т.е. че 4-векторите A^μ и B^μ ($\mu = 0,1,2,3$) са колинеарни както в K, така и в $K^/$, с което доказахме, че действително свойството „колинеарност” е инвариантно свойство за 4-вектори.

Тема: Релативистична електродинамика

❖ Теоретичен минимум

📖 **4-скорост:** $u^\mu = \dfrac{dX^\mu}{d\tau}$, 1, 2, 3, където

☞ $d\tau = dt\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}$ - собствено време,

☞ $X^\mu = (ct,\, \vec{r})$ - **4-радиус-вектор.**

✓ $u = (u^0, \vec{u}) = \left(\dfrac{c}{\sqrt{1-\dfrac{V^2}{c^2}}}, \dfrac{\vec{V}}{\sqrt{1-\dfrac{V^2}{c^2}}} \right)$, ✓ $u^2 = u_\mu u^\mu = c^2$.

📖 **4-вектор „енергия-импулс” (4-импулс):**

✓ $P^\mu = m_0 . u^\mu$, $\mu = 0, 1, 2, 3$ ✓ $P = (p^0, \vec{p})$,

✓ $P = \left(\dfrac{E}{c}, \vec{p} \right)$, където ✓ $\vec{p} = \dfrac{m_0 \vec{V}}{\sqrt{1-\dfrac{V^2}{c^2}}} = \gamma . m_0 \vec{V}$.

✓ $P^2 = (P^0)^2 - \vec{p}^2 = \dfrac{E^2}{c^2} - \vec{p}^2 = m_0^2 c^2 \equiv inv$ - скаларен квадрат.

✓ $E = \sqrt{p^2 c^2 + m_0^2 c^4}$.

📖 **Енергия на релативистка частица**:

✓ $E = \dfrac{m_0 . c^2}{\sqrt{1 - V^2/c^2}} = \gamma . m_0 . c^2 = \dfrac{E_0}{\sqrt{1-V^2/c^2}} = \gamma . E_0$, ✓ $E_0 = m_0 . c^2$.

✓ $m = \dfrac{m_0}{\sqrt{1-\dfrac{V^2}{c^2}}} = \gamma . m_0$ - **релативистична маса** на частица, **зависеща от скоростта** $\vec{v}$**,** с която тя се движи, а m_0 - маса в покой.

✓ $E = T + m_0 c^2$**,** ✓ $T = E - m_0 c^2 = (\gamma - 1) m_0 c^2 \equiv (\gamma - 1) E_0$**.**

✓ **Сила на Лоренц:** $\dfrac{d\vec{p}}{dt} = q\vec{E} + q.(\vec{V} \times \vec{B})$.

📖 **Полезни съотношения**:

✓ $p = \dfrac{1}{c}\sqrt{T(T + 2m_0 c^2)}$;

✓ $\vec{v} = \dfrac{c\,\vec{p}}{\sqrt{p^2 + m_0^2 c^2}}$;

✓ $v = c\sqrt{1 - \dfrac{m_0^2 c^4}{E^2}} = c\sqrt{1 - \dfrac{E_0^2}{E^2}}$

Енергия E_γ и импулс p_γ на γ-квант (*фотон*):

✓ $E_\gamma = \hbar\omega$, ✓ $p_\gamma = \dfrac{E_\gamma}{c} = \dfrac{\hbar\omega}{c} = \hbar k$.

✵ **Задача:** Да се докаже представянето $E = m_0\,c^2 + T$.

Доказателство:

По определение:

(1) $$E = \frac{m_0\,c^2}{\sqrt{1 - \dfrac{V^2}{c^2}}} = \frac{m_0\,c^2}{\sqrt{1-x}},$$

където за удобство сме въвели обозначението $\dfrac{V^2}{c^2} = x$. Нека развием функцията $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x}}$ в ред на Тейлър в околност на т. $x_0 = 0$. Така $f(x)$ ще се представи във вида

(2) $$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}\,x^n,$$

където $f^{(n)}(0)$ са стойностите на n-тата производна на функцията $f(x)$ в т. $x_0 = 0$. Нека определим поне първите две от тях:

$$n = 0 \quad \Rightarrow \quad f^{(0)}(0) = \frac{1}{\sqrt{1-0}} = 1;$$

$$n = 1 \quad \Rightarrow \quad f^{(1)}(x) = -\frac{1}{2}\frac{1}{(1-x)^{3/2}}.(-1) = \frac{1}{2.(1-x)^{3/2}} \quad \Rightarrow \quad f^{(1)}(0) = \frac{1}{2(1-0)^{3/2}} = \frac{1}{2}.$$

Така очевидно получаваме

(3) $$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}\,x^n = \frac{f^{(0)}(0)}{0!}\,x^0 + \frac{f^{(1)}(0)}{1!}\,x^1 + \ldots.. = 1 + \frac{1}{2}x + \ldots. \approx 1 + \frac{1}{2}x$$

С отчитането на (3) и на полагането $x = \dfrac{V^2}{c^2}$ изразът за енергията (1) добива вида

(4) $$E = \frac{m_0\,c^2}{\sqrt{1-x}} \approx m_0\,c^2\left(1 + \frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2}\right) = m_0\,c^2 + m_0\,c^2\,\frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2} = m_0\,c^2 + \frac{m_0 v^2}{2} = m_0\,c^2 + T.$$

✵ **Задача:** Заряд q с маса в покой m_0 се намира в покой в началото на КС. Върху заряда действа постоянно електрично поле, насочено по оста Ох.

Определете релативистичната скорост и изразете координатите на заряда (*частицата*) като функция на времето.

Решение:

Начални условия (при $t=0$):

(1) $\vec{p}(0)=\vec{p}_0(0,0,0)$; $\vec{r}(0)=\vec{r}_0(0,0,0)$; $\vec{V}(0)=\vec{V}_0(0,0,0)$.

Полетата, действащи върху частицата, са

(2) $\vec{E}=(E,0,0)$, и (3) $\vec{B}=(0,0,0)$.

Тогава силата на Лоренц, действаща върху заряда, ще бъде

(4) $$\frac{d\,\vec{p}}{d\,t}=q\,\vec{E}+q.\,(\vec{V}\times\vec{B}),$$

или по компоненти:

(5) $$\frac{d\,p_x}{d\,t}=q\,E\,;\qquad \frac{d\,p_y}{d\,t}=0\,;\qquad \frac{d\,p_z}{d\,t}=0\,.$$

След интегриране на ОДУ (5) с отчитане на началните условия (1) ще имаме:

(6) $p_x=q\,E.t$; $p_y=const\equiv 0$; $p_y=const\equiv 0$.

От друга страна релативисткият импулс се представя във вида (*по компоненти*):

(7) $p_x=\gamma_x.m_0.V_x$; $p_y=\gamma_y.m_0.V_y$; $p_z=\gamma_z.m_0.V_z$.

След сравняването на равенства (6) и (7) получаваме

(8) $\gamma_x.m_0.V_x=q\,E.t$; $V_y=0$; $V_z=0$.

Решаваме първото от тях относно V_x:

$$\frac{m_0.V_x}{\sqrt{1-\frac{V_x^{\,2}}{c^2}}}=q\,E.t\quad\Big|^2 \qquad\qquad m_0^{\,2}.V_x^{\,2}=q^2\,E^2.t^2\left(1-\frac{V_x^{\,2}}{c^2}\right),$$

$$V_x^{\,2}\left(m_0^{\,2}+\frac{q^2\,E^2.t^2}{c^2}\right)=q^2\,E^2.t^2\,,\qquad V_x^{\,2}\left(m_0^{\,2}+\frac{q^2\,E^2.t^2}{c^2}\right)=q^2\,E^2.t^2\,,$$

$V_x^{\,2}(m_0^{\,2}c^2+q^2\,E^2.t^2)=q^2\,E^2.t^2c^2$, откъдето след корenуване получаваме

(9) $$V_x=\frac{dx}{dt}=q\,E.c.t\,(m_0^{\,2}c^2+q^2\,E^2.t^2)^{-\frac{1}{2}},$$

като очевидно $\lim\limits_{t\to\infty}V_x(t)=c$, както би следвало и да се очаква. Интегрираме (9), което е ОДУ с разделящи се променливи

(10) $$x(t)=\int V_x(t)\,dt+C_1=\int q\,E.c.t\,(m_0^{\,2}c^2+q^2\,E^2.t^2)^{-\frac{1}{2}}dt+C_1=$$

$$=q\,E.c\int\frac{t}{\sqrt{m_0^{\,2}c^2+q^2\,E^2.t^2}}dt+C_1=\frac{q\,E.c}{2}\int\frac{d\,t^2}{\sqrt{m_0^{\,2}c^2+(q\,E.t)^2}}+C_1=$$

$$=\frac{q\,E.c}{2}.\frac{1}{(q\,E)^2}\int\frac{d\,(q\,E.t)^2}{\sqrt{m_0^{\,2}c^2+(q\,E.t)^2}}+C_1=\frac{c}{2q\,E}\int[m_0^{\,2}c^2+(q\,E.t)^2]^{-\frac{1}{2}}\,d\,(q\,E.t)^2+C_1=$$

$$=\frac{c}{2q\,E}\,\frac{1}{1/2}[m_0^{\,2}c^2+(q\,E.t)^2]^{+\frac{1}{2}}+C_1=\frac{c}{q\,E}\sqrt{m_0^{\,2}c^2+(q\,E.t)^2}+C_1=$$

$$=\frac{c}{q\,E}\left\{\sqrt{m_0^{\,2}c^2+(q\,E.t)^2}+C_1^{\,/}\right\}.$$

И така

(11) $x(t)=\dfrac{c}{qE}\left\{\sqrt{m_0{}^2c^2+(qE.t)^2}+C_1^{/}\right\}$,

където интеграционната константа $C_1^{/}$ се определя от началните условия (1), а именно: щом $x(0)=\dfrac{c}{qE}\left\{\sqrt{m_0{}^2c^2}+C_1^{/}\right\}=\dfrac{c}{qE}\left\{m_0c+C_1^{/}\right\}\equiv 0$, то очевидно $C_1^{/}=-m_0c$, откъдето следва

(12) $x(t)=\dfrac{c}{qE}\left\{\sqrt{m_0{}^2c^2+(qE.t)^2}-m_0c\right\}$.

От уравнения (8) и от началните условия (1) получаваме още, че

(13) $y(t)=0$, и $z(t)=0$.

✸ **Задача** (зад. 320/стр. 52) Коя от величините за частица с маса в покой m_0 е най-голяма:

а) $\dfrac{m_0V^2}{2}$**;** б) $\dfrac{p^2}{2m_0}$; в) T (*кинетична енергия*)

Решение:

Нека изразим всяка една от трите величини посредством релативистичния фактор $\gamma=\dfrac{1}{\sqrt{1-V^2/c^2}}$ и енергията на частицата в покой $E_0=m_0c^2$:

а) По определение $E=\dfrac{m_0.c^2}{\sqrt{1-V^2/c^2}}=\dfrac{E_0}{\sqrt{1-V^2/c^2}}$, следователно

(1) $E^2\left(1-\dfrac{V^2}{c^2}\right)=E_0{}^2$.

Ако отчетем още, че всъщност $E=\gamma.E_0$, то (1) добива вида

(2) $\gamma^2E_0{}^2\left(1-\dfrac{V^2}{c^2}\right)=E_0{}^2$, откъдето $\gamma^2\left(1-\dfrac{V^2}{c^2}\right)=1$, $\gamma^2-\gamma^2\dfrac{V^2}{c^2}=1$,

$\gamma^2\dfrac{V^2}{c^2}=\gamma^2-1$, т.е. $V^2=\dfrac{\gamma^2-1}{\gamma^2}c^2$. С така намерената стойност на V^2 можем да определим величината

(3) $\dfrac{m_0V^2}{2}=\dfrac{m_0}{2}V^2=\dfrac{\gamma^2-1}{2\gamma^2}m_0c^2\equiv\dfrac{\gamma^2-1}{2\gamma^2}E_0=\dfrac{(\gamma-1).(\gamma+1)}{2\gamma^2}E_0$.

б) Величината $\dfrac{p^2}{2m_0}$ ще изразим от условието за инвариантност на квадрата на 4-импулса:

(4) $\left(\dfrac{E}{c}\right)^2-p^2=m_0^2c^2$,

откъдето

$$p^2=\left(\frac{E}{c}\right)^2-m_0^2c^2=\left(\frac{\gamma m_0c^2}{c}\right)^2-m_0^2c^2=(\gamma m_0c)^2-m_0^2c^2=\gamma^2m_0^2c^2-m_0^2c^2=(\gamma^2-1)m_0^2c^2.$$

Тогава

(5) $\dfrac{p^2}{2m_0} = \dfrac{1}{2m_0}\, p^2 = \dfrac{1}{2m_0}(\gamma^2 - 1)\, m_0^2\, c^2 = \dfrac{(\gamma^2 - 1)}{2}\, m_0\, c^2 \equiv \dfrac{(\gamma^2 - 1)}{2}\, E_0$.

в) Накрая изразяваме и кинетичната енергия T посредством E_0, като за тази цел използваме представянето

(6) $E = T + m_0\, c^2$,

откъдето, отчитайки отново че $E = \gamma . m_0 c^2$, следва

(7) $T = E - m_0\, c^2 = (\gamma - 1)\, m_0\, c^2 \equiv (\gamma - 1)\, E_0$.

И така дотук имаме:

(8.1) $\dfrac{m_0\, V^2}{2} = \dfrac{(\gamma - 1).(\gamma + 1)}{2\gamma^2}\, E_0$;

(8.2) $\dfrac{p^2}{2m_0} = \dfrac{(\gamma - 1).(\gamma + 1)}{2}\, E_0$, и

(8.3) $T = (\gamma - 1)\, E_0$.

От (8.1) и (8.2), с отчитане на (8.3), имаме

(9.1) $\dfrac{m_0\, V^2}{2} = \dfrac{(\gamma + 1)}{2\gamma^2}\, T$; и (9.2) $\dfrac{p^2}{2m_0} = \dfrac{(\gamma + 1)}{2}\, T$.

Понеже релативистичният фактор $\gamma > 1$, то съгласно (9.2)

(10) $\dfrac{p^2}{2m_0} > T$.

А ако отчетем (9.2) в (9.1), ще получим

(11) $\dfrac{m_0\, V^2}{2} = \dfrac{1}{\gamma^2}\left(\dfrac{p^2}{2m_0}\right)$,

което при $\gamma > 1$ означава, че

(12) $\dfrac{m_0\, V^2}{2} < \dfrac{p^2}{2m_0}$.

От (10) и (12) заключаваме, че най-голямата измежду трите величини е $\dfrac{p^2}{2m_0}$.

При тези обстоятелства от (9.1) можем да заключим, че $\dfrac{m_0\, V^2}{2}$ е най-малката.

❋ **Задача** (зад. 322/стр. 52) Изразете големината p на импулса на една релативистка частица посредством кинетичната й енергия T.

Решение:

За решаването на задачата е достатъчно да използваме инвариантността на скаларния квадрат на 4-импулса

(1) $\left(\dfrac{E}{c}\right)^2 - p^2 = m_0^2\, c^2$,

както и формулата за пълната енергия

(2) $E = T + m_0\, c^2$.

Заместваме (2) в (1)

(3) $$\left(\frac{T+m_0 c^2}{c}\right)^2 - p^2 = m_0^2 c^2 \qquad \Big| .c^2$$

(4) $(T+m_0 c^2)^2 - p^2 c^2 = m_0^2 c^4$, откъдето

$$p^2 c^2 = (T+m_0 c^2)^2 - m_0^2 c^4 = T^2 + 2.T.m_0 c^2 + m_0^2 c^4 - m_0^2 c^4 = T^2 + 2.T.m_0 c^2 = T(T+2.m_0 c^2).$$

След разделяне с c^2 и коренуване получаваме точно

(5) $$p = \frac{1}{c}\sqrt{T(T+2.m_0 c^2)},$$

което представлява търсената зависимост.

✵ **Задача** (зад. 323/стр. 52) Изразете скоростта $\vec{V}$ на една релативистка частица посредством нейния импулс $\vec{p}$.

Решение:

Отново използваме формулата, изразяваща инвариантността на скаларния квадрат на 4-импулса

(1) $$\left(\frac{E}{c}\right)^2 - p^2 = m_0^2 c^2,$$

и формулата за пълната енергия, записана този път, обаче, в стандартната релативистична форма

(2) $$E = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}.$$

Заместваме E от (2) в (1) и решаваме така полученото уравнение относно скоростта $\vec{V}$:

$$\left(\frac{1}{c}\frac{m_0 c^2}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}\right)^2 - p^2 = m_0^2 c^2, \Rightarrow \frac{m_0{}^2 c^2}{1-\frac{V^2}{c^2}} - p^2 = m_0^2 c^2, \Rightarrow \frac{m_0{}^2 c^2}{1-\frac{V^2}{c^2}} = p^2 + m_0^2 c^2,$$

$$1-\frac{V^2}{c^2} = \frac{m_0{}^2 c^2}{p^2+m_0^2 c^2}, \Rightarrow \frac{V^2}{c^2} = 1-\frac{m_0{}^2 c^2}{p^2+m_0^2 c^2}, \Rightarrow V^2 = \frac{p^2+m_0^2 c^2 - m_0{}^2 c^2}{p^2+m_0^2 c^2}.c^2,$$

$V^2 = \dfrac{p^2}{p^2+m_0^2 c^2}.c^2$, откъдето заключаваме, че

(3) $$\vec{V} = \frac{\vec{p}.c}{\sqrt{\vec{p}^2 + m_0^2 c^2}}.$$

✵ **Задача** (зад. 324/стр. 52) Изразете скоростта V на една релативистка частица посредством нейната релативистична енергия E.

Решение:

По определение

(1) $$E = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}} \qquad \Big|^2, \quad \Rightarrow \quad E^2 = \frac{m_0{}^2 c^4}{1-\frac{V^2}{c^2}}, \Rightarrow \quad 1-\frac{V^2}{c^2} = \frac{m_0{}^2 c^4}{E^2},$$

$$\frac{V^2}{c^2}=1-\frac{m_0{}^2 c^4}{E^2}, \qquad \Rightarrow \qquad V^2=\left(1-\frac{m_0{}^2 c^4}{E^2}\right)c^2$$, откъдето след коренуване

(2) $$V=c.\sqrt{1-\frac{m_0{}^2 c^4}{E^2}}=c.\sqrt{1-\frac{E_0{}^2}{E^2}}\,.$$

✹ **Задача:** Върху намираща се в покой частица, имаща маса m_1 (маса в покой) пада друга (*втора*) частица с маса m_2 (маса в покой), в резултат от което се образува нова частица с маса M ($M>m_1+m_2$). Да се определи минималната кинетична енергия $T_2^{\min}$ на втората частица, достатъчна за осъществяването на такъв процес.

Решение:

За решаването на задачата ще използваме следните основни формули от релативистката динамика:

(Ф.1) $$P^2=P^{/\,2},$$

където $P=\left(\frac{E}{c},\,\vec{p}\right)$ и $P^{/}=\left(\frac{E^{/}}{c},\,\vec{p}^{\,/}\right)$ са стойностите на 4-импулса на системата в две различни координатни системи K и $K^{/}$, използвани за описанието на системата преди и след взаимодействието съответно;

(Ф.2) $$E=T+m_0\,c^2\,;$$

(Ф.3) $$p=\frac{1}{c}\sqrt{T(T+2m_0c^2)}\,;$$

Нека най-напред разгледаме стълкновението на частиците в лабораторна КС (K). За енергиите и импулсите на двете частици имаме съответно

(1) $E_1=m_1\,c^2$ (*енергия на частица в покой*);

(2) $p_1=0$; и

(3) $E_2=T_2+m_2\,c^2$;

(4) $p_2=\frac{1}{c}\sqrt{T_2(T_2+2m_2\,c^2)}$.

Пълната енергия и пълният импулс на системата до удара е:

(5) $E=E_1+E_2=(m_1+m_2).c^2+T_2$;

(6) $\vec{p}=\vec{p}_1+\vec{p}_2\equiv\vec{p}_2$.

Тогава пълният 4-вектор на импулса на системата е

(7) $$P=\left(\frac{E}{c},\,\vec{p}\right)=\left(\frac{(m_1+m_2).c^2+T_2}{c},\,\vec{p}_2\right),$$

чийто скаларен квадрат е

(8) $$P^2=\left(\frac{(m_1+m_2).c^2+T_2}{c}\right)^2-p_2{}^2=\frac{1}{c^2}[(m_1+m_2).c^2+T_2]^2-p_2{}^2\,.$$

Същия кинематичен анализ на системата провеждаме и след взаимодействието на частиците, но този път го реализираме спрямо КС ($K^{/}$), свързана с центъра на масите на частиците.

При това следва да вземем под внимание и обстоятелството, че под минимална кинетична енергия $T_2^{\min}$ на втората частица се разбира такава енергия, при която новообразувалата се частица с маса M само ще се „композира", без да притежава каквато и да е кинетична енергия, т.е. енергията и импулса на системата (*частицата*) след удара ще бъдат съответно

(9) $E^{/} = M.c^2$ (*енергия на частица в покой*).; и (10) $\vec{p}^{/} = 0$ (*частица в покой*).

Тогава 4-импулса в системата $K^{/}$ ще бъде

(10) $P^{/} = \left(\frac{E^{/}}{c}, \vec{p}^{/}\right) = \left(\frac{M.c^2}{c}, 0\right)$,

а неговият скаларен квадрат ще бъде

(11) $P^{/2} = \left(\frac{M.c^2}{c}\right)^2 - 0 \equiv M^2.c^2$.

Остана да приложим (Ф.1), изразяваща инвариантността на квадрата на 4-импулса, а именно отчитайки (8) и (11), и с уговорката че $T_2 \to T_2^{\min}$ ще имаме

(12) $\frac{1}{c^2}[(m_1 + m_2).c^2 + T_2^{\min}]^2 - p_2^2 = M^2.c^2 \qquad \Big| .c^2$

(13) $[(m_1 + m_2).c^2 + T_2^{\min}]^2 - p_2^2.c^2 = M^2.c^4$

Ако в (13) заместим p_2 от (4) (*отново с уговорката че* $T_2 \to T_2^{\min}$), ще имаме

(14) $[(m_1 + m_2).c^2 + T_2^{\min}]^2 - c^2\frac{1}{c^2}[T_2^{\min}(T_2^{\min} + 2m_2 c^2)] = M^2.c^4$.

Решаваме горното уравнение относно $T_2^{\min}$:

$(m_1 + m_2)^2.c^4 + 2(m_1 + m_2).c^2 T_2^{\min} + \{T_2^{\min}\}^2 - \{T_2^{\min}\}^2 - 2T_2^{\min} m_2 c^2 = M^2.c^4$;

$(m_1 + m_2)^2.c^4 + 2m_1.c^2 T_2^{\min} = M^2.c^4$;

$2m_1.c^2 T_2^{\min} = M^2.c^4 - (m_1 + m_2)^2.c^4$.

И така

(15) $T_2^{\min} = \frac{\{M^2 - (m_1 + m_2)^2\}}{2m_1}.c^2$.

Понеже по условие $M > m_1 + m_2$, то очевидно $T_2^{\min} > 0$. А ако $T_2 > T_2^{\min}$, то частицата, образувана след взаимодействието, няма да остане в покой, а ще започне да се движи със някаква (*различна от нула*) скорост.