Андон Рангелов, кабинет B 39, email: rangelov@phys.uni-sofia.bg , интернет страница на курса `http://ed.quantum-bg.org/`

Теоремата на Гаус гласи:

Потока на векторното поле $\overrightarrow{E}\left(\overrightarrow{r}\right)$ през затворена повърхност е равен на алгебричната сума на зарядите затворени от повърхността разделен на ε_0.

Математически теоремата на Гаус се записва:

$$\oiint \overrightarrow{E}.d\overrightarrow{S} = \frac{q}{\varepsilon_0},$$

където $\oiint$ означава интегриране по цялата затворена повърхност.

В диференциална (локална) форма теоремата на Гаус дава едно от уравненията на Максуел:

$$\begin{aligned} \oiint \overrightarrow{E}.d\overrightarrow{S} &= \int \left(\overrightarrow{\nabla}.\overrightarrow{E}\right) dV = \frac{1}{\varepsilon_0}\int \rho dV \Rightarrow \\ \overrightarrow{\nabla}.\overrightarrow{E} &= \frac{\rho}{\varepsilon_0}, \end{aligned}$$

където ρ е обемната плътност на зарядите. Ако локалната форма на теоремата на Гаус се комбинира с определението за потенциал на електричното поле, се получава уравнение на Поасон:

$$\overrightarrow{\nabla}.\overrightarrow{\nabla}\varphi = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}.$$

Другото което е важно за електростатичното поле е, че то е консервативно, тоест работата която върши полето за преместване на единица заряд по затворен контур е нула:

$$\oint \overrightarrow{E}.d\overrightarrow{l} = 0,$$

Лесно се доказва, чрез теоремата на Стокс от математиката

$$\oint \overrightarrow{E}.d\overrightarrow{l} = \int \left(\overrightarrow{\nabla} \times \overrightarrow{E}\right).d\overrightarrow{S} = 0.$$

Задачи:

1.1 Използвайки теоремата на Гаус намерете интензитета на полето, което създава равномерно заредена безкрайна равнина с повърхнинен заряд σ.

1.2 Използвайки резултата от предишната задача намерете полето между две равномерно заредени плоскости с повърхнини заряди σ и $-\sigma$.

1.3 Безкрайно дълъг цилиндър с радиус a е зареден с повърхнина плътност на заряда σ. Използвайки теоремата на Гаус намерете интензитета на електричното поле създавано от цилиндъра.

1.4 Използвайки теоремата на Гаус намерете интензитета на електричното поле, която създава равномерно заредена сфера със заряд q и радиус R.

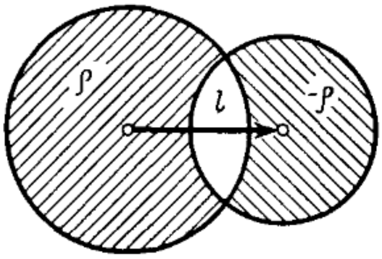
1.5 Използвайки теоремата на Гаус намерете интензитета на електричното поле, която създава равномерно заредено кълбо с заряд q и радиус R.

1.6 Намерете интензитета на електричното поле в областта в която се пресичат две кълба заредени с обемни плътности ρ и $-\rho$, ако разстоянието между центровете на кълбата е $\overrightarrow{l}$ фигура 1.

1.7 Гравитационната сила подобно на електричната се изменя по закона на обратните квадрати

$$\overrightarrow{F}_g = -\gamma\frac{m_1 m_2}{r^3}\overrightarrow{r},$$

а закона на Гаус е математическо следствие от това, че електричните сили се подчиняват на закона на обратните квадрати, така че закона на Гаус е в сила и за гравитационното поле. Теоремата на Гаус за гравитационното поле



Фигура 1:

може формално да се получи, като в известната в електростатиката форма $\oiint \overrightarrow{E}.d\overrightarrow{S} = \frac{q}{\varepsilon_0}$ се замени интензитета на електричното поле $\overrightarrow{E}$ с интензитета $\overrightarrow{g}$ на гравитационното поле (ускорението в гравитационното поле), заряда q с масата m и $1/(4\pi\varepsilon_0)$ с $-\gamma$ тогава имаме:

$$\oiint \overrightarrow{g}.d\overrightarrow{S} = -4\pi\gamma m,$$

където знака минус показва, че силовите линии на гравитационното поле винаги влизат към положителната маса създаваща полето.

Ползвайки тази аналогия и решението от предишната задача определете на колко ще е равно гравитационното ускорение създадено в пещера със сферична форма, която е издълбана в хомогенно кълбо с плътност ρ, ако разстоянието от центъра на пещерата до центъра на хомогенното кълбо е $\overrightarrow{l}$.

1.8 Потенциала на електричното поле в заредено кълбо зависи само от разстоянието r до центъра на кълбото по закона:

$$\varphi = ar^2 + b,$$

където a и b са константи. Намерете разпределението на обемните заряди в кълбото ρ.

1.9 Използвайки решението на задача 1.6 намерете напрежението E вътре в сфера, по която е разпределен заряд с повърхнина плътност $\sigma = \sigma_0 \cos\theta$, където σ_0 е константа а θ е полярният ъгъл.

1.10 Система се състои от равномерно заредена сфера с радиус R и заобикаляща я среда запълнена с обемна плътност на зарядите $\rho = a/r$, където a е положителна константа, а r е разстоянието до центъра на сферата. Намерете заряда на сферата при който електричното поле E няма да зависи от r.

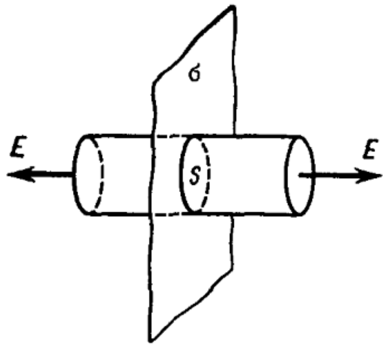
1.11 Средната плътност на заряда в електронният облак на атома на водорода е $\rho = -\frac{e}{\pi a^3}\exp\left(-\frac{2r}{a}\right)$, където a е Боровият радиус, а r е разстоянието до ядрото на атома на водорода. Намерете интензитета на електричното поле E в атома на водорода.

Решения:

1.1

От симетрията на задачата имаме, че интензитета на електричното поле $\overrightarrow{E}$ може да е само перпендикулярно на заредената плоскост. Поради тази симетрия е удобно да изберем цилиндрична затворена повърхност през която да сметнем потока (виж фигура 2). Прилагайки теоремата на Гаус имаме:

$$\oiint \overrightarrow{E}.d\overrightarrow{S} = \frac{q}{\varepsilon_0} \Rightarrow 2E\Delta S = \frac{\sigma \Delta S}{\varepsilon_0} \Rightarrow E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$$



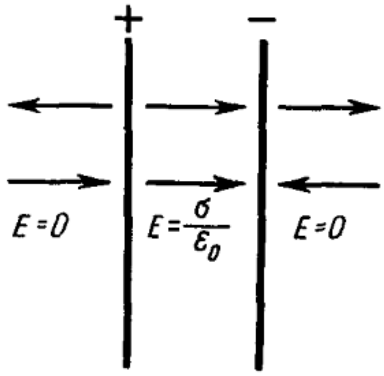
Фигура 2:

1.2

Използвайки резултата от предишната точка и от фигура 3 се вижда, че полето между двете плочи е

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$$

а извън тях е нула

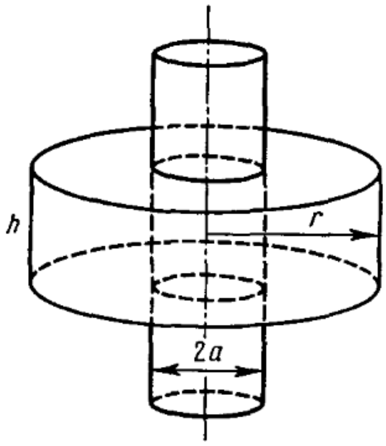


Фигура 3:

1.3

От симетрията на задачата имаме, че интензитета на електричното поле $\overrightarrow{E}$ може да е само перпендикулярно на зареденият цилиндър, за това избираме повърхността по която ще смятаме потока да е във формата на коаксиален цилиндър (виж фигура 4). От теорията на Гаус за $r > a \Rightarrow$

$$\oiint \overrightarrow{E}.d\overrightarrow{S} = \frac{q}{\varepsilon_0} \Rightarrow E2\pi rh = \frac{2\pi ah\sigma}{\varepsilon_0} \Rightarrow E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\ \frac{a}{r}$$



Фигура 4:

при $r < a$ нямаме заряд и $\Rightarrow E = 0$.

1.4

Полето е централно симетрично: интензитета е насочен перпендикулярно към повърхността, за това избираме гаусовата повърхност да е сфера с радиус r. За $r > R \Rightarrow$

$$\oiint \overrightarrow{E}.d\overrightarrow{S} = \frac{q}{\varepsilon_0} \ \Rightarrow E4\pi r^2 = \frac{q}{\varepsilon_0} \ \Rightarrow E = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

интензитета на електричното поле е като за точков товар със заряд q. За $r < R \Rightarrow \overrightarrow{E} = 0$ понеже няма заряди в пространството заградено от сферата.

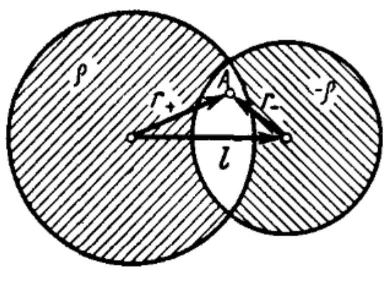
1.5

Задачата прилича много на предишната, полето отново има централна симетрия и за $r > R \Rightarrow$

$$\oiint \overrightarrow{E}.d\overrightarrow{S} = \frac{q}{\varepsilon_0} \ \Rightarrow E4\pi r^2 = \frac{q}{\varepsilon_0} \ \Rightarrow E = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

интензитета на електричното поле за $r > R$ е същото като на точков заряд (както в предишната задача). За $r < R$ $\Rightarrow$

$$\oiint \overrightarrow{E}.d\overrightarrow{S} = \frac{1}{\varepsilon_0}\int \rho dV \Rightarrow E4\pi r^2 = \frac{1}{\varepsilon_0}\frac{3q}{4\pi R^3}\frac{4\pi r^3}{3} \ \Rightarrow E = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{r}{R^3}$$



Фигура 5:

1.6

От предишната задача имаме, че интензитета на равномерното заредено кълбо е $E = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{r}{R^3}$ ползвайки обемната плътност на зарядите имаме:

$$\overrightarrow{E} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\overrightarrow{r}}{R^3} = \frac{\rho}{3\varepsilon_0}\overrightarrow{r}$$

така интензитета на полето в произволна точка А от пресечната област на двете кълба може да запишем, като суперпозиция от интензитетите създадени от положителното заредено кълбо и от отрицателното заредено кълбо (виж фигура 5) тогава имаме:

$$\overrightarrow{E}_+ + \overrightarrow{E}_- = \frac{\rho}{3\varepsilon_0}\overrightarrow{r}_+ - \frac{\rho}{3\varepsilon_0}\overrightarrow{r}_- = \frac{\rho}{3\varepsilon_0}\overrightarrow{l}$$

тоест полето в пресечната точка на двете кълбета е еднородно.

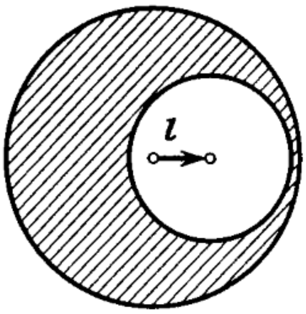
1.7

Може формално да разглеждаме кълбото като хомогенно кълбо с плътност ρ и формално там където имаме кухина да добавим друго кълбо с плътност $-\rho$ (виж фигура 6). От предишната задача имаме че интензитета създаден между две пресичащи се кълба с противоположни плътности на зарядите е

$$\overrightarrow{E} = \frac{\rho}{3\varepsilon_0}\overrightarrow{l}$$

правейки аналогията имаме $\varepsilon_0 \to -1/(4\pi\gamma) \Rightarrow$ ускорението в пещерата ще е:

$$\overrightarrow{g} = -\frac{4\pi\gamma\rho}{3}\overrightarrow{l}$$



Фигура 6:

1.8

Нека първо да намерим интензитета на електричното поле.

$$E_r = -\partial\varphi/\partial r = -2ar$$

след което смятаме потока през гаусова повърхност във форма на сфера с радиус r

$$4\pi r^2 E_r = q/\varepsilon_0$$

диференциала на това уравнение е

$$4\pi d\left(r^2 E_r\right) = \frac{dq}{\varepsilon_0} = \frac{1}{\varepsilon_0}\rho 4\pi r^2 dr,$$

където сме отчели, че заряда dq е между сфери с радиуси r и $r + dr \Rightarrow$

$$\begin{aligned} r^2 dE_r + 2rE_r dr &= \frac{1}{\varepsilon_0}\rho r^2 dr \Rightarrow \\ \frac{dE_r}{dr} + \frac{2}{r}E_r &= \frac{\rho}{\varepsilon_0} \end{aligned}$$

след заместване на $E_r = -2ar \Rightarrow$

$$\begin{aligned} -2a - 4a &= \frac{\rho}{\varepsilon_0} \Rightarrow \\ \rho &= -6a\varepsilon_0 \end{aligned}$$

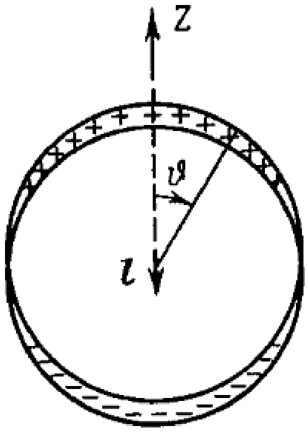
1.9

Нека да разгледаме две кълба с обемни плътности ρ и $-\rho$, чийто центрове са отместени на разстояние $l \Rightarrow$ от задача 1.6 имаме

$$\overrightarrow{E} = \frac{\rho}{3\varepsilon_0}\overrightarrow{l}$$

в нашият случай общият заряд е различен от нула само на повърхностният слой. При малки l имаме ситуация на повърхностна плътност на сферата. Дебелината на зареденият слой се определя от ъгъла θ (виж фигура 7) и е равен на $l\cos\theta \Rightarrow$ на единица площ се намира заряд $\sigma = \rho l\cos\theta = \sigma_0\cos\theta \Rightarrow \rho = \sigma_0/l \Rightarrow$

$$E = \frac{\sigma_0}{3\varepsilon_0}$$



Фигура 7:

1.10

Нека заряда на сферата да е q тогава използвайки теоремата на Гаус за повърхнина във формата на сфера с радиус r можем да запишем:

$$\begin{aligned} E4\pi r^2 &= \frac{q}{\varepsilon_0} + \frac{1}{\varepsilon_0}\int_R^r \rho 4\pi r^2 dr = \frac{q}{\varepsilon_0} + \frac{1}{\varepsilon_0}\int_R^r \frac{a}{r}4\pi r^2 dr \Rightarrow \\ E4\pi r^2 &= \frac{1}{\varepsilon_0}\left(q - 2\pi a R^2\right) + \frac{4\pi a r^2}{2\varepsilon_0} \end{aligned}$$

Очевидно е, че E не зависи от r когато $q - 2\pi a R^2 = 0 \Rightarrow$ тоест когато заряда е $q = 2\pi a R^2$ тогава полето е константно и е $E = a/\left(2\varepsilon_0\right)$

1.11

Използвайки теоремата на Гаус за повърхнина във формата на сфера с радиус r можем да запишем:

$$\begin{aligned} E4\pi r^2 &= \frac{e}{\varepsilon_0} + \frac{1}{\varepsilon_0}\int_0^r \rho 4\pi r^2 dr \Rightarrow \\ Er^2 &= \frac{e}{4\pi\varepsilon_0} - \frac{e}{\pi\varepsilon_0 a^3}\int_0^r \exp\left(-\frac{2r}{a}\right) r^2 dr = \frac{e}{2\pi\varepsilon_0 a^2}\int_0^r \exp\left(-\frac{2r}{a}\right) r^2 d\left(-\frac{2r}{a}\right) = \frac{e}{2\pi\varepsilon_0 a^2}\int_0^r r^2 d\left(\exp\left(-\frac{2r}{a}\right)\right) \end{aligned}$$

След което интегрираме по части $\Rightarrow$

$$\begin{aligned} Er^2 &= \frac{e}{4\pi\varepsilon_0} + \frac{e}{2\pi\varepsilon_0 a^2}\int_0^r r^2 d\left(\exp\left(-\frac{2r}{a}\right)\right) = \frac{e}{2\pi\varepsilon_0 a^2}r^2\exp\left(-\frac{2r}{a}\right) - \frac{e}{2\pi\varepsilon_0 a^2}\int_0^r 2r\exp\left(-\frac{2r}{a}\right)dr \Rightarrow \\ Er^2 &= \frac{e}{4\pi\varepsilon_0} + \frac{e}{2\pi\varepsilon_0 a^2}r^2\exp\left(-\frac{2r}{a}\right) + \frac{e}{2\pi\varepsilon_0 a}\int_0^r r d\left(\exp\left(-\frac{2r}{a}\right)\right) \end{aligned}$$

и отново интегрираме по части $\Rightarrow$

$$\begin{aligned}
Er^2 &= \frac{e}{4\pi\varepsilon_0} + \frac{e}{2\pi\varepsilon_0 a^2} r^2 \exp\left(-\frac{2r}{a}\right) + \frac{e}{2\pi\varepsilon_0 a} r \exp\left(-\frac{2r}{a}\right) - \frac{e}{2\pi\varepsilon_0 a}\int_0^r \exp\left(-\frac{2r}{a}\right) dr \Rightarrow \\
Er^2 &= \frac{e}{4\pi\varepsilon_0} + \frac{e}{2\pi\varepsilon_0 a^2} r^2 \exp\left(-\frac{2r}{a}\right) + \frac{e}{2\pi\varepsilon_0 a} r \exp\left(-\frac{2r}{a}\right) + \frac{e}{4\pi\varepsilon_0}\int_0^r \exp\left(-\frac{2r}{a}\right) d\left(-\frac{2r}{a}\right) \Rightarrow
\end{aligned}$$

Окончателно за интензитета на електричното поле имаме

$$E = \frac{e}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\left(1 + \frac{2r}{a}\left(1 + \frac{r}{a}\right)\right)\exp\left(-\frac{2r}{a}\right)$$