Електродинамика

Андон Рангелов, кабинет В 39, email: rangelov@phys.uni-sofia.bg , интернет страница на курса `http://ed.quantum-bg.org/`

Уравнение на Поасон е:

$$\vec{\nabla}.\vec{\nabla}\varphi = \Delta\varphi = -\frac{\rho}{\varepsilon_0},$$

ако нямаме обемно разпределени на зарядите то $\rho = 0$ и имаме уравнение на Лаплас:

$$\Delta\varphi = 0.$$

Оператора на Лаплас в декартова координатна система се дава като:

$$\Delta\varphi = \nabla^2\varphi = \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2},$$

в сферична координатна система се дава като:

$$\Delta\varphi = \nabla^2\varphi = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\varphi}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\vartheta}\frac{\partial}{\partial\vartheta}\left(\sin\vartheta\frac{\partial\varphi}{\partial\vartheta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\vartheta}\frac{\partial^2\varphi}{\partial\alpha^2},$$

а в цилиндрична се дава като:

$$\Delta\varphi = \nabla^2\varphi = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial\varphi}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial\alpha^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}.$$

Решаваме или уравнение на Поасон или частният случай на Лаплас с определени гранични условия.

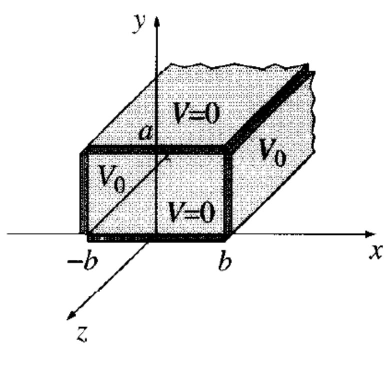
Задачи:

1.1 Какво е обемното разпределение на зарядите ако потенциалът е:
a) $\varphi(r) = ar^3 + b$, където a и b са константи;
b) $\varphi(r) = r^2\exp(-\lambda r)$.

1.2 Теоремата на Ърншоу гласи, че съвкупността от точкови заряди не би могла да бъде в равновесие, ако единствено зарядите си взаимодействат електростатично.

Докажете теоремата на Ърншоу като използвате уравнение на Поасон и факта, че потенциалната енергия на заряд q е $U(x,y,z) = q\varphi(x,y,z)$, където $\varphi(x,y,z)$ е потенциала на електричното поле.

1.3 Две безкрайно дълги метални плочи с потенциал $V = 0$ са поставени при $x = 0$ и $x = l$ между плочите в равнината перпендикулярно на тях (равнината xy) и през $z = 0$ има разпределен повърхнинен заряд с плътност $\sigma = \sigma_0\sin(\pi x/l)$. Намерете потенциала $\varphi(x,z)$ на електричното поле.



Фигура 1:

1.4 Две безкрайно дълги метални плочи с потенциал $V = 0$ са поставени при $y = 0$ и $y = a$ както е показано на фиг.1 други две метални плочи са поставени при $x = \pm b$ и са с потенциал V_0 (фиг.1). Ако всяка една от плочите е добре изолирана от останалите посредством изолация с пренебрежима големина то намерете потенциала φ в пространството между плочите.

1.5 Плоскостта xy ($z = 0$) е заредена с повърхнина плътност на заряда $\sigma = \sigma_0\sin(\alpha x)\sin(\beta y)$. Намерете потенциала на електричното поле в цялото пространство.

Решения:

1.1

a) Имаме уравнение на Поасон

$$\Delta\varphi(r) = -\frac{\rho}{\varepsilon_0},$$

за сферични координати имаме:

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\varphi(r)}{\partial r}\right) = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

$\Rightarrow$

$$\rho = -\frac{\varepsilon_0}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\left(ar^3+b\right)}{\partial r}\right) = -\frac{a\varepsilon_0}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(3r^4\right) = -\frac{12a\varepsilon_0 r^3}{r^2} = -12a\varepsilon_0 r$$

b) Имаме уравнение на Поасон

$$\Delta\varphi(r) = -\frac{\rho}{\varepsilon_0},$$

за сферични координати имаме:

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\varphi(r)}{\partial r}\right) = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

$\Rightarrow$

$$\begin{aligned}
\rho &= -\frac{\varepsilon_0}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\left(r^2\exp(-\lambda r)\right)}{\partial r}\right) = -\frac{\varepsilon_0}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(2r^3\exp(-\lambda r) - r^4\lambda\exp(-\lambda r)\right) = \\
&= -\frac{\varepsilon_0}{r^2}\left(6r^2\exp(-\lambda r) - 2r^3\lambda\exp(-\lambda r) - 4r^3\lambda\exp(-\lambda r) + r^4\lambda^2\exp(-\lambda r)\right) \\
&\Rightarrow\ \rho = -\varepsilon_0\left(6\exp(-\lambda r) - 6r\lambda\exp(-\lambda r) + r^2\lambda^2\exp(-\lambda r)\right)
\end{aligned}$$

1.2

Понеже имаме система само от свободни точкови заряди, то плътноста на зарядите е $\rho = 0$ и може да използваме уравнеине на Лаплас:

$$\Delta\varphi(x,y,z) = 0$$

ако умножим по q получаваме уравнение на Лаплас, но за потенциалната енергия на частицата:

$$\Delta\left[q\varphi(x,y,z)\right] = \Delta U(x,y,z) = 0$$

тоест втората производна на енергията е нула, което значи че нямаме екстремум и $\Rightarrow$ няма локален минимум на енергията $\Rightarrow$ конфигурацията не може да е устойчива с което теоремата е доказана.

1.3

От транслационната инвариантност по y следва, че потенциала не трябва да зависи от y ($\varphi(x,y,z) = \varphi(x,z)$). Решаваме уравнение на Лаплас в декартови координати за две области на пространството $z \geq 0$ и $z \leq 0$. За $z \geq 0$ имаме:

$$\Delta\varphi_1(x,z) = \frac{\partial^2\varphi_1(x,z)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi_1(x,z)}{\partial z^2} = 0$$

ще решим това уравнение по метода на разделяне на променливите като представим потенциала във вида:

$$\varphi_1(x,y,z) = X_1(x)\,Z_1(z)$$

$\Rightarrow$

$$\frac{1}{X_1(x)}\frac{\partial^2 X_1(x)}{\partial x^2} + \frac{1}{Z_1(z)}\frac{\partial^2 Z_1(z)}{\partial z^2} = 0$$

$\Rightarrow$

$$\begin{aligned}\frac{1}{X_1(x)}\frac{\partial^2 X_1(x)}{\partial x^2} &= -k^2\\ \frac{1}{Z_1(z)}\frac{\partial^2 Z_1(z)}{\partial z^2} &= k^2\end{aligned}$$

$\Rightarrow$

$$\begin{aligned}X_1(x) &= A_1\sin(kx)+A_2\cos(kx)\\ Z_1(z) &= A_3\exp(-zk)+A_4\exp(zk)\end{aligned}$$

понеже разгледахме частта от пространството с $z\geq 0$ то $A_4=0$ а от граничните условия $x=0$ и $x=l\Rightarrow A_2=0$ и $k=n\pi/l$ това са безброй много решения за $n=1,2,3...$, но понеже уравнението на Лаплас е линейно то имаме принципа на супер позицията $\Rightarrow$

$$\varphi_1(x,z)=X_1(x)\,Z_1(z)=\sum_{n=1}^{\infty}A_n\sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right)\exp\left(-z\frac{n\pi}{l}\right)$$

аналогично за $z\leq 0\Rightarrow$

$$\varphi_2(x,z)=\sum_{n=1}^{\infty}B_n\sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right)\exp\left(z\frac{n\pi}{l}\right)$$

от условието за непрекъснатост на потенциала върху повърхността xy при $z=0\Rightarrow\varphi_1(x,y,0)=\varphi_2(x,y,0)\Rightarrow$ $A_n=B_n$. А от другото гранично условие

$$\left(\frac{\partial\varphi_2}{\partial z}-\frac{\partial\varphi_1}{\partial z}\right)_{z=0}=\frac{\sigma}{\varepsilon_0}$$

$\Rightarrow A_{n\neq 1}=0$ и $A_1=\sigma_0 l/(2\pi\varepsilon_0)\Rightarrow$ окончателно имаме:

$$\begin{aligned}\varphi_1(x,z\geq 0) &= \frac{\sigma_0 l}{2\pi\varepsilon_0}\sin\left(\frac{\pi}{l}x\right)\exp\left(-z\frac{\pi}{l}\right)\\ \varphi_2(x,z\leq 0) &= \frac{\sigma_0 l}{2\pi\varepsilon_0}\sin\left(\frac{\pi}{l}x\right)\exp\left(z\frac{\pi}{l}\right)\end{aligned}$$

1.4

От транслационната инвариантност по z следва, че потенциала не трябва да зависи от z ($\varphi(x,y,z)=\varphi(x,y)$). Решаваме уравнението на Лаплас в декартова координатна система

$$\Delta\varphi(x,y)=\frac{\partial^2\varphi(x,y)}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi(x,y)}{\partial y^2}=0$$

за целта използваме метода на разделяне на променливите и представяме потенциала във вида:

$$\varphi(x,y)=X(x)\,Y(y)$$

$\Rightarrow$

$$\frac{1}{X(x)}\frac{\partial^2 X(x)}{\partial x^2}=-\frac{1}{Y(y)}\frac{\partial^2 Y(y)}{\partial y^2}$$

$\Rightarrow$

$$\begin{aligned}\frac{1}{X(x)}\frac{\partial^2 X(x)}{\partial x^2} &= p^2\\ \frac{1}{Y(y)}\frac{\partial^2 Y(y)}{\partial y^2} &= -p^2\end{aligned}$$

$\Rightarrow$

$$\begin{aligned}X(x) &= A\exp(px)+B\exp(-px)\\ Y(y) &= C\sin(py)+D\cos(py)\end{aligned}$$

а от симетрията спрямо x имаме $X(x) = X(-x) \Rightarrow A = B \Rightarrow \exp(px) + \exp(-px) = 2\cosh(px) \Rightarrow$

$$\varphi(x,y) = X(x)\,Y(y) = \cosh(px)\,(E\sin(py) + F\cos(py))$$

от условието на задачата имаме следните гранични условия:

$$\begin{aligned}\varphi(x,0) &= 0\\ \varphi(x,a) &= 0\\ \varphi(b,y) &= V_0\\ \varphi(-b,y) &= V_0\end{aligned}$$

от първите две условия $\Rightarrow F = 0$ и $p = n\pi/a \Rightarrow$

$$\varphi(x,y) = E\cosh\left(n\pi\frac{x}{a}\right)\sin\left(n\pi\frac{y}{a}\right), \quad n = 1, 2, 3, ...$$

Това са безброй много решения, но понеже уравнението на Лаплас е линейно то имаме принципа на супер позицията $\Rightarrow$

$$\varphi(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} E_n\cosh\left(n\pi\frac{x}{a}\right)\sin\left(n\pi\frac{y}{a}\right).$$

Ползвайки последните две гранични условия имаме:

$$\varphi(b,y) = \sum_{n=1}^{\infty} E_n\cosh\left(n\pi\frac{b}{a}\right)\sin\left(n\pi\frac{y}{a}\right) = V_0$$

за да намерим коефициентите E_n умножаваме последното уравнение по $\sin(k\pi y/a)$ където $k = 1, 2, 3, ...$ и след това интегрираме $\Rightarrow$

$$\sum_{n=1}^{\infty} E_n\cosh\left(n\pi\frac{b}{a}\right)\int_0^a \sin\left(n\pi\frac{y}{a}\right)\sin\left(k\pi\frac{y}{a}\right)dy = \int_0^a V_0\sin\left(k\pi\frac{y}{a}\right)dy$$

сега ползваме следната формула

$$\sin\alpha\sin\beta = \frac{1}{2}\left(\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)\right)$$

за да сметнем интеграла $\int_0^a \sin(n\pi y/a)\sin(k\pi y/a)\,dy = \frac{1}{2}\int_0^a \left(\cos\left(\frac{y\pi}{a}(n-k)\right) - \cos\left(\frac{y\pi}{a}(n+k)\right)\right)dy = 0$ ako $n \neq k$ и е $a/2$ ako $n = k \Rightarrow$

$$E_k = \frac{2V_0}{a\cosh\left(k\pi\frac{b}{a}\right)}\int_0^a \sin\left(k\pi\frac{y}{a}\right)dy = -\frac{2V_0}{k\pi\cosh\left(k\pi\frac{b}{a}\right)}\left(\cos(k\pi) - 1\right)$$

тоест за четни $k \Rightarrow E_k = 0$ а за нечетни $\Rightarrow E_k = 4V_0/\left(k\pi\cosh\left(k\pi\frac{b}{a}\right)\right) \Rightarrow$

$$\varphi(x,y) = \frac{4V_0}{\pi}\sum_{k=1,3,5,...}\frac{1}{k}\frac{\cosh\left(n\pi\frac{x}{a}\right)}{\cosh\left(k\pi\frac{b}{a}\right)}\sin\left(n\pi\frac{y}{a}\right).$$

1.5

Ще разделим пространството на две части $z \geq 0$ и $z \leq 0$.

За $z \geq 0$ имаме потенциала $\varphi_1(x,y,z)$ който удволетворява уравнение на Лаплас

$$\Delta\varphi_1(x,y,z) = 0$$

Ще решим това уравнение по метода на разделяне на променливите като представим потенциала във вида:

$$\varphi_1(x,y,z) = X_1(x)\,Y_1(y)\,Z_1(z)$$

в декартови координати $\Rightarrow$

$$\frac{1}{X_1(x)}\frac{\partial^2 X_1(x)}{\partial x^2} + \frac{1}{Y_1(y)}\frac{\partial^2 Y_1(y)}{\partial y^2} + \frac{1}{Z_1(z)}\frac{\partial^2 Z_1(z)}{\partial z^2} = 0$$

$\Rightarrow$

$$\begin{aligned}\frac{1}{X_1(x)}\frac{\partial^2 X_1(x)}{\partial x^2} &= -k^2\\ \frac{1}{Y_1(y)}\frac{\partial^2 Y_1(y)}{\partial y^2} &= -p^2\\ \frac{1}{Z_1(z)}\frac{\partial^2 Z_1(z)}{\partial z^2} &= k^2+p^2\end{aligned}$$

$\Rightarrow$

$$\begin{aligned}X_1(x) &= A_1\sin(kx+A_2)\\ Y_1(y) &= A_3\sin(py+A_4)\\ Z_1(z) &= A_5\exp\left(-z\sqrt{k^2+p^2}\right)+A_6\exp\left(z\sqrt{k^2+p^2}\right)\end{aligned}$$

От това че заряда е периодично разпределен по повърхнината $xy \Rightarrow Z_1(z\to\infty)\to 0$ тоест коефициентите $A_6=0$ $\Rightarrow$

$$\varphi_1(x,y,z) = X_1(x)\,Y_1(y)\,Z_1(z) = A_1A_3A_5\sin(kx+A_2)\sin(py+A_4)\exp\left(-z\sqrt{k^2+p^2}\right)$$

За $z\le 0$ имаме потенциала $\varphi_2(x,y,z)$ който удовлетворява уравнение на Лаплас

$$\Delta\varphi_2(x,y,z)=0$$

ще решим това уравнение по метода на разделяне на променливите като представим потенциала във вида:

$$\varphi_2(x,y,z) = X_2(x)\,Y_2(y)\,Z_2(z)$$

в декартови координати $\Rightarrow$

$$\frac{1}{X_2(x)}\frac{\partial^2 X_2(x)}{\partial x^2}+\frac{1}{Y_2(y)}\frac{\partial^2 Y_2(y)}{\partial y^2}+\frac{1}{Z_2(z)}\frac{\partial^2 Z_2(z)}{\partial z^2}=0$$

$\Rightarrow$

$$\begin{aligned}\frac{1}{X_2(x)}\frac{\partial^2 X_2(x)}{\partial x^2} &= -k^2\\ \frac{1}{Y_2(y)}\frac{\partial^2 Y_2(y)}{\partial y^2} &= -p^2\\ \frac{1}{Z_2(z)}\frac{\partial^2 Z_2(z)}{\partial z^2} &= k^2+p^2\end{aligned}$$

$\Rightarrow$

$$\begin{aligned}X_2(x) &= B_1\sin(kx+B_2)\\ Y_2(y) &= B_3\sin(py+B_4)\\ Z_2(z) &= B_5\exp\left(z\sqrt{k^2+p^2}\right)+B_6\exp\left(-z\sqrt{k^2+p^2}\right)\end{aligned}$$

от това, че заряда периодично разпредлеен по повърхността $xy \Rightarrow Z_2(z\to-\infty)\to 0$ тоест коефициента $B_6=0 \Rightarrow$

$$\varphi_2(x,y,z) = X_2(x)\,Y_2(y)\,Z_2(z) = B_1B_3B_5\sin(kx+B_2)\sin(py+B_4)\exp\left(z\sqrt{k^2+p^2}\right)$$

Имаме и две гранични условия:

$$\begin{aligned}\varphi_1(x,y,z=0) &= \varphi_2(x,y,z=0)\\ \left(\frac{\partial\varphi_2}{\partial z}-\frac{\partial\varphi_1}{\partial z}\right)_{z=0} &= \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\end{aligned}$$

от първото гранично условие $\Rightarrow$

$$A_1 A_3 A_5 \sin(kx + A_2) \sin(py + A_4) \exp\left(-0\sqrt{k^2+p^2}\right) = B_1 B_3 B_5 \sin(kx + B_2) \sin(py + B_4) \exp\left(0\sqrt{k^2+p^2}\right)$$

от тук получаваме

$$\begin{aligned}
A_1 A_3 A_5 &= B_1 B_3 B_5 = C \\
A_2 &= B_2 = A \\
A_4 &= B_4 = B
\end{aligned}$$

$\Rightarrow$

$$\begin{aligned}
\varphi_1(x,y,z) &= C \sin(kx + A) \sin(py + B) \exp\left(-z\sqrt{k^2+p^2}\right) \\
\varphi_2(x,y,z) &= C \sin(kx + A) \sin(py + B) \exp\left(z\sqrt{k^2+p^2}\right)
\end{aligned}$$

от второто гранично условие $\Rightarrow$

$$2C\sqrt{k^2+p^2} \sin(kx + A) \sin(py + B) = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} = \frac{\sigma_0}{\varepsilon_0} \sin(\alpha x) \sin(\beta y)$$

$\Rightarrow$

$$\begin{aligned}
k &= \alpha \\
p &= \beta \\
A &= B = 0 \\
C &= \frac{\sigma_0}{2\varepsilon_0\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}
\end{aligned}$$

Окончателно за потенциала имаме:

$$\begin{aligned}
\varphi_1(x,y,z) &= \frac{\sigma_0}{2\varepsilon_0\sqrt{\alpha^2+\beta^2}} \sin(\alpha x) \sin(\beta y) \exp\left(-z\sqrt{\alpha^2+\beta^2}\right) \\
\varphi_2(x,y,z) &= \frac{\sigma_0}{2\varepsilon_0\sqrt{\alpha^2+\beta^2}} \sin(\alpha x) \sin(\beta y) \exp\left(z\sqrt{\alpha^2+\beta^2}\right)
\end{aligned}$$