Електродинамика

Андон Рангелов, кабинет В 39, email: rangelov@phys.uni-sofia.bg, интернет страница на курса http://ed.quantum-bg.org/

Теорема на Гаус за магнитното поле $\overrightarrow{B}$.

Потока на магнитното поле през затворена повърхност е нула:

$$\oiint \overrightarrow{B}.d\overrightarrow{S} = 0.$$

По същество теоремата на Гаус за потока на магнитното поле е следствие от факта, че магнитното поле няма заряди.

Теорема за циркулацията на магнитното поле $\overrightarrow{B}$ *(за постоянно магнитно поле във вакуум).*

Циркулацията на магнитното поле $\overrightarrow{B}$ по произволен затворен контур е равна на произведението на магнитната възприемчивост във вакуум и алгебричната сума на токовете пресичащи контура:

$$\oint \overrightarrow{B}.d\overrightarrow{l} = \mu_0 I.$$

По същество теоремата за циркулацията е следствие от закона на Био-Савар и е известена като закон на Ампер.

Задачи:

1.1

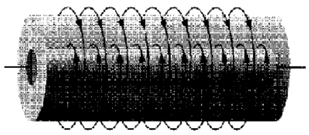
Използвайки теоремата за циркулацията на магнитното поле, пресметнете магнитното поле $\overrightarrow{B}$ на разстояние r от безкрайно дълъг и тънък проводник, по който тече ток I.

1.2

Използвайки теоремата за циркулацията на магнитното поле, пресметнете магнитното поле $\overrightarrow{B}$ за безкрайно дълъг прав соленоид. Ако тока който тече по намотките е I а броя намотки на единица дължина е n.

1.3

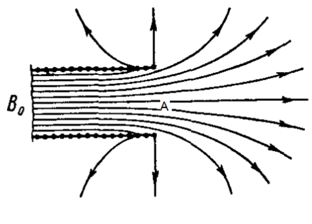
Използвайки принципа на суперпозицията и резултата от предишната задача, намерете магнитното поле $\overrightarrow{B}$ създадено от два коаксиални соленоида (фиг.1) ако токовете които текат по соленоидите са I_1 (за вътрешният соленоид) и I_2 (за външният соленоид), а броя на навивките на единица дължина на соленоидите са n_1 (за вътрешният соленоид) и n_2 (за външният соленоид).



Фигура 1:

1.4

Използвайки принципа на суперпозицията и резултата от задача 1.2 кажете колко ще е магнитното поле $\overrightarrow{B}$ по оста на полу-безкраен соленоид там където свършва соленоида (магнитното поле $\overrightarrow{B}$ в точка А от фиг.2).



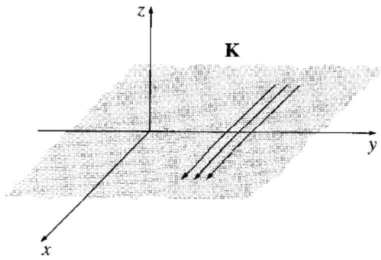
Фигура 2:

1.5

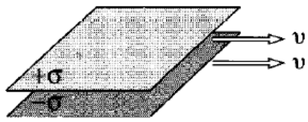
Намерете магнитното поле създадено от еднороден ток с повърхностна плътност K, който тече по безкрайна равнина, както е показана на фиг.3

1.6

Използвайки принципа на суперпозицията и резултата от предишната задача, намерете полето на две големи и успоредни плочи с повърхнини заряди σ за горната плоча и $-\sigma$ за долната плоча. Приемете че двете плочи се движат със скорост v както е показано на фиг.4



Фигура 3:



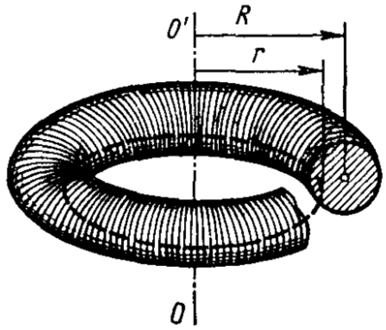
Фигура 4:

1.7

Какво ще е полето от предишната задача ако сменим посоката на скоростта на долната плоча, а ако сменим повърхниният заряд от $-\sigma$ с σ?

1.8

За задача 1.6 намерете при каква скорост на движение на плочите, магнитната сила ще балансира електричната сила.



Фигура 5:

1.9

Намерете магнитното поле в тор (фиг.5) ако броя на навивките на тора е N, а тока който тече по навивките е I.

1.10

Намерете магнитното поле на плътен безкраен цилиндър с радиус R ако по цялото сечение на цилиндъра тече ток I по направление на оста (еквивалентно може да считате, че е дадена повърхнината плътност на тока $j = I/\left(\pi R^2\right)$).

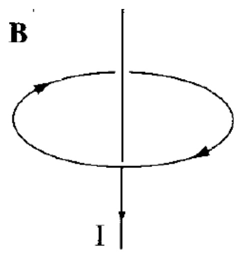
1.11

Ако сега в безкрайният цилиндър от предишната задача е изкопан цилиндричен процеп с ос успоредна на оста на цилиндъра и отместена на разстояние $\overrightarrow{l}$ то намерете магнитното поле в цилиндричният процеп.

Упътване: използвайте резултата от задача 1.10 и принципа на супер позиция.

Решения:

1.1 От симетрията на задачата следва, че магнитното поле $\overrightarrow{B}$ трябва да е еднакво във всички точки на разстояние r от проводника. По теоремата за циркулацията на магнитното поле следва, че ако изберем контура да е във формата на окръжност с радиус r и център центъра на проводника (виж фиг.6)



Фигура 6:

То имаме :

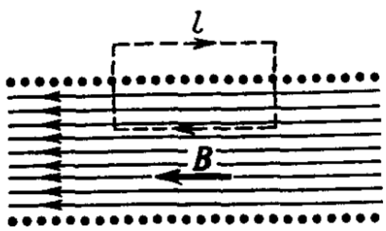
$$\oint \overrightarrow{B}.d\overrightarrow{l} = \left|\overrightarrow{B}\right| 2\pi r = \mu_0 I.$$

$\Rightarrow$

$$\left|\overrightarrow{B}\right| = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}.$$

1.2

Симетрията е цилиндрична. Нека първо покажем, че имаме само поле по оста на соленоида. За целта разглеждаме ток, който тече по направление на соленоида и нека допуснем че този ток създава положително радиално поле. Обръщайки посоката на тока обръщаме и посоката на радиалното поле, но обръщането посоката на тока е все едно сменяме точката от която гледаме соленоида (гледаме го от горе или от долу), което не трябва да променя полето $\Rightarrow$ нямаме радиално поле. Нека сега да приложим закона на Ампер за концентричен контур, понеже нямаме токове пробождащи контура (вярно е когато навивките са плътно една до друга и може да пренебрегнем тока течащ по посока с оста на соленоида) то имаме нулева циркулация и следователно нулево азимутално магнитно поле. Остава да имаме само поле по оста на соленоида.



Фигура 7:

Разглеждаме магнитното поле $\overrightarrow{B}$ вътре в соленоида. Нека да докажем че то е хомогенно. Това може лесно да се съобрази ако вземем един правоъгълен контур и сметнем циркулацията по него:

$$\oint \overrightarrow{B}.d\overrightarrow{l} = 0 \Leftrightarrow B(r_1)l - B(r_2)l = 0$$

$\Rightarrow$

$$B(r_1) = B(r_2)$$

Същото разсъждение важи и за пространството извън соленоида, но от съображение че на безкрайност полето трябва да е нула следва че нямаме поле извън соленоида.

Нека сега да вземем контура, който минава през вътрешната и външната част на соленоида, както е показано на фиг.7 тогава циркулацията е :

$$\oint \overrightarrow{B}.d\overrightarrow{l} = BL = \mu_0 \sum I \Leftrightarrow BL = \mu_0 nLI \Rightarrow B = \mu_0 nI$$

1.3

От предишната задача имаме, че извън двата соленоида нямаме магнитно поле. Вътре в пространството между двата соленоида имаме магнитно поле създадено само от соленоида по които тече ток I_2(външният соленоид) и полето е:

$$B_2 = \mu_0 n_2 I_2$$

в пространството на вътрешният соленоид имаме че полето е полето създавано от двата соленоида:

$$B = B_1 \pm B_2 = \mu_0 n_1 I_1 \pm \mu_0 n_2 I_2$$

знака $\pm$ зависи от това дали токовете са в еднаква посока или противоположна.

1.4

Ако добавим и втората половина на полу-безкрайният соленоид то ще имаме поле като на безкраен соленоид $\Rightarrow$ полето в точка A от фиг.2 е по оста на соленоида и е с големина половината от големината на безкрайният соленоид.

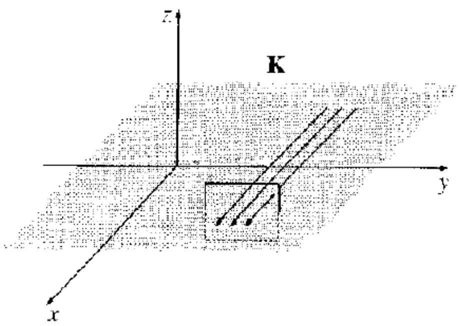
1.5

Нека първо да видим какво е направление на магнитното поле. Магнитното поле трябва да е перпендикулярно на тока течащ по повърхността $\Rightarrow$ не можем да имаме x компонента на полето. Не можем да имаме и z компонента на полето, понеже приноса на токовете течащи по положителни y и отрицателни ще се компенсират. Остава да имаме само y компонента на полето. Избираме контура по който ще смятаме циркулацията както е показан на фиг.8 тогава циркулацията е:

$$2BL = \mu_0 KL$$

$\Rightarrow$

$$B = \mu_0 K/2$$



Фигура 8:

1.6

Горната плоча създава поле което е

$$B_1 = \pm\mu_0 K_1/2 = \pm\mu_0 v\sigma/2$$

Където знака $+$ е съответно за полето под плочата, а знака $-$ за полето над плочата. Аналогично долната плоча създава поле:

$$B_2 = \pm\mu_0 K_2/2 = \mp\mu_0 v\sigma/2$$

Където знака $+$ за полето над долната плочата, а знака $-$ за полето под долната плочата $\Rightarrow$ полето между двете плочи е:

$$B = \mu_0 v\sigma/2 + \mu_0 v\sigma/2 = \mu_0 v\sigma$$

а извън тях е

$$B = \mu_0 v\sigma/2 - \mu_0 v\sigma/2 = 0$$

1.7

Ако сменим посоката на движение на долната плоча имаме, че полето между плочите е:

$$B = \mu_0 v\sigma/2 - \mu_0 v\sigma/2 = 0$$

А под тях е:

$$B = \mu_0 v\sigma$$

Над плочите съответно е:

$$B = -\mu_0 v\sigma$$

1.8

Електричното поле което създава долната плоча е:

$$E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$$

следователно електричната сила действаща на единица площ от горната плоча е:

$$\frac{F_E}{S} = \frac{qE}{S} = \sigma E = \frac{\sigma^2}{2\varepsilon_0}$$

магнитното поле което създава долната плоча е:

$$B = \frac{\mu_0 \sigma v}{2}$$

следователно магнитната сила действаща на единица площ на горната плоча е:

$$\frac{F_M}{S} = \frac{qvB}{S} = \sigma v B = \frac{\mu_0 \sigma^2 v^2}{2}$$

двете сили се компенсират, когато:

$$\frac{\sigma^2}{2\varepsilon_0} = \frac{\mu_0 \sigma^2 v^2}{2}$$

$\Rightarrow$

$$v = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}} = c$$

1.9

От съображение на симетрия е ясно, че магнитните линии ще са окръжности с център центъра на тора, за това взимаме и контура по който смятаме циркулацията да е такава окръжност с радиус $r \Rightarrow$

$$B 2\pi r = \mu_0 N I \quad \Rightarrow \quad B = \frac{\mu_0 N I}{2\pi r}$$

1.10

Нека изберем цилиндрична координатна система за решението на задачата. От симетрията на задачата следва, че магнитното поле $\overrightarrow{B} = (B_r, B_\alpha, B_z)$ трябва да е еднакво във всички точки на разстояние r от проводника и да не зависи от координатите z и α. От симетрията следва, че магнитното поле има само една компонента $\overrightarrow{B} = (0, B_\alpha, 0)$. Нека сега да разгледаме два случая $r > R$ и $r < R$.

За $r > R$ по теоремата за циркулацията на магнитното поле следва, че ако изберем контура да е във формата на окръжност с радиус r и център центъра на проводника имаме :

$$\oint \overrightarrow{B}.d\overrightarrow{l} = B_\alpha 2\pi r = \mu_0 I.$$

$\Rightarrow$

$$B_\alpha = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}.$$

Тоест за $r > R$ получихме същият резултат както в задача 1.1.

За $r < R$ по теоремата за циркулацията на магнитното поле следва, че ако изберем контура да е във формата на окръжност с радиус r и център центъра на проводника имаме :

$$\oint \overrightarrow{B}.d\overrightarrow{l} = B_\alpha 2\pi r = \frac{\mu_0 I r^2}{R^2}.$$

$\Rightarrow$

$$B_\alpha = \frac{\mu_0 I r}{2\pi R^2}.$$

Последното уравнение може да запишем като векторно уравнение по следният начин

$$\overrightarrow{B} = \frac{\mu_0}{2\pi R^2}\overrightarrow{I} \times \overrightarrow{r}.$$

Или като използваме плътността на тока $\overrightarrow{j} = \overrightarrow{I} / \left(\pi R^2\right) \Rightarrow$

$$\overrightarrow{B} = \frac{\mu_0}{2}\overrightarrow{j} \times \overrightarrow{r}.$$

1.11

Ако имаме цилиндър с цилиндричен процеп то ефективно може да представим системата като два плътни цилиндъра по единият тече ток с плътност $\overrightarrow{j}$ а другият е с -$\overrightarrow{j}$ тогава от принципа на суперпозицията имаме:

$$\overrightarrow{B} = \frac{\mu_0}{2}\overrightarrow{j} \times \overrightarrow{l}.$$