r,t) = -\delta(r)\,\delta(t), \quad G(r) = \frac{\delta\left(t - \frac{r}{c}\right)}{4\pi r}.$$

📖 **Гранична задача на Дирихле за уравнението на Поасон:**

При нея се търси потенциалът $\varphi(r)$, явяващ се решение на задачата

✓ $\Delta\,\varphi(r) = -\dfrac{\rho(r)}{\varepsilon_0}$ при условие (*гранично*) ✓ $\varphi(r)\Big|_{r \in S_V} = \varphi(r_S)$.

За намиране решението на тази **гранична задача** се използва **функцията на Грийн** $G(r,r^/)$, явяваща се решение на следната гранична задача

✓ $\Delta\,G(r,r^/) = -\,\delta(r - r^/)$ при условие ✓ $G(r,r^/)\Big|_{r \in S_V} = 0$.

Понеже $\Delta\dfrac{1}{4\pi\left|r - r^/\right|} = -\delta(r - r^/)$, то очевидно

✓ $G(r,r^/) = \dfrac{1}{4\pi\left|r - r^/\right|}$ - това е функция на Грийн при област на решимост – цялото пространство**.**

Ако обаче областта на решимост V на задачата на Дирихле за уравнението на Поасон е **крайна област**, то функцията на Грийн се търси във вида

✓ $$G(r,r^/) = \frac{1}{4\pi\left|r - r^/\right|} + F(r,r^/),$$

където функцията $F(r,r^/)$ удовлетворява следните две условия:

❶ $\Delta\,F(r,r^/) = 0$, и ❷ избира се така, че $G(r,r^/)\Big|_{r \in S_V} = 0$.

При известна функция на Грийн потенциалът $\varphi(r)$ може да се изрази чрез интегралното представяне

✓ $$\varphi(r) = \int_V \frac{\rho(r^/)}{\varepsilon_0} G(r,r^/)\,dv - \oint_{S_V} \varphi(r_S)\frac{\partial G(r,r^/)}{\partial n}.\left|d\vec{S}\right|.$$