Тема: 4-тензор на електромагнитното поле. Уравнение на електромагнитното поле в ковариантна форма. Уравнения на Максуел.

❖ **Теоретичен минимум**

🕮 **4-потенциал**: $A^{\mu} = (A^0, \vec{A})$, или още $A^{\mu} = \left(\frac{\varphi}{c}, \vec{A}\right)$, където:

☞ φ **- скаларен потенциал на ЕМ поле;**

☞ $\vec{A}$ **- магнитен векторен потенциал на ЕМ поле.**

✓ **Интензитет на електричното поле:** $\vec{E} = -\, grad\ \varphi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$.

✓ **Индукция на магнитното поле:** $\vec{B} = rot\ \vec{A}$.

🕮 **Антисиметричен 4-тензор на ЕМ поле** $F_{\mu\nu}$:

✓ $F_{\mu\nu} = \dfrac{\partial A_\nu}{\partial x^\mu} - \dfrac{\partial A_\mu}{\partial x^\nu}$, $\mu, \nu = 0, 1, 2, 3$, като очевидно $F_{\nu\mu} = -F_{\mu\nu}$.

✓ $$F_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & E_x/c & E_y/c & E_z/c \\ -E_x/c & 0 & -B_z & B_y \\ -E_y/c & B_z & 0 & -B_x \\ -E_z/c & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix};$$

✓ $$F^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -E_x/c & -E_y/c & -E_z/c \\ E_x/c & 0 & -B_z & B_y \\ E_y/c & B_z & 0 & -B_x \\ E_z/c & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix}.$$

🕮 **Обемна плътност на точков(и) заряд(и)**:

✓ $\rho_a = q_a\, \delta(\vec{r} - \vec{r}_a)$,

✓ $\rho = \sum\limits_a q_a\, \delta(\vec{r} - \vec{r}_a) \equiv \sum\limits_a \rho_a$ - за система от точкови заряди

🕮 **4-вектор на плътността на тока**:

✓ $j^\mu = \rho \dfrac{dx^\mu}{dt}$, за $\mu = 0, 1, 2, 3$.

✓ $j^\mu = (\rho.c, \vec{j})$.

☞ $\vec{j}_a = q_a \vec{V}_a\, \delta(\vec{r} - \vec{r}_a)$ - „ток”, обусловен от **един точков заряд**;

☞ $\vec{j} = \sum\limits_a \vec{j}_a = \sum\limits_a q_a \vec{V}_a\, \delta(\vec{r} - \vec{r}_a)$ - ток на **с-ма от точкови заряди.**

🕮 **Уравнение за непрекъснатостта в диференциална форма**:

✓ $\dfrac{\partial \rho}{\partial t} + div\, \vec{j} = 0$,

или още в **4-мерна форма**, записано чрез **векторна** 4-**дивергенция**, приложена над 4-вектора на плътността на тока

✓ $\dfrac{\partial j^\mu}{\partial x^\mu} = 0$, за $\mu = 0, 1, 2, 3$.

🕮 **Уравнение на електромагнитното поле в ковариантна форма.**

✓ $\dfrac{\partial F^{\mu\nu}}{\partial x^\mu} = \mu_0\, j^\nu$, за $\mu, \nu = 0, 1, 2, 3$,

където $\mu_0 = \dfrac{1}{\varepsilon_0 . c^2}$ **- магнитна константа.**

🕮 **Тримерна форма на уравненията на Максуел**

Уравненията

$$\left|\begin{array}{l} div\,\vec{E} = \dfrac{\rho}{\varepsilon_0}, \\ rot\,\vec{E} = -\dfrac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \\ div\,\vec{B} = 0, \\ rot\,\vec{B} = \mu_0\,\vec{j} + \dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial \vec{E}}{\partial t}, \end{array}\right.$$

са уравнения на електромагнитното поле в **тримерна форма**. Те се наричат **уравнения на Максуел**.

📖 **Енергия на ЕМ поле**

✓ $W = \int\limits_{V_\infty}\left(\dfrac{\varepsilon_0 \vec{E}^2}{2} + \dfrac{\vec{B}^2}{2\mu_0}\right)dV$ - **енергия на ЕМ поле** в цялото пространство.

✓ $w = \dfrac{\varepsilon_0 \vec{E}^2}{2} + \dfrac{\vec{B}^2}{2\mu_0}$ - **обемна плътност на енергията на ЕМ поле,**

✓ $w_E = \dfrac{\varepsilon_0 \vec{E}^2}{2}$, и ✓ $w_M = \dfrac{\vec{B}^2}{2\mu_0}$.

✓ $\vec{S} = \dfrac{1}{\mu_0}(\vec{E}\times\vec{B})$ - **вектор на Умов-Пойтинг.**

✷ **Задача**: **Да се определят** (*в явен вид*) **компонентите на 4-тензора на електромагнитното поле** $F_{\mu\nu}$**.**

Решение:

4-тензорът $F_{\mu\nu}$, наречен **<u>тензор на електромагнитното поле</u>**, има компоненти, които се изразяват чрез компонентите на ковариантния 4-потенциал A_μ и тези на контравариантния 4-радиус-вектор X^μ посредством съотношението

(1) $\boxed{F_{\mu\nu} = \dfrac{\partial A_\nu}{\partial x^\mu} - \dfrac{\partial A_\mu}{\partial x^\nu}}$, за $\mu,\nu = 0, 1, 2, 3$.

Нека припомним, че:

☞ **4-радиус-векторът** X^μ е 4-вектор с компоненти

(2) $X \equiv (x^0, x^1, x^2, x^3) = (ct, x, y, z)$;

☞ **4-потенциалът** A^μ е 4-вектор, който се изразява посредством **скаларния** φ и **векторния** $\vec{A}$ **потенциали** във вида

(3^A) $A^\mu = \left(\dfrac{\varphi}{c}, \vec{A}\right) \equiv (A^0, A^1, A^2, A^3) = \left(\dfrac{\varphi}{c}, A_x, A_y, A_z\right)$ - контравариантна форма; и

(3^B) $A_\mu = \left(\dfrac{\varphi}{c}, -\vec{A}\right) \equiv (A^0, -A^1, -A^2, -A^3) = \left(\dfrac{\varphi}{c}, -A_x, -A_y, -A_z\right)$ - ковариантна форма.

Чрез потенциалите φ и $\vec{A}$ се изразяват и **полевите вектори** $\vec{E}$ и $\vec{B}$ (*векторите на електромагнитното поле*), а именно:

(*) $\quad \vec{E}(\vec{r},t) = -\dfrac{\partial \vec{A}(\vec{r},t)}{\partial t} - grad\ \varphi(\vec{r},t)$, т.е.

(4) $\quad \boxed{E_x = -\dfrac{\partial A_x}{\partial t} - \dfrac{\partial \varphi}{\partial x}}, \qquad \boxed{E_y = -\dfrac{\partial A_y}{\partial t} - \dfrac{\partial \varphi}{\partial y}}, \qquad \boxed{E_z = -\dfrac{\partial A_z}{\partial t} - \dfrac{\partial \varphi}{\partial z}},$

и

(**) $\quad \vec{B}(\vec{r},t) = rot\ \vec{A}(\vec{r},t) \equiv \nabla \times \vec{A} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix}$, т.е.

(5) $\quad \boxed{B_x = \dfrac{\partial A_z}{\partial y} - \dfrac{\partial A_y}{\partial z}}, \qquad \boxed{B_y = \dfrac{\partial A_x}{\partial z} - \dfrac{\partial A_z}{\partial x}}, \qquad \boxed{B_z = \dfrac{\partial A_y}{\partial x} - \dfrac{\partial A_x}{\partial y}}.$

Нека отбележим, че $F_{\mu\nu}$ е **<u>антисиметричен тензор</u>**, т.е. $\boxed{F_{\nu\mu} = -F_{\mu\nu}}$, като очевидно $F_{kk} = 0$, и трябва следователно да притежава **матрично представяне** от вида

(6) $$F_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & F_{01} & F_{02} & F_{03} \\ -F_{01} & 0 & F_{12} & F_{13} \\ -F_{02} & -F_{12} & 0 & F_{23} \\ -F_{03} & -F_{13} & -F_{23} & 0 \end{pmatrix}.$$

Нека припомним още, че в алгебрата на тензорите се използват т.нар. операции „**сваляне**" и „**качване**" на индекс(и), като се следва едно общо **<u>правило</u>**: когато индексът е „0" (*т.е. **временен** индекс*), знакът на компонентата на тензора **не се променя**, <u>обаче</u> когато индексът е 1, 2 или 3 (*т.е. **пространствен** индекс*), то знакът на компонентата на тензора **се променя**. От казаното следва, че когато операциите „**сваляне**" и „**качване**" на индекси се прилага едновременно и за двата индекса на 4-тензор, то:

- ако те са в комбинация „*временен+пространствен*", знакът се мени;
- ако те са в комбинация „*пространствен+пространствен*", знакът не се променя.

След всичко казано дотук можем да намерим компонентите на 4-тензора на електромагнитното поле с помощта на (1):

$$F_{01} = \frac{\partial A_1}{\partial x^0} - \frac{\partial A_0}{\partial x^1} = \frac{\partial(-A_x)}{\partial(c.t)} - \frac{\partial(\varphi/c)}{\partial x} = \frac{1}{c}\left(-\frac{\partial A_x}{\partial t} - \frac{\partial \varphi}{\partial x}\right) = \ \dots \text{ от (*) } \dots \ = \frac{1}{c}E_x = \frac{E_x}{c},$$ т.е.

$\boxed{F_{01} = \dfrac{E_x}{c}}.$

По аналогичен начин се доказва, че $\boxed{F_{02} = \dfrac{E_y}{c}}$ и $\boxed{F_{03} = \dfrac{E_z}{c}}$.

$$F_{12} = \frac{\partial A_2}{\partial x^1} - \frac{\partial A_1}{\partial x^2} = \frac{\partial(-A_y)}{\partial x} - \frac{\partial(-A_x)}{\partial y} = -\left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right) = \dots \text{ от (**) } \dots \ = -B_z \equiv -(rot\,\vec{A})_z,$$

т.е. $\boxed{F_{12} = -B_z}$.

Аналогично определяме още

$$F_{13}=\frac{\partial A_3}{\partial x^1}-\frac{\partial A_1}{\partial x^3}=\frac{\partial(-A_z)}{\partial x}-\frac{\partial(-A_x)}{\partial z}==-\left(\frac{\partial A_z}{\partial x}-\frac{\partial A_x}{\partial z}\right)\ \ldots \text{ от } (**) \ldots\ =B_y\equiv(rot\,\vec{A})_y\,,$$

т.е. $\boxed{F_{13}=B_y}$.

$$F_{23}=\frac{\partial A_3}{\partial x^2}-\frac{\partial A_2}{\partial x^3}=\frac{\partial(-A_z)}{\partial y}-\frac{\partial(-A_y)}{\partial z}=-\left(\frac{\partial A_z}{\partial y}-\frac{\partial A_y}{\partial z}\right)=\ldots \text{ от } (**) \ldots\ =-B_x\equiv-(rot\,\vec{A})_x\,,$$

т.е. $\boxed{F_{23}=-B_x}$.

И така, определихме всичките 6 на брой **независими** компоненти на **антисиметричния** 4-тензор на ЕМ. Останалите 6 се получават от правилото за антисиметричност $\boxed{F_{\nu\mu}=-F_{\mu\nu}}$, а четирите елемента по главния диагонал са **равни на нула** (*свойство на антисиметричните тензори*). Следователно ковариантният 4-тензор на ЕМ може да се запише в следния **явен вид**

$$(7)\qquad F_{\mu\nu}=\begin{pmatrix}0 & F_{01} & F_{02} & F_{03}\\ -F_{01} & 0 & F_{12} & F_{13}\\ -F_{02} & -F_{12} & 0 & F_{23}\\ -F_{03} & -F_{13} & -F_{23} & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & E_x/c & E_y/c & E_z/c\\ -E_x/c & 0 & -B_z & B_y\\ -E_y/c & B_z & 0 & -B_x\\ -E_z/c & -B_y & B_x & 0\end{pmatrix}.$$

С помощта на правилата за „вдигане” на индекси 4-тензорът на ЕМ поле може да бъде записан и в следната контравариантна форма

$$(8)\qquad F^{\mu\nu}=\begin{pmatrix}0 & -E_x/c & -E_y/c & -E_z/c\\ E_x/c & 0 & -B_z & B_y\\ E_y/c & B_z & 0 & -B_x\\ E_z/c & -B_y & B_x & 0\end{pmatrix},\quad F_{\mu\nu}=\begin{pmatrix}0 & F_{01} & F_{02} & F_{03}\\ -F_{01} & 0 & F_{12} & F_{13}\\ -F_{02} & -F_{12} & 0 & F_{23}\\ -F_{03} & -F_{13} & -F_{23} & 0\end{pmatrix},$$

или накратко $F_{\mu\nu}=\left(\frac{\vec{E}}{c},\vec{B}\right)$ и $F^{\mu\nu}=\left(-\frac{\vec{E}}{c},\vec{B}\right)$.

От (7) и (8) се вижда, че компонентите на векторите на полето $\vec{E}$ и $\vec{B}$ се явяват компоненти на 4-тензора на електромагнитното поле $F_{\mu\nu}$.

✸ **Задача**: Да се определят трансформационните закони за 6-те независими компоненти на антисиметричен 4-тензор $\Phi^{\mu\nu}$ в контравариантен запис.

Решение: ще докажем, че

$$(1)\qquad \left|\begin{array}{l}\Phi^{01}=\Phi^{/\,01}\\ \Phi^{02}=\gamma[\Phi^{/\,02}+\beta.\Phi^{/\,12}]\\ \Phi^{03}=\gamma[\Phi^{/\,03}+\beta.\Phi^{/\,13}]\\ \Phi^{12}=\gamma[\Phi^{/\,12}+\beta.\Phi^{/\,02}]\\ \Phi^{13}=\gamma[\Phi^{/\,13}+\beta.\Phi^{/\,03}]\\ \Phi^{23}=\Phi^{/\,23}\end{array}\right.\qquad \text{където } \Phi^{\mu\nu}=\begin{pmatrix}\Phi^{00} & \Phi^{01} & \Phi^{02} & \Phi^{03}\\ \Phi^{10} & \Phi^{11} & \Phi^{12} & \Phi^{13}\\ \Phi^{20} & \Phi^{21} & \Phi^{22} & \Phi^{23}\\ \Phi^{30} & \Phi^{31} & \Phi^{32} & \Phi^{33}\end{pmatrix},$$

*Първият индекс е индекс на реда, а вторият – на стълба..

За извеждането на тези трансформационни закони се приема (*използва*), че при смяна на ИОС всяка контравариантна компонента на $\Phi^{\mu\nu}$ се трансформира така, както се трансформира произведението от компоненти на два контравариантни 4-вектора. А както е известно трансформациите на Лоренц за контравариантен 4-вектор се дават с равенствата

$$\begin{vmatrix} x^0 = \gamma(x'^0 + \beta . x'^1) \\ x^1 = \gamma(x'^1 + \beta . x'^0) \\ x^2 = x'^2 \\ x^3 = x'^3 \end{vmatrix}, \quad \text{където } \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}} \text{ и } \beta = \frac{V}{c}.$$

Така можем да получим последователно

$$\Phi^{01} \to x^0 x^1 = [\gamma(x'^0 + \beta . x'^1)] \cdot [\gamma(x'^1 + \beta . x'^0)] =$$
$$= \gamma^2 [x'^0 x'^1 + x'^0 \beta . x'^0 + \beta . x'^1 x'^1 + \beta . x'^1 . \beta . x'^0] \to \gamma^2 [\Phi'^{01} + \beta . \Phi'^{00} + \beta . \Phi'^{11} + \beta^2 . \Phi'^{10}] = \ldots$$

….. но за антисиметричен тензор $\Phi^{00} = \Phi^{11} = 0$, и още $\Phi^{10} = -\Phi^{01}$ …….

$$= \gamma^2 [\Phi'^{01} - \beta^2 . \Phi'^{01}] = \Phi'^{01} \gamma^2 [1 - \beta^2] = \Phi'^{01} \left[\frac{1}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}\right]^2 \left[1 - \frac{V}{c}\right]^2 \equiv \Phi'^{01}.$$

$$\Phi^{02} \to x^0 x^2 = [\gamma(x'^0 + \beta . x'^1)] \cdot x'^2 = \gamma[x'^0 \cdot x'^2 + \beta . x'^1 \cdot x'^2] \to \gamma[\Phi'^{02} + \beta . \Phi'^{12}].$$

$$\Phi^{03} \to x^0 x^3 = [\gamma(x'^0 + \beta . x'^1)] \cdot x'^3 = \gamma[x'^0 \cdot x'^3 + \beta . x'^1 \cdot x'^3] \to \gamma[\Phi'^{03} + \beta . \Phi'^{13}].$$

$$\Phi^{12} \to x^1 x^2 = [\gamma(x'^1 + \beta . x'^0)] \cdot x'^2 = \gamma[x'^1 \cdot x'^2 + \beta . x'^0 \cdot x'^2] \to \gamma[\Phi'^{12} + \beta . \Phi'^{02}].$$

$$\Phi^{13} \to x^1 x^3 = [\gamma(x'^1 + \beta . x'^0)] \cdot x'^3 = \gamma[x'^1 \cdot x'^3 + \beta . x'^0 \cdot x'^3] \to \gamma[\Phi'^{13} + \beta . \Phi'^{03}].$$

$$\Phi^{23} \to x^2 x^3 = x'^2 \cdot x'^3 \to \Phi'^{23}.$$

✸ **Задача**: Да се определят трансформационните закони за компонентите на симетричен 4-тензор $\Phi^{\mu\nu}$ в контравариантен запис.

Решение:

За извеждането на трансформационните закони за 10-те независими компоненти на симетричен четиритензор $\Phi^{\mu\nu} = \Phi^{\nu\mu}$ отново използваме, че при смяна на ИОС всяка контравариантна компонента на $\Phi^{\mu\nu}$ се трансформира така, както се трансформира произведението от компоненти на два контравариантни 4-вектора. Така получаваме последователно:

☞ $$\Phi^{00} \to x^0 x^0 = [\gamma(x'^0 + \beta . x'^1)] \cdot [\gamma(x'^0 + \beta . x'^1)] =$$
$$= \gamma^2 (x'^0 x'^0 + 2\beta . x'^0 x'^1 + \beta^2 x'^1 x'^1) \to \gamma^2 (\Phi'^{00} + 2\beta . \Phi'^{01} + \beta^2 \Phi'^{11});$$

☞ $$\Phi^{01} \to x^0 x^1 = [\gamma(x'^0 + \beta . x'^1)] \cdot [\gamma(x'^1 + \beta . x'^0)] =$$
$$= \gamma^2 [x'^0 x'^1 + x'^0 \beta x'^0 + \beta x'^1 x'^1 + \beta x'^1 . \beta x'^0] \to \gamma^2 [\Phi'^{01} + \beta \Phi'^{00} + \beta \Phi'^{11} + \beta^2 \Phi'^{10}] =$$

… *за симетричен тензор* $\Phi^{10} = \Phi^{01}$ …

$$= \gamma^2 [\Phi'^{01} + \beta^2 \Phi'^{01} + \beta \Phi'^{00} + \beta \Phi'^{11}] = \gamma^2 [(1 + \beta^2) \Phi'^{01} + \beta(\Phi'^{00} + \Phi'^{11})].$$

☞ $$\Phi^{02} \to x^0 x^2 = [\gamma(x'^0 + \beta x'^1)] \cdot x'^2 = \gamma[x'^{01} \cdot x'^2 + \beta x'^1 \cdot x'^2] \to \gamma[\Phi'^{02} + \beta \Phi'^{12}].$$

☞ $\Phi^{03} \to x^0 x^3 = [\gamma(x'^0 + \beta x'^1)] \cdot x'^3 = \gamma[x'^0 \cdot x'^3 + \beta x'^1 \cdot x'^3] \to \gamma[\Phi'^{03} + \beta \Phi'^{13}]$.

☞ $\Phi^{11} \to x^1 x^1 = [\gamma(x'^1 + \beta . x'^0)] \cdot [\gamma(x'^1 + \beta x'^0)] =$
$= \gamma^2 [x'^1 \cdot x'^1 + \beta x'^1 \cdot x'^0 + \beta x'^0 \cdot x'^1 + \beta^2 x'^0 \cdot x'^0] \to$
$\to \gamma^2 [\Phi'^{11} + \beta \Phi'^{10} + \beta \Phi'^{01} + \beta^2 \Phi'^{00}] = \gamma^2 [\Phi'^{11} + 2\beta \Phi'^{01} + \beta^2 \Phi'^{00}]$.

☞ $\Phi^{12} \to x^1 x^2 = [\gamma(x'^1 + \beta x'^0)] \cdot x'^2 = \gamma[x'^1 \cdot x'^2 + \beta x'^0 \cdot x'^2] \to \gamma[\Phi'^{12} + \beta \Phi'^{02}]$.

☞ $\Phi^{13} \to x^1 x^3 = [\gamma(x'^1 + \beta x'^0)] \cdot x'^3 = \gamma[x'^1 \cdot x'^3 + \beta x'^0 \cdot x'^3] \to \gamma[\Phi'^{13} + \beta . \Phi'^{03}]$.

☞ $\Phi^{22} \to x^2 x^2 = x'^2 \cdot x'^2 \to \Phi'^{22}$

☞ $\Phi^{23} \to x^2 x^3 = x'^2 \cdot x'^3 \to \Phi'^{23}$.

☞ $\Phi^{33} \to x^3 x^3 = x'^3 \cdot x'^3 \to \Phi'^{33}$.

✸ **Задача** Да се определят трансформационните закони за скаларния φ и векторния $\vec{A}$ потенциали.

Решение: нека за целта приложим законите за лоренцовите трансформации на 4-вектор

$$A^0 = \gamma(A'^0 + \beta A'^1);$$
$$(1) \qquad A^1 = \gamma(A'^1 + \beta A'^0);$$
$$A^2 = A'^2;$$
$$A^3 = A'^3.$$

спрямо компонентите на 4-потенциала $A^\mu = (A^0, \vec{A})$, където

☞ $A^0 = \dfrac{\varphi}{c}$, където φ **- скаларен потенциал на ЕМ поле**;

☞ $\vec{A}$ **- магнитен векторен потенциал на ЕМ поле.**

Така получаваме последователно:

(2.а) $\dfrac{\varphi}{c} = \gamma\left(\dfrac{\varphi'}{c} + \dfrac{V}{c} A'_x\right)$, т.е. $\varphi = \dfrac{\varphi' + V A'_x}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}$,

(2.б) $A_x = \gamma\left(A'_x + \dfrac{V}{c}\dfrac{\varphi'}{c}\right)$, т.е. $A_x = \dfrac{A'_x + \dfrac{V}{c^2}\varphi'}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}$,

(2.в) $A_y = A'_y$, и

(2.г) $A_z = A'_z$.

Чрез формална замяна на „примовани" с „непримовани" величини, както и на V със $-V$ се получават и „обратните" преобразования за потенциалите.

✸ **Задача:** да се определят трансформационните закони за 4-вектора на плътността на тока.

Решение: по определение този 4-вектор се изразява посредством обемната плътност на електричните заряди ρ и 4-радиус-вектора X^{μ} с равенството

(1) $$j^{\mu} = \rho \frac{dX^{\mu}}{dt},$$

или още в следния явен вид

(2) $$j^{\mu} = (\rho.c,\ \vec{j}\,),$$

където $\vec{j} = \rho.\vec{V}$ е класическият (*тримерен*) вектор на плътността на тока, имащ компоненти $\vec{j}\,(\rho.V_x,\ \rho.V_y,\ \rho.V_z)$.

Нека за целта приложим законите за лоренцови трансформации на 4-вектор

(2) $$\begin{aligned} A^0 &= \gamma(A'^0 + \beta A'^1); \\ A^1 &= \gamma(A'^1 + \beta A'^0); \\ A^2 &= A'^2; \\ A^3 &= A'^3. \end{aligned}$$

спрямо компонентите на 4-вектора на плътността на тока $j^{\mu} = (\rho.c,\ \vec{j}\,)$. Така получаваме последователно:

(3.а) $$\rho.c = \gamma\left(\rho'.c + \frac{V}{c} j'_x\right), \quad \text{т.е.} \quad \rho = \frac{\rho' + \frac{V}{c^2} j'_x}{\sqrt{1 - V^2/c^2}},$$

(3.б) $$j_x = \gamma\left(j'_x + \frac{V}{c}(\rho'.c)\right), \quad \text{т.е.} \quad j_x = \frac{j'_x + V.\rho'}{\sqrt{1 - V^2/c^2}},$$

(3.в) $$j_y = j'_y, \quad \text{и}$$

(3.г) $$j_z = j'_z.$$

Чрез формална замяна на „примовани” с „непримовани” величини, както и на V със $-V$ се получават и „обратните” преобразования за този 4-вектор.

✸ **Задача**: да се определят трансформационните закони при преобразование на Лоренц за векторите на полето $\vec{E}$ и $\vec{B}$.

Решение: както вече бе споменато, трансформационните закони за векторите на полето $\vec{E}$ и $\vec{B}$ могат да бъдат получени с помощта на трансформационни закони на 4-тензори. Тъй като компонентите на векторите $\vec{E}$ и $\vec{B}$ участват в 4-тензора на електромагнитното поле, логично е да се опитаме да получим трансформациите на Лоренц за векторите на полето с помощта на трансформационните закони за антисиметричния 4-тензор на електромагнитното поле $F_{\mu\nu}$.

Ще използваме получените вече (*в предишна задача*) трансформационни закони за 6-те независими компоненти на антисиметричен 4-тензор $F^{\mu\nu}$ в контравариантен запис:

$$(1)\quad \left|\begin{array}{l} F^{01}=F^{/\,01} \\ F^{02}=\gamma[F^{/\,02}+\beta.F^{/\,12}] \\ F^{03}=\gamma[F^{/\,03}+\beta.F^{/\,13}] \\ F^{12}=\gamma[F^{/\,12}+\beta.F^{/\,02}] \\ F^{13}=\gamma[F^{/\,13}+\beta.F^{/\,03}] \\ F^{23}=F^{/\,23} \end{array}\right.$$

където $F^{\mu\nu}=\begin{pmatrix} F^{00} & F^{01} & F^{02} & F^{03} \\ F^{10} & F^{11} & F^{12} & F^{13} \\ F^{20} & F^{21} & F^{22} & F^{23} \\ F^{30} & F^{31} & F^{32} & F^{33} \end{pmatrix}$,

като първият индекс е индекс на реда, а вторият – на стълба.

Ако вземем под внимание, че

$$(2)\, F^{\mu\nu}=\begin{pmatrix} 0 & -E_x/c & -E_y/c & -E_z/c \\ E_x/c & 0 & -B_z & B_y \\ E_y/c & B_z & 0 & -B_x \\ E_z/c & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix} \text{ и } F^{/\mu\nu}=\begin{pmatrix} 0 & -E_x^{/}/c & -E_y^{/}/c & -E_z^{/}/c \\ E_x^{/}/c & 0 & -B_z^{/} & B_y^{/} \\ E_y^{/}/c & B_z^{/} & 0 & -B_x^{/} \\ E_z^{/}/c & -B_y^{/} & B_x^{/} & 0 \end{pmatrix},$$

то от 6-те трансформационни закона (1) се получават следните 6 равенствата

❶ $F^{01}=F^{/\,01} \;\Rightarrow\; E_x/c=E_x^{/}/c$, т.е.

(3) $\boxed{E_x=E^{/}{}_x}$.

❷ $F^{02}=\gamma[F^{/\,02}+\beta.F^{/\,12}] \;\Rightarrow\; -\dfrac{E_y}{c}=\gamma\left\{\left[-\dfrac{E^{/}{}_y}{c}\right]+\dfrac{V}{c}.[-B^{/}{}_z]\right\}$ $\quad\left|\cdot(-c)\right.$, т.е.

(4) $\boxed{E_y=\gamma\,(E^{/}{}_y+V.B^{/}{}_z)}$.

❸ $F^{03}=\gamma[F^{/\,03}+\beta.F^{/\,13}] \;\Rightarrow\; -\dfrac{E_z}{c}=\gamma\left\{\left[-\dfrac{E^{/}{}_z}{c}\right]+\dfrac{V}{c}.B^{/}{}_y\right\}$ $\quad\left|\cdot(-c)\right.$, т.е.

(5) $\boxed{E_z=\gamma\,(E^{/}{}_z-V.B^{/}{}_y)}$.

❹ $F^{12}=\gamma[F^{/\,12}+\beta.F^{/\,02}] \;\Rightarrow\; -B_z=\gamma\left\{-B^{/}{}_z+\dfrac{V}{c}.\left[-\dfrac{E^{/}{}_y}{c}\right]\right\}$ $\quad\left|\cdot(-1)\right.$, т.е.

(6) $\boxed{B_z=\gamma\left\{B^{/}{}_z+\dfrac{V}{c^2}.E^{/}{}_y\right\}}$.

❺ $F^{13}=\gamma[F^{/\,13}+\beta.F^{/\,03}] \;\Rightarrow\; B_y=\gamma\left\{B^{/}{}_y+\dfrac{V}{c}\left[-\dfrac{E^{/}{}_z}{c}\right]\right\}$, т.е.

(7) $\boxed{B_y=\gamma\left\{B^{/}{}_y-\dfrac{V}{c^2}.E^{/}{}_z\right\}}$.

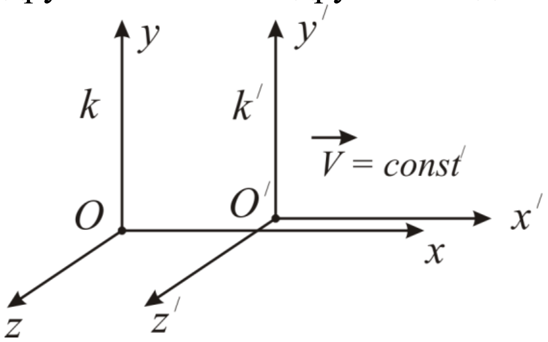
❻ $F^{23}=F^{/\,23} \;\Rightarrow\; -B_x=-B^{/}{}_x$, т.е.

(8) $\boxed{B_x=B^{/}{}_x}$.

И така, трансформациите на Лоренц за векторите на електромагнитното поле имат вида:

$$(9)\quad \begin{cases} E_x = E'_x, \\ E_y = \gamma\,(E'_y + V.B'_z) \equiv \dfrac{E'_y + V.B'_z}{\sqrt{1-V^2/c^2}}, \\ E_z = \gamma\,(E'_z - V.B'_y) \equiv \dfrac{E'_z - V.B'_y}{\sqrt{1-V^2/c^2}}. \end{cases} \qquad \begin{cases} B_x = B'_x, \\ B_y = \gamma\left\{B'_y - \dfrac{V}{c^2}.E'_z\right\} \equiv \dfrac{B'_y - \dfrac{V}{c^2}.E'_z}{\sqrt{1-V^2/c^2}}, \\ B_z = \gamma\left\{B'_z + \dfrac{V}{c^2}.E'_y\right\} \equiv \dfrac{B'_z + \dfrac{V}{c^2}.E'_y}{\sqrt{1-V^2/c^2}}. \end{cases}$$

***Допълнение:** Трансформациите на Лоренц (9) показват **единната природа на електромагнитното поле**, но разкриват и една негова важна **особеност** - **ЕМ поле е относително**, т.е. то има една стойност за един наблюдател (*една ИОС*) и друга стойност за друг наблюдател (*друга ИОС*).



Тъй като формули (9) са изведени за случая на т.нар. **специални трансформации** на Лоренц, за които скоростта на системата K' спрямо системата K е $\vec{V} = (V,0,0)$, то очевидно могат да се въведат **успоредни** ($\parallel$) и **перпендикулярни** ($\perp$) на $\vec{V}$ „компоненти” на полевите вектори $\vec{E}$ и $\vec{B}$, а именно

$\vec{E}_\parallel = (E_x,0,0)$ и $\vec{E}_\perp = (0,E_y,E_z)$, като $\boxed{\vec{E} = \vec{E}_\parallel + \vec{E}_\perp}$;

$\vec{B}_\parallel = (B_x,0,0)$ и $\vec{B}_\perp = (0,B_y,B_z)$, като $\boxed{\vec{B} = \vec{B}_\parallel + \vec{B}_\perp}$.

Очевидно същото представяне по ($\parallel$) и ($\perp$) спрямо $\vec{V}$ „компоненти” може да се приложи и в ИОС K', т.е за „*примованите*” координати.

$\vec{E}'_\parallel = (E'_x,0,0)$ и $\vec{E}'_\perp = (0,E'_y,E'_z)$, като $\vec{E}' = \vec{E}'_\parallel + \vec{E}'_\perp$;

$\vec{B}'_\parallel = (B'_x,0,0)$ и $\vec{B}'_\perp = (0,B'_y,B'_z)$, като $\vec{B}' = \vec{B}'_\parallel + \vec{B}'_\perp$.

Лесно може да се установи, че компонентите на векторното произведение $\vec{V}\times\vec{E}$ и $\vec{V}\times\vec{B}$ са

$$(*)\qquad \vec{V}\times\vec{E} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ V & 0 & 0 \\ E_x & E_y & E_z \end{vmatrix} = 0.\vec{i} + (-VE_z)\,\vec{j} + (VE_y)\,\vec{k}\,, \quad \text{и}$$

$$(**)\qquad \vec{V}\times\vec{B} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ V & 0 & 0 \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix} = 0.\vec{i} + (-VB_z)\,\vec{j} + (VB_y)\,\vec{k}\,.$$

С отчитането на (*) и (**) трансформационните закони (9) могат да се представят още във вида

$$(9^{/})\quad \left|\begin{array}{l} E_x = E^{/}{}_x, \\ E_y = \gamma\ (E^{/}{}_y - (\vec{V}\times\vec{B}^{\,/})_z) \\ E_z = \gamma\ (E^{/}{}_z - (\vec{V}\times\vec{B}^{\,/})_y); \quad и \\ B_x = B^{/}{}_x, \\ B_y = \gamma\left\{B^{/}{}_y + \dfrac{1}{c^2}.(\vec{V}\times\vec{E}^{\,/})_z\right\}, \\ B_z = \gamma\left\{B^{/}{}_z + \dfrac{1}{c^2}.(\vec{V}\times\vec{E}^{\,/})_y\right\}. \end{array}\right.$$

Ако запишем трансформациите на Лоренц ($9^{/}$) с помощта на така въведените ($\|$) и ($\perp$) „компоненти”, то те ще имат вида на следните векторни равенства

$$(10)\quad \left|\begin{array}{l} \vec{E}_{\|} = \vec{E}^{\,/}{}_{\|} \\ \vec{E}_{\perp} = \gamma[\vec{E}^{\,/}{}_{\perp} - \vec{V}\times\vec{B}^{\,/}{}_{\perp}] \end{array}\right. \quad и \quad \left|\begin{array}{l} \vec{B}_{\|} = \vec{B}^{\,/}{}_{\|} \\ \vec{B}_{\perp} = \gamma\left(\vec{B}^{\,/}{}_{\perp} + \dfrac{1}{c^2}[\vec{V}\times\vec{E}^{\,/}{}_{\perp}]\right) \end{array}\right. .$$

Вижда се, че при смяна на ИОС „компонентите” $\vec{E}_{\|}$ и $\vec{B}_{\|}$, които са насочени по посока на скоростта $\vec{V}$, **не се изменят**.

✸ **Задача:** да се докаже следното (*неочевидно*) **свойство** на ЕМ поле: ако напр. спрямо „подвижна” система $K^{/}$ полето е само (т.е. „*чисто*”) електрично ($\vec{B}^{\,/} = 0$), или само (т.е. „*чисто*”) магнитно ($\vec{E}^{\,/} = 0$), то и в двата случая относно някаква „неподвижна” координатна система K електричното и магнитното полета са взаимно перпендикулярни, т.е. $\vec{E} \perp \vec{B}$.

Доказателство:

1.) Допускаме, че полето в $K^{/}$ е **само електрично**, т.е. че $\vec{B}^{\,/} = 0$. Това ще означава, че $\vec{B}^{\,/}{}_{\|} = 0$ и $\vec{B}^{\,/}{}_{\perp} = 0$. Тогава от формули (10) от допълнението към предната задача ще имаме

$$(1)\quad \left|\begin{array}{l} \vec{E}_{\|} = \vec{E}^{\,/}{}_{\|} \\ \vec{E}_{\perp} = \gamma\,\vec{E}^{\,/}{}_{\perp} \end{array}\right. \quad и \quad (2)\quad \left|\begin{array}{l} \vec{B}_{\|} = 0 \\ \vec{B}_{\perp} = \gamma\dfrac{1}{c^2}[\vec{V}\times\vec{E}^{\,/}{}_{\perp}] \end{array}\right. .$$

Ако изразим $\vec{E}^{\,/}{}_{\perp} = \dfrac{\vec{E}_{\perp}}{\gamma}$ и заместим в израза (2) за $\vec{B}_{\perp}$, ще получим

$$(3)\qquad \vec{B}_{\perp} = \gamma\frac{1}{c^2}[\vec{V}\times\vec{E}^{\,/}{}_{\perp}] = \gamma\frac{1}{c^2}[\vec{V}\times\frac{\vec{E}_{\perp}}{\gamma}] = \frac{1}{c^2}[\vec{V}\times\vec{E}_{\perp}].$$

Тогава, отчитайки че $\vec{B}_{\|} = 0$, ще имаме

$$(4)\qquad \vec{B} = \vec{B}_{\|} + \vec{B}_{\perp} = \frac{1}{c^2}[\vec{V}\times\vec{E}_{\perp}] + 0 = \frac{1}{c^2}[\vec{V}\times\vec{E}_{\perp}] = \frac{1}{c^2}[\vec{V}\times(\vec{E}_{\perp} + \vec{E}_{\|})] = \frac{1}{c^2}[\vec{V}\times\vec{E}],$$

понеже $\vec{V}\times\vec{E}_{\|} = 0$, откъдето следва, че действително $\vec{B} \perp \vec{E}$.

2.) Аналогично, допускаме, че полето в $K^{/}$ е **само магнитно**, т.е. че $\vec{E}^{\,/} = 0$. Това ще означава, че $\vec{E}^{\,/}{}_{\|} = 0$ и $\vec{E}^{\,/}{}_{\perp} = 0$. Тогава от формули (10) от допълнението към предната задача ще имаме

(5) $\begin{vmatrix} \vec{E}_{\|} = 0 \\ \vec{E}_{\perp} = -\gamma[\vec{V} \times \vec{B}'_{\perp}] \end{vmatrix}$ и (6) $\begin{vmatrix} \vec{B}_{\|} = \vec{B}'_{\|} \\ \vec{B}_{\perp} = \gamma \vec{B}'_{\perp} \end{vmatrix}$.

Ако изразим $\vec{B}'_{\perp} = \dfrac{\vec{B}_{\perp}}{\gamma}$ и заместим в израза (5) за $\vec{E}_{\perp}$, ще получим

(7) $$\vec{E}_{\perp} = -\gamma[\vec{V} \times \vec{B}'_{\perp}] = -\gamma[\vec{V} \times \frac{\vec{B}_{\perp}}{\gamma}] = -[\vec{V} \times \vec{B}_{\perp}].$$

Тогава, отчитайки че $\vec{E}_{\|} = 0$, ще имаме

(8) $$\vec{E} = \vec{E}_{\|} + \vec{E}_{\perp} = 0 - [\vec{V} \times \vec{B}_{\perp}] \equiv -[\vec{V} \times \vec{B}_{\perp}] = -[\vec{V} \times (\vec{B}_{\perp} + \vec{B}_{\|})] = -[\vec{V} \times \vec{B}],$$

понеже $\vec{V} \times \vec{B}_{\|} = 0$, откъдето отново следва, че действително $\vec{E} \perp \vec{B}$.

В сила е и твърдение, обратно на току-що доказаното, а именно: ако относно някаква система K полевите вектори $\vec{E}$ и $\vec{B}$ са взаимно перпендикулярни ($\vec{E} \perp \vec{B}$), **но не равни по големина**, то съществува такава система K', спрямо която полето е **само електрично** ($\vec{B}' = 0$), или **само магнитно** ($\vec{E}' = 0$).

✸ **Задача** (зад. 343/стр.54) Да се определят потенциалите φ, $\vec{A}$ и векторите на полето $\vec{E}$ и $\vec{B}$ на **равномерно праволинейно движещ се** заряд q.

Решение:

В КС (K'), свързана със заряда, потенциалите са известни, и те са потенциали на неподвижен (спрямо K') точков заряд:

(1) $$\varphi'(r') = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r'};$$

(2) $\vec{A}'(r') = 0$, където

(3) $r' = \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}$ - радиус-вектор в K'.

Сега ще „прехвърлим" разглежданията в КС (K), спрямо която зарядът се движи със скорост $\vec{V}$ по направление на оста $O\vec{x}$. Нека за целта приложим законите за лоренцови трансформации на 4-вектор

(4) $$\begin{aligned} A^0 &= \gamma(A'^0 + \beta A'^1); \\ A^1 &= \gamma(A'^1 + \beta A'^0); \\ A^2 &= A'^2; \\ A^3 &= A'^3. \end{aligned}$$

спрямо компонентите на 4-потенциала $A^{\mu} = (A^0, \vec{A})$, където

☞ $A^0 = \dfrac{\varphi}{c}$, където φ - **скаларен потенциал на ЕМ поле**;

☞ $\vec{A}$ - **магнитен векторен потенциал на ЕМ поле.**

Така получаваме:

$$\frac{\varphi}{c} = \gamma\left(\frac{\varphi'}{c} + \frac{V}{c}A'_x\right), \quad \text{т.е.} \quad \varphi = \frac{\varphi' + V A'_x}{\sqrt{1 - V^2/c^2}},$$

(5) $$A_x = \gamma\left(A'_x + \frac{V}{c}\frac{\varphi'}{c}\right), \quad \text{т.е.} \quad A_x = \frac{A'_x + \dfrac{V}{c^2}\varphi'}{\sqrt{1 - V^2/c^2}},$$

$$A_y = A'_y,$$

$$A_z = A'_z.$$

Тъй като $A'_x = A'_y = A'_z = 0$, то четирите равенства (5) добиват вида:

$$\varphi = \frac{\varphi'}{\sqrt{1 - V^2/c^2}} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r'.\sqrt{1 - V^2/c^2}},$$

(6) $$A_x = \frac{\dfrac{V}{c^2}\varphi'}{\sqrt{1 - V^2/c^2}} = \frac{V}{c^2}\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r'.\sqrt{1 - V^2/c^2}},$$

$$A_y = 0, \qquad A_z = 0.$$

Остава (*чрез* ***<u>обратно</u>*** *преобразование на Лоренц*) да изразим x', y', z' чрез x, y, z. Използвайки трансформационния закон за 4-радиус-вектор

(7) $x'^0 = \gamma(x^0 - \beta x^1)$; $\quad x'^1 = \gamma(x^1 + \beta x^0)$; $\quad x'^2 = x^2$; $\quad x'^3 = x^3$, т.е. $x' = \dfrac{x - V.t}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}$, $\quad y' = y$, $\quad z' = z$, получаваме

(8) $$r' = \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2} = \sqrt{\left(\frac{x - V.t}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}\right)^2 + y^2 + z^2} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}\sqrt{(x - V.t)^2 + (y^2 + z^2)(1 - V^2/c^2)}.$$

Заместваме с така намереното представяне (8) за r' в (6), и получаваме

$$\varphi = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0.\sqrt{1 - V^2/c^2}\,\dfrac{1}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}\sqrt{(x - V.t)^2 + (y^2 + z^2)(1 - V^2/c^2)}},$$

$$A_x = \frac{V}{c^2}\frac{q}{4\pi\varepsilon_0.\sqrt{1 - V^2/c^2}\,\dfrac{1}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}\sqrt{(x - V.t)^2 + (y^2 + z^2)(1 - V^2/c^2)}},$$

$$A_y = 0, \quad A_z = 0,$$

или още:

$$\varphi = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0.\sqrt{(x - V.t)^2 + (y^2 + z^2)(1 - V^2/c^2)}},$$

(9) $$A_x = \frac{V}{c^2}\frac{q}{4\pi\varepsilon_0.\sqrt{(x - V.t)^2 + (y^2 + z^2)(1 - V^2/c^2)}} \equiv \frac{V}{c^2}\varphi,$$

$$A_y = 0, \quad A_z = 0, \quad \text{т.е.} \quad \vec{A} = \left(\frac{V}{c^2}\varphi, 0, 0\right).$$

Сега можем, при намерени вече потенциали, да определим и компонентите на електричния и магнитния вектори на полето на движещ се заряд:

$$(10)\qquad \vec{E}=-\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}-grad\,\varphi \quad \text{и} \quad \vec{B}=rot\ \vec{A},$$

или по компоненти

$$(11)\qquad E_x=-\ \frac{\partial\varphi}{\partial x}-\frac{\partial A_x}{\partial t}, \qquad E_y=-\ \frac{\partial\varphi}{\partial y}-\frac{\partial A_y}{\partial t}, \qquad E_z=-\ \frac{\partial\varphi}{\partial z}-\frac{\partial A_z}{\partial t}.$$

$$(12)\qquad \vec{B}=rot\ \vec{A}\equiv\nabla\times\vec{A}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ A_x & A_y & A_z\end{vmatrix}\ , \text{ т.е.}$$

$$(13)\qquad \begin{aligned} B_x&=\frac{\partial A_z}{\partial y}-\frac{\partial A_y}{\partial z},\\ B_y&=\frac{\partial A_x}{\partial z}-\frac{\partial A_z}{\partial x},\\ B_z&=\frac{\partial A_y}{\partial x}-\frac{\partial A_x}{\partial y}.\end{aligned}$$

А) Намиране компонентите на електричното поле:

$$E_x=-\ \frac{\partial\varphi}{\partial x}-\frac{\partial A_x}{\partial t}=-\ \frac{\partial}{\partial x}\varphi-\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{V}{c^2}\varphi\right)=-\ \frac{\partial}{\partial x}[\varphi]-\frac{V}{c^2}\frac{\partial}{\partial t}[\varphi]=$$

$$=-\ \frac{\partial}{\partial x}\frac{q}{4\pi\varepsilon_0.\sqrt{(x-V.t)^2+(y^2+z^2)(1-V^2/c^2)}}-$$

$$-\frac{V}{c^2}\frac{\partial}{\partial t}\frac{q}{4\pi\varepsilon_0.\sqrt{(x-V.t)^2+(y^2+z^2)(1-V^2/c^2)}}=$$

$$=-\ \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\partial}{\partial x}\frac{1}{\sqrt{(x-V.t)^2+(y^2+z^2)(1-V^2/c^2)}}-$$

$$-\frac{V}{c^2}\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\partial}{\partial t}\frac{1}{\sqrt{(x-V.t)^2+(y^2+z^2)(1-V^2/c^2)}}=$$

$$=-\ \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(-\frac{1}{2}\right)\frac{2.(x-V.t)}{\left((x-V.t)^2+(y^2+z^2)(1-V^2/c^2)\right)^{3/2}}-$$

$$-\frac{V}{c^2}\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(-\frac{1}{2}\right)\frac{2.(x-V.t)(-V)}{\left((x-V.t)^2+(y^2+z^2)(1-V^2/c^2)\right)^{3/2}}=$$

$$=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{(x-V.t)}{\left((x-V.t)^2+(y^2+z^2)(1-V^2/c^2)\right)^{3/2}}-$$

$$-\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\dfrac{V}{c^2}(x-V.t).V}{\left((x-V.t)^2+(y^2+z^2)(1-V^2/c^2)\right)^{3/2}}=$$

$$=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{(x-V.t)\left(1-\dfrac{V^2}{c^2}\right)}{\left((x-V.t)^2+(y^2+z^2)(1-V^2/c^2)\right)^{3/2}}.\ \text{ И така}$$

$$(14)\qquad E_x = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{(x-V.t)(1-V^2/c^2)}{\left((x-V.t)^2+(y^2+z^2)(1-V^2/c^2)\right)^{3/2}}\,.$$

Аналогично, отчитайки, че $A_y = 0$, получаваме

$$E_y = -\frac{\partial\varphi}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial t} \equiv -\frac{\partial\varphi}{\partial y} = -\frac{\partial}{\partial y}\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 .\sqrt{(x-V.t)^2+(y^2+z^2)(1-V^2/c^2)}} =$$

$$= -\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(-\frac{1}{2}\right)\frac{2y(1-V^2/c^2)}{\sqrt{(x-V.t)^2+(y^2+z^2)(1-V^2/c^2)}}\text{, т.е.}$$

$$(15)\qquad E_y = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{y(1-V^2/c^2)}{\sqrt{(x-V.t)^2+(y^2+z^2)(1-V^2/c^2)}}\,;$$

и (по пълна аналогия, понеже $A_z = 0$) ще следва, че

$$(16)\quad E_z = -\frac{\partial\varphi}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial t} \equiv -\frac{\partial\varphi}{\partial z} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{z(1-V^2/c^2)}{\sqrt{(x-V.t)^2+(y^2+z^2)(1-V^2/c^2)}}\,.$$

Понеже $\vec{V} = (V,0,0)$, то $\vec{r} - \vec{V}.t = (x - V.t, y, z)$, и следователно покомпонентните скаларни представяния (14), (15) и (16) могат да се обобщят в следното векторно представяне

$$(17)\qquad \vec{E} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{(\vec{r}-\vec{V}.t)(1-V^2/c^2)}{\left((x-V.t)^2+(y^2+z^2)(1-V^2/c^2)\right)^{3/2}}\,.$$

Б) Остана да определим и компонентите на магнитния вектор от равенства (13), отчитайки, че $A_x = \frac{V}{c^2}\varphi$, $A_y = 0$ и $A_z = 0$:

$$(18)\qquad B_x = \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \equiv 0\,.$$

$$B_y = \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \equiv \frac{\partial A_x}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{V}{c^2}\varphi\right) = \frac{V}{c^2}\frac{\partial}{\partial z}\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{\sqrt{(x-V.t)^2+(y^2+z^2)(1-V^2/c^2)}} =$$

$$= \frac{V}{c^2}\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(-\frac{1}{2}\right)\frac{2z.(1-V^2/c^2)}{\sqrt{(x-V.t)^2+(y^2+z^2)(1-V^2/c^2)}} =$$

$$= -\frac{V}{c^2}\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{z.(1-V^2/c^2)}{\sqrt{(x-V.t)^2+(y^2+z^2)(1-V^2/c^2)}} = -\frac{V}{c^2}E_z\,.$$

И така

$$(19)\qquad B_y = -\frac{V}{c^2}\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{z.(1-V^2/c^2)}{\sqrt{(x-V.t)^2+(y^2+z^2)(1-V^2/c^2)}} = -\frac{V}{c^2}E_z\,.$$

Накрая определяме и B_z:

$$B_z = \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \equiv -\frac{\partial A_x}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{V}{c^2}\varphi\right) = -\frac{V}{c^2}\frac{\partial}{\partial y}\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{\sqrt{(x-V.t)^2+(y^2+z^2)(1-V^2/c^2)}} =$$

$$= -\frac{V}{c^2}\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(-\frac{1}{2}\right)\frac{2y(1-V^2/c^2)}{\sqrt{(x-V.t)^2+(y^2+z^2)(1-V^2/c^2)}} = \frac{V}{c^2}\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{y(1-V^2/c^2)}{\sqrt{(x-V.t)^2+(y^2+z^2)(1-V^2/c^2)}}$$

(20) $$B_z = \frac{V}{c^2}\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{y.(1-V^2/c^2)}{\sqrt{(x-V.t)^2+(y^2+z^2)(1-V^2/c^2)}} = \frac{V}{c^2}E_y .$$

Ако и тук обобщим представянето във векторен вид, ще имаме

(21) $$\vec{B} = \left(0, -\frac{V}{c^2}E_z, \frac{V}{c^2}E_y\right) \equiv \frac{1}{c^2}(0, -VE_z, VE_y).$$

Забелязваме, че понеже $\vec{V} = (V, 0, 0)$, то

(22) $$\vec{V}\times\vec{E} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ V & 0 & 0 \\ E_x & E_y & E_z \end{vmatrix} = 0\vec{i} + (-VE_z)\,\vec{j} + (VE_y)\vec{k} = (0, -VE_z, VE_y),$$

т.е. същото, както (21), но без множителя $\frac{1}{c^2}$, и тогава очевидно ще бъде в сила релацията

(23) $$\vec{B} = \frac{1}{c^2}(\vec{V}\times\vec{E}) \equiv \frac{\vec{V}\times\vec{E}}{c^2}.$$