Учебно пособие

за сем. упражнения (*задачи*) по Електродинамика

Гл. ас. Петко Митев

Тема: Кинематика на релативистка частица. 4-вектори и 4-тензори. Преобразования на Лоренц

❖ Теоретичен минимум

🕮 **Първи постулат на Айнщайн:**

> Всички физични явления протичат по един и същ начин спрямо всяка инерциална отправна система.

Айнщайн издига и хипотеза за съществуването на крайна (*пределна*) скорост $c = 3.10^8\ m/s$, с която се предават взаимодействия в природата.

🕮 **Втори постулат на Айнщайн**:

> Скоростта на светлината във вакуум е **една и съща** спрямо <u>**всяка**</u> инерциална ОС. Тя **не зависи** от движението на <u>източника</u> или <u>приемника</u> на светлината.

🕮 Съвкупността от постулатите **I** и **II** се нарича **Принцип на относителността на Айнщайн**, който е основополагащ принцип в **Специалната теория на относителността (СТО)**.

🕮 **Кинематика на релативистка частица в 4-мерна формулировка:**

✍ **4-вектор:** 4-компонентна величина, която при смяна на координатната система (*КС*) се трансформира по закона

✓ $X^{\mu} = \Lambda^{\mu}_{\nu} . X^{/\nu}, \qquad \mu = 0, 1, 2, 3,$

където в частност

✓ $$\Lambda = \begin{pmatrix} \gamma & \beta\gamma & 0 & 0 \\ \beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

✓ **Контравариантен 4-вектор:** $A^{\mu} \equiv (A^0, \vec{A})$**;**

✓ **Ковариантен 4-вектор:** $A_{\mu} \equiv (A^0, -\vec{A})$**.**

✍ Връзка между **ковариантни** и **контравариантни** 4-вектори

✓ $A_{\mu} = g_{\mu\nu} A^{\nu}, \quad \mu, \nu = 0, 1, 2, 3,$

където

✓ $$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$ - <u>**метричен тензор**</u> (*инвариант*).

✍ **Скаларен квадрат на 4-вектор:**

✓ $$A^2 = A_\mu A^\mu \equiv A^\mu A_\mu = g_{\mu\nu} A^\nu A^\mu = A^0 A^0 - \vec{A}.\vec{A} = (A^0)^2 - (\vec{A})^2.$$

📖 **4-радиус-вектор:** $X^\mu = (ct,\ \vec{r})$.

📖 **Контравариантен 4-тензор** от II ранг: величина, която при смяна на КС се трансформира по закона

✓ $$\Phi^{\mu\nu} = \Lambda^\mu_\lambda . \Lambda^\nu_\sigma . \Phi^{/\,\lambda\sigma}.$$

Тензорите биват:

- симетрични: $\Phi^{\mu\nu} = \Phi^{\nu\mu}$, и
- антисиметрични: $\Phi^{\mu\nu} = -\Phi^{\nu\mu}$, като очевидно $\Phi^{kk} = 0$.

📖 **Интервал:** $(dS)^2 = g_{\mu\nu} dX^\mu\, dX^\nu$.

$$ds = \sqrt{dX^\mu dX_\mu} = \sqrt{(c.dt)^2 - (dr)^2} = c.dt\sqrt{1 - \frac{1}{c^2}\left(\frac{dr}{dt}\right)^2} = c.dt\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = c.d\tau\,,$$

където $d\tau = dt\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = \frac{dt}{\gamma} < dt$ е т.нар. **собствено време**.

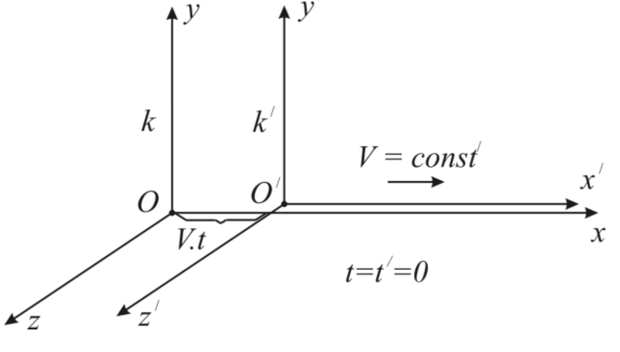
Щом $ds = c.d\tau$**,** то очевидно ds е **инвариантна величина** (*в качеството си на величина, явяваща се произведение от други два инварианта*).

а) Интервали, за които $(d\,S)^2 = 0$ са **светлинно-подобни**.

б) Интервали, за които $(d\,S)^2 > 0$, са **временно-подобни**. Две събития, свързани с временно-подобен интервал, са **причинно-свързани събития.**

в) Интервали, за които $(d\,S)^2 < 0$, са **пространствено-подобни.** Две събития, „свързани” с пространствено-подобен интервал, **<u>не могат</u> да бъдат причинно-следствено свързани помежду си**!

📖 **Трансформации на Лоренц. Трансформации на Лоренц за 4-вектор:**



✓ $$\begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & \beta\gamma & 0 & 0 \\ \beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x^{/\,0} \\ x^{/\,1} \\ x^{/\,2} \\ x^{/\,3} \end{pmatrix},$$

$$\beta = \frac{v}{c}, \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}.$$

и ✓ $$\begin{pmatrix} x'^{0} \\ x'^{1} \\ x'^{2} \\ x'^{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x^{0} \\ x^{1} \\ x^{2} \\ x^{3} \end{pmatrix}.$$

За компонентите на **4-радиус-вектора** $x^{\mu} = (ct, \vec{r})$ и за компонентите на произволен **4-вектор** $A^{\mu} = (A^{0}, A^{1}, A^{2}, A^{3})$ „*правите*” и „*обратните*” преобразования на Лоренц имат (*съответно*) вида:

✓ $$\left| \begin{array}{l} x^{0} = \gamma(x'^{0} + \beta x'^{1}) \\ x^{1} = \gamma(x'^{1} + \beta x'^{0}) \\ x^{2} = x'^{2} \\ x^{3} = x'^{3} \end{array} \right. ;$$ ✓ $$\left| \begin{array}{l} A^{0} = \gamma(A'^{0} + \beta A'^{1}) \\ A^{1} = \gamma(A'^{1} + \beta A'^{0}) \\ A^{2} = A'^{2} \\ A^{3} = A'^{3} \end{array} \right. .$$

✓ $$\left| \begin{array}{l} x'^{0} = \gamma(x^{0} - \beta x^{1}) \\ x'^{1} = \gamma(x^{1} - \beta x^{0}) \\ x'^{2} = x^{2} \\ x'^{3} = x^{3} \end{array} \right. ;$$ ✓ $$\left| \begin{array}{l} A'^{0} = \gamma(A^{0} - \beta A^{1}) \\ A'^{1} = \gamma(A^{1} - \beta A^{0}) \\ A'^{2} = A^{2} \\ A'^{3} = A^{3} \end{array} \right. .$$

Преобразованията на Лоренц са известни още във вид на преобразования за 3-те пространствени координати и времето (*като независима променлива*):

$$(1) \left| \begin{array}{l} x = \dfrac{x' + V.t'}{\sqrt{1-\dfrac{V^{2}}{c^{2}}}} = \gamma.(x' + V.t') \\ y = y' \\ z = z' \\ t = \dfrac{t' + \dfrac{V}{c^{2}} x'}{\sqrt{1-\dfrac{V^{2}}{c^{2}}}} = \gamma.\left(t' + \dfrac{V}{c^{2}} x'\right) \end{array} \right. , \quad \text{и } (2) \left| \begin{array}{l} x' = \dfrac{x - V.t}{\sqrt{1-\dfrac{V^{2}}{c^{2}}}} = \gamma.(x - V.t) \\ y' = y \\ z' = z \\ t' = \dfrac{t - \dfrac{V}{c^{2}} x}{\sqrt{1-\dfrac{V^{2}}{c^{2}}}} = \gamma.\left(t - \dfrac{V}{c^{2}} x\right) \end{array} \right. .$$

След умножаването на уравненията за трансформация на времето (*последните от горните уравнения*) със „*c*” (*скоростта на светлината*), уравненията (1) и (2) стават уравнения за трансформация на величини с една и съща (*пространствена*) размерност

$$(3)\quad \left|\begin{aligned} & x=\gamma.\left(x^{/}+\frac{V}{c}.(c.t^{/})\right) \\ & y=y^{/} \\ & z=z^{/} \\ & c.t=\gamma.\left((c.t^{/})+\frac{V}{c}x^{/}\right) \end{aligned}\right. ,\ \text{и}\qquad (4)\quad \left|\begin{aligned} & x^{/}=\gamma.\left(x-\frac{V}{c}.(c.t)\right) \\ & y^{/}=y \\ & z^{/}=z \\ & c.t^{/}=\gamma.\left((c.t)-\frac{V}{c}x\right) \end{aligned}\right. ,$$

и в този си вид те съответстват напълно на трансформационните закони за компонентите на **4-радиус-вектора** $x^{\mu}=(ct,\vec{r})$, като за целта е необходимо само в (3) и (4) да се направи следната формална замяна в означенията: $c.t=x^0$, $x=x^1$, $y=x^2$ и $z=x^3$, както и да се отчете, че $\frac{V}{c}=\beta$.

🕮 **Следствия от трансформациите на Лоренц:**

① **Относителност на пространствените интервали** (*скъсяване на дължините*):

✓ $l=l_0.\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}$, т.е. $l=\frac{l_0}{\gamma}$, където:

☞ l_0 - **собствена дължина** на обекта (*дължина в* $K^{/}$*, т.е. спрямо наблюдател, движещ се заедно с обекта и намиращ се в покой спрямо него*); и

☞ l - **координатна дължина** на обекта (*дължина в* K*, т.е. спрямо неподвижен наблюдател в* K*, относно който, обаче, обектът се движи*).

② **Относителност на временните интервали:**

✓ $\Delta t=\frac{\Delta\tau}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}$, т.е. $\Delta t=\gamma.\Delta\tau$, където

☞ $\Delta t^{/}\approx\Delta\tau$ - собствено време в $K^{/}$;

☞ Δt - координатно време, определено за наблюдател *в* K, спрямо който обектът се движи.

Понеже при $V<c$ очевидно $\gamma>1$, то $\Delta t>\Delta\tau$, т.е. **координатното време** (*времето спрямо неподвижен наблюдател, относно който обектът се движи*) **е по-голямо от собственото време** (*времето спрямо наблюдател, който се движи заедно с обекта, но относно който обектът е в покой*).

③ **Относителност на едновременността**, т.е. две събития, които са едновременни относно дадена ИОС, са нееднoвременни относно всяка друга ИОС, движеща се със скорост $V\neq 0$ спрямо дадената ИОС.

⁂

❋ **Задача** (зад. 298/стр. 50) Дадено е уравнение на окръжност $x^{/2}+y^{/2}=R^2$ спрямо отправна система $K^{/}$. Да се получи уравнението на тази крива спрямо системата K. Да се даде релативистично тълкуване на получения резултат.

Решение:

За намирането на уравнението на тази крива в ОС K, ще приложим обратните трансформации на Лоренц, записани във вида

$$(1)\quad \left|\begin{array}{l} x^{/} = \gamma.(x - V.t) \\ y^{/} = y \\ t^{/} = \gamma.\left(t - \dfrac{V}{c^2}x\right) \end{array}\right. .$$

След заместването на $x^{/}$ и $y^{/}$ в уравнението на кривата (*окръжност*) в $K^{/}$, получаваме

$$(2)\quad [\gamma.(x - V.t)]^2 + y^2 = R^2 \quad \Big| : R^2$$

$$(3)\quad \frac{[\gamma.(x - V.t)]^2}{\sqrt{1 - \dfrac{V^2}{c^2}}} + y^2 = R^2$$

В този си вид уравнение (3) е уравнение на елипса $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$, за която двете полуоси имат големини съответно

(4а) $a = R\sqrt{1 - \dfrac{V^2}{c^2}} \equiv f(V)$, и (4б) $b = R = const$.

Ако (*формално*) $V \to c$, то очевидно $a \to 0$. На този резултат може да се даде следната релативистична интерпретация: при високи (*релативистични*) скорости на движение линейните размери на материални обекти в направление на движението се редуцират (*скъсяват*). Линейните размери в направление, перпендикулярно по отношение на движението, обаче, не се променят. В нерелативистичния случай $V << c$ подобна редукция на линейните размери не се наблюдава (*тя е несъществена*).

Числена оценка (зад. 295): ако приложим този резултат за Земята, разглеждана като кълбо с радиус $R = 6{,}4.10^6\ m$, имащо скорост на движение $V = 30\ km/s = 3.10^4\ m/s$, то релативистичното „скъсяване" на земния диаметър в направление на движението на Земята при нейното движение около Слънцето ще бъде $\Delta D = 2.\Delta R = 2\left\{R - R\sqrt{1 - \dfrac{V^2}{c^2}}\right\} = \ldots = 6{,}4\ cm$.

❋ **Задача** (зад. 299/стр. 51) Да се докаже че трансформацията с уравнения

($1^а$) $x^{/} = x.ch\,\psi - c.t\,sh\,\psi$ и ($1^б$) $t^{/} = t.ch\,\psi - \dfrac{x}{c}sh\,\psi$

запазва разстоянието (*интервала*) между две точки (*събития*) в пространство-времето.

Доказателство: по определение

$$S^{/2}_{12} = (ct_1^{/} - ct_2^{/})^2 - (x_1^{/} - x_2^{/})^2 = \{(ct_1.ch\,\psi - x_1.sh\,\psi) - (ct_2.ch\,\psi - x_2.sh\,\psi)\}^2 -$$

$$
\begin{aligned}
&-\{(x_1.ch\,\psi - ct_1.sh\,\psi)-(x_2.ch\,\psi - ct_2.sh\,\psi)\}^2 = \\
&=\{c(t_1-t_2).ch\,\psi-(x_1-x_2).sh\,\psi\}^2-\{(x_1-x_2).ch\,\psi-c(t_1-t_2).sh\,\psi\}^2 = \\
&=c^2(t_1-t_2)^2.ch^2\,\psi-2c(t_1-t_2)(x_1-x_2).sh\,\psi.ch\,\psi+(x_1-x_2)^2sh^2\,\psi- \\
&-[(x_1-x_2)^2ch^2\,\psi-2c(t_1-t_2)(x_1-x_2).sh\,\psi.ch\,\psi+c^2(t_1-t_2)^2.sh^2\,\psi]= \\
&=c^2(t_1-t_2)^2.[ch^2\,\psi-sh^2\,\psi]-(x_1-x_2)^2[ch^2\,\psi-sh^2\,\psi]= \\
&=c^2(t_1-t_2)^2-(x_1-x_2)^2,
\end{aligned}
$$

понеже $ch^2\,\psi-sh^2\,\psi=1$. И така, доказахме, че

$$S'^{\,2}_{12}=c^2(t_1-t_2)^2-(x_1-x_2)^2\equiv S^2_{12},$$

с което доказахме инвариантността на пространствено-времения интервал S^2_{12}.

❋ **Задача:** да се изведат формули за релативистично преобразуване на скоростта за случая $\vec{V}\,||O\vec{x}$.

Решение: скоростта на материална точка спрямо ИОС (*К*) е

$$(1)\qquad V_x=\frac{dx}{dt};\qquad V_y=\frac{dy}{dt};\qquad V_z=\frac{dz}{dt}.$$

Скоростта на същата материална точка спрямо друга ИОС ($K^{/}$), движеща се със скорост $\vec{V}\,||O\vec{x}$, т.е. $\vec{V}(V,0,0)$ спрямо първата, е

$$(2)\qquad V_x^{\,/}=\frac{dx^{/}}{dt^{/}};\qquad V_y^{\,/}=\frac{dy^{/}}{dt^{/}};\qquad V_z^{\,/}=\frac{dz^{/}}{dt^{/}}.$$

Съгласно формулите (*обратните преобразования*) на Лоренц за координатите имаме

$$(3)\quad\left|\begin{array}{l} x^{/}=\gamma.(x-V.t)\\ y^{/}=y\\ z^{/}=z\\ t^{/}=\gamma.\left(t-\dfrac{V}{c^2}x\right)\end{array}\right.\qquad\Rightarrow\qquad(4)\quad\left|\begin{array}{l} dx^{/}=\gamma.(dx-V.dt)\\ dy^{/}=dy\\ dz^{/}=dz\\ dt^{/}=\gamma.\left(dt-\dfrac{V}{c^2}dx\right)\end{array}\right..$$

Замествайки (4) в (2), получаваме последователно

$$(5)\qquad V_x^{\,/}=\frac{dx^{/}}{dt^{/}}=\frac{\gamma.(dx-V.dt)}{\gamma.\left(dt-\dfrac{V}{c^2}dx\right)}\,\frac{/\,dt}{/\,dt}=\frac{(dx/dt)-V}{1-\dfrac{V}{c^2}(dx/dt)}=\frac{V_x-V}{1-V_x\dfrac{V}{c^2}};$$

$$(6)\qquad V_y^{\,/}=\frac{dy^{/}}{dt^{/}}=\frac{dy}{\gamma.\left(dt-\dfrac{V}{c^2}dx\right)}\,\frac{/\,dt}{/\,dt}=\frac{V_y}{\gamma.\left(1-V_x\dfrac{V}{c^2}\right)},\ \text{и}$$

$$(7)\qquad V_z^{\,/}=\frac{dz^{/}}{dt^{/}}=\frac{dz}{\gamma.\left(dt-\dfrac{V}{c^2}dx\right)}\,\frac{/\,dt}{/\,dt}=\frac{V_z}{\gamma.\left(1-V_x\dfrac{V}{c^2}\right)}.$$

Допълнение: с тези формули за трансформация на скоростта може да се аргументира (*математически*) принципът за инвариантност на скоростта на светлината, и по-конкретно факта, че тя не може да надвиши стойността „*c*". Действително, ако изходим от предпоставката $V_x \to c$, и $V_y = V_z = 0$, то съгласно изведените по-горе формули (5), (6) и (7) ще следва, че и $V_y^{/} = V_z^{/} = 0$, обаче

$$(8) \qquad V_x^{\,/} = \frac{V_x - V}{1 - V_x \frac{V}{c^2}} \to \frac{c - V}{1 - c\frac{V}{c^2}} = \frac{c - V}{1 - \frac{V}{c}} = \frac{c - V}{\left(\frac{c - V}{c}\right)} = c\,.$$

Така обосновахме, че при $V_x \to c$ е в сила и $V_x^{/} \to c$, к.т.д.

❋ **Задача:** да се изведат формули за релативистично преобразуване на ускорението за случая $\vec{V}\,||O\vec{x}$.

Решение: ускорението на материална точка (*по компоненти*) спрямо ИОС (*K*) е

$$(1) \qquad a_x = \frac{dV_x}{dt}; \qquad a_y = \frac{dV_y}{dt}; \qquad a_z = \frac{dV_z}{dt}\,.$$

Ускорението на същата материална точка спрямо друга ИОС ($K^{/}$), движеща се със скорост $\vec{V}\,||O\vec{x}$, т.е. $\vec{V}(V,0,0)$ спрямо първата, е

$$(2) \qquad a_x^{\,/} = \frac{dV_x^{\,/}}{dt^{/}}; \qquad a_y^{\,/} = \frac{dV_y^{\,/}}{dt^{/}}; \qquad a_z^{\,/} = \frac{dV_z^{\,/}}{dt^{/}}\,.$$

Имаме вече доказани (*в предната задача*) следните формули за релативистично преобразуване на скоростите на материална точка:

$$(3) \qquad V_x^{\,/} = \frac{V_x - V}{1 - V_x \frac{V}{c^2}}; \qquad V_y^{\,/} = \frac{V_y}{\gamma.\left(1 - V_x \frac{V}{c^2}\right)}; \qquad V_z^{\,/} = \frac{V_z}{\gamma.\left(1 - V_x \frac{V}{c^2}\right)},$$

а за релативистичното трансформиране на безкрайно малкия интервал време отново можем да използваме преобразованието

$$(4) \qquad dt^{/} = \gamma.\left(dt - \frac{V}{c^2}dx\right).$$

Нека определим най-напред трансформационния закон на компонентата $a_x^{\,/} = \frac{dV_x^{\,/}}{dt^{/}}$ на ускорението. За целта ще е необходимо да определим $dV_x^{\,/}$ от (3):

$$(5) \qquad dV_x^{\,/} = d\left(\frac{V_x - V}{1 - V_x \frac{V}{c^2}}\right) = \frac{dV_x\left(1 - V_x \frac{V}{c^2}\right) - (V_x - V)\left(-dV_x \frac{V}{c^2}\right)}{\left(1 - V_x \frac{V}{c^2}\right)^2} =$$

$$= \frac{dV_x - V_x dV_x \frac{V}{c^2} + V_x dV_x \frac{V}{c^2} - V dV_x \frac{V}{c^2}}{\left(1 - V_x \frac{V}{c^2}\right)^2} = \frac{dV_x - V dV_x \frac{V}{c^2}}{\left(1 - V_x \frac{V}{c^2}\right)^2} = \frac{dV_x\left(1 - \frac{V^2}{c^2}\right)}{\left(1 - V_x \frac{V}{c^2}\right)^2},\ \text{т.е.}$$

$$(6) \qquad dV_x^{/} = \frac{dV_x}{\gamma^2\left(1 - V_x \frac{V}{c^2}\right)^2}.$$

Замествайки (6) и (4) в (2), получаваме последователно

$$(7) \qquad a_x^{/} = \frac{dV_x^{/}}{dt^{/}} = \frac{dV_x}{\gamma^2\left(1 - V_x \frac{V}{c^2}\right)^2} \times \frac{1}{\gamma.\left(dt - \frac{V}{c^2}dx\right)} \frac{/\,dt}{/\,dt} = \frac{a_x}{\gamma^3\left(1 - V_x \frac{V}{c^2}\right)^3}.$$

И така доказахме трансформационния закон за компонентата $a_x^{/}$ на ускорението

$$(8) \qquad a_x^{/} = \frac{a_x}{\gamma^3\left(1 - V_x \frac{V}{c^2}\right)^3} \equiv \frac{a_x\left(1 - \frac{V^2}{c^2}\right)^{3/2}}{\left(1 - V_x \frac{V}{c^2}\right)^3}.$$

По аналогичен начин могат да бъдат определени трансформационните закони за $a_y^{/}$ и $a_z^{/}$.

✵ **Задача** (стр. 52/зад. 315) Два 4-вектора се наричат колинеарни, ако съответните им компоненти са пропорционални, т.е. ако

$$(1) \qquad \frac{A^0}{B^0} = \frac{A^1}{B^1} = \frac{A^2}{B^2} = \frac{A^3}{B^3} = k.$$

Да се докаже, че свойството колинеарност на два 4-вектора е инвариантно относно трансформациите на Лоренц.

Решение: за контравариантни 4-вектори преобразованията на Лоренц имат вида:

$$(2) \quad \left|\begin{array}{l} A^{/\,0} = \gamma(A^0 - \beta A^1) \\ A^{/\,1} = \gamma(A^1 - \beta A^0) \\ A^{/2} = A^2 \\ A^{/3} = A^3 \end{array}\right. \qquad \text{и} \qquad (3) \quad \left|\begin{array}{l} B^{/\,0} = \gamma(B^0 - \beta B^1) \\ B^{/\,1} = \gamma(B^1 - \beta B^0) \\ B^{/2} = B^2 \\ B^{/3} = B^3 \end{array}\right. .$$

С помощта на (2) и (3) получаваме последователно

$$(4) \qquad \frac{A^{/0}}{B^{/0}} = \frac{\gamma(A^0 - \beta A^1)}{\gamma(B^0 - \beta B^1)} = \frac{A^0 - \beta A^1}{B^0 - \beta B^1} = \frac{(kB^0) - \beta(kB^1)}{B^0 - \beta B^1} = k;$$

$$(5) \qquad \frac{A^{/1}}{B^{/1}} = \frac{\gamma(A^1 - \beta A^0)}{\gamma(B^1 - \beta B^0)} = \frac{A^1 - \beta A^0}{B^1 - \beta B^0} = \frac{(kB^1) - \beta(kB^0)}{B^1 - \beta B^0} = k;$$

$$(6) \qquad \frac{A^{/2}}{B^{/2}} = \frac{A^2}{B^2} = \frac{(kB^2)}{B^2} = k; \text{ и}$$

$$(7) \qquad \frac{A^{/3}}{B^{/3}} = \frac{A^3}{B^3} = \frac{(kB^3)}{B^3} = k.$$

С това доказахме всъщност, че