Електродинамика

Андон Рангелов, кабинет В 39, email: rangelov@phys.uni-sofia.bg , интернет страница на курса `http://ed.quantum-bg.org/`

Закона на Кулон дава силата между два точкови заряда q_1 и q_2, които са на разстояние $\vec{r}$ един от друг:

$$\vec{F}\left(\vec{r}\right) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1 q_2}{r^3}\vec{r}.$$

Ако заряда q си взаимодейства с по-вече от един заряд (примерно с N заряда) то е в сила принципа на суперпозицията:

$$\vec{F}\left(\vec{r}\right) = \sum_{i=1}^{N}\vec{F}_i\left(\vec{r}\right) = \sum_{i=1}^{N}\frac{qq_i}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\left(\vec{r}-\vec{r}_i\right)}{\left|r-r_i\right|^3} = q\sum_{i=1}^{N}\frac{q_i}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\left(\vec{r}-\vec{r}_i\right)}{\left|r-r_i\right|^3} = q\vec{E}\left(\vec{r}\right),$$

Където E е интензитета на електричното поле, ако зарядите са непрекъснато разпределени то интензитета се дава с:

$$\vec{E}\left(\vec{r}\right) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int\frac{\left(\vec{r}-\vec{r}_i\right)}{\left|r-r_i\right|^3}dq.$$

Вместо интензитета E, който е силовата характеристика на полето, е удобно да се използва скаларната величина потенциал на полето:

$$U\left(r\right) = \sum_{i=1}^{N}\frac{q_i}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{\left|r-r_i\right|}$$

Връзката между потенциала U(r) и интензитета E(r) е

$$\vec{E}\left(\vec{r}\right) = -gradU\left(\vec{r}\right)$$

Задачи:

1.1 Полу безкрайна права е заредена равномерно с линейна плътност λ. Намерете интензитета на електростатичното поле в точка, която се намира на разстояние y върху перпендикуляра издигнат от края на правата.

1.2 Тънък не проводящ прът с дължина $2L$ е зареден със заряд q. Намерете интензитета на електростатичното поле на разстояние x от центъра на пръта и разположен симетрично спрямо двата му края.

1.3 Тънък не проводящ обръч с радиус R е зареден с линейна плътност $\lambda(\varphi) = \lambda_0\cos\varphi$, където λ_0 е положителна константа а φ е азимутален ъгъл. Намерете интензитета на електростатичното поле в центъра на обръча.

1.4 На крива, зададена с уравнение $r\left(\theta\right) = r_0\exp\theta$ (r,θ са полярни координати) в равнината x,y е разпределен заряд с линейна плътност по закона $\kappa\left(\theta\right) = \kappa_0\exp\theta$ при $\theta_1 < \theta < \theta_2$ и $\kappa = 0$ при $\theta < \theta_1$ или $\theta > \theta_2$. Намерете потенциала по оста z.

1.5 Заряд е разпределен равномерно по повърхността на диск с радиус R, повърхнината плътност на заряда е σ. Намерете потенциала на електричното поле върху граничната окръжност на диска.

1.6 Потенциала на електричното поле има видът $U\left(x,y,z\right) = \alpha\left(xy - z^2\right)$. Намерете проекцията на интензитета на електричното поле по направление на вектора $\vec{A} = (1,0,3)$ в точка с координати $(2,1,-3)$.

1.7 Намерете потенциала и интензитета на електричното поле създаден от дипол, на голямо разстояние от него, ако електричният момент на дипола е $p = ql$. Кажете в кое направление е максимално и в кое е минимално.

1.8 Намерете потенциала на равномерно зареден обръч със заряд q и радиус R. Упътване: Използвайте елиптичният интеграл от 1 род:

$$K\left(k\right) = \int_0^{\pi/2}\frac{d\beta}{\sqrt{1-k^2\sin^2\beta}}$$

Решения:

1.1

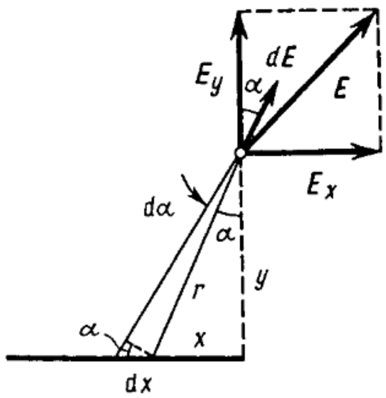
Разлагаме интензитета на две компоненти, едната от които е перпендикулярна на правата (компонентата $\vec{E}_y$) а другата е успоредна на правата (компонентата $\vec{E}_x$) (виж фигура 1)⇒

$$\begin{aligned}\vec{E}_x &= \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\int_0^\infty \frac{\sin\alpha}{r^2}dx \\ \vec{E}_y &= \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\int_0^\infty \frac{\cos\alpha}{r^2}dx\end{aligned}$$

но имаме $dx = \frac{rd\alpha}{\cos\alpha}$ и $r = \frac{y}{\cos\alpha}$ ⇒

$$\begin{aligned}\vec{E}_x &= \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 y}\int_0^{\pi/2} \sin\alpha d\alpha = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 y} \\ \vec{E}_y &= \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 y}\int_0^{\pi/2} \cos\alpha d\alpha = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 y}\end{aligned}$$

⇒ електричното поле е ориентирано по 45° спрямо правата и има големина $E = \sqrt{\vec{E}_y^2 + \vec{E}_x^2} = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 y}\sqrt{2}$



Фигура 1:

1.2

От симетрията е ясно, че интензитета на полето ще има само перпендикулярна посока спрямо пръта (виж фиг.2)⇒

$$dE = \frac{\lambda\cos\alpha}{4\pi\varepsilon_0 r^2}dl$$

където $\lambda = q/2L$ е линейната плътност на зарядите, а $\cos\alpha dl = rd\alpha$ и $r = x/\cos\alpha$ ⇒

$$dE = \frac{qrd\alpha}{8\pi L\varepsilon_0 r^2} = \frac{q\cos\alpha}{8\pi L\varepsilon_0 x}d\alpha$$

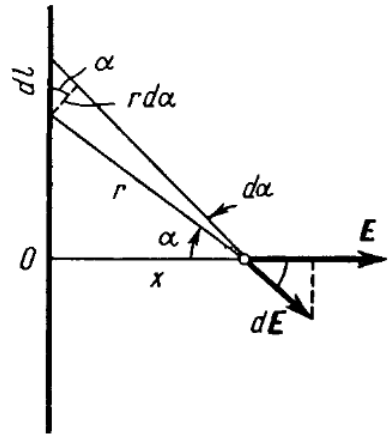
⇒

$$E = 2\int_0^\beta \frac{q\cos\alpha}{8\pi L\varepsilon_0 x}d\alpha = \frac{q\sin\beta}{4\pi L\varepsilon_0 x}$$

където $\sin\beta = L/\sqrt{L^2+x^2}$ ⇒

$$E = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 x\sqrt{L^2+x^2}}$$

1.3



Фигура 2:

От съображения на симетрия се вижда, че ще имаме само интензитет на полето по посоката в която $\varphi = 0$ (виж фиг.3). Проекцията на интензитета създаден от малък участък със заряд dq е:

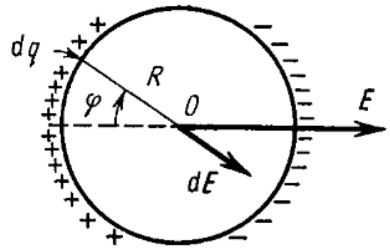
$$dE = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 R^2}\cos\varphi dq$$

но $dq = \lambda R d\varphi = \lambda_0 R \cos\varphi d\varphi \Rightarrow$

$$dE = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 R}\lambda_0 \cos^2\varphi d\varphi$$

$\Rightarrow$

$$E = \frac{\lambda_0}{4\pi\varepsilon_0 R}\int_0^{2\pi}\cos^2\varphi d\varphi = \frac{\lambda_0}{4\varepsilon_0 R}$$



Фигура 3:

1.4
Потенциала в точка по оста на симетрията (оста z) с координата z е

$$\varphi(z) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int \frac{\kappa}{\sqrt{r^2+z^2}}dl$$

елемента dl в полярни координати (цилиндрични координати с $z = 0$) се дава с (виж предишното упражнение)

$$dl = \left(dr^2 + r^2 d\theta^2\right)^{1/2}$$

но по условие на задачата $r(\theta) = r_0 \exp\theta \ \Rightarrow dr = r_0 \exp\theta d\theta = r d\theta \Rightarrow$

$$dl = \left(dr^2 + r^2 d\theta^2\right)^{1/2} = \left(dr^2 + dr^2\right)^{1/2} = \sqrt{2}dr$$

а за линейната плътност имаме $\kappa(\theta) = \kappa_0 \exp\theta = \kappa_0 r/r_0 \Rightarrow$

$$\varphi(z) = \frac{\sqrt{2}}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\kappa_0}{r_0}\int_{r_1}^{r_2}\frac{r}{\sqrt{r^2+z^2}}dr = \frac{\sqrt{2}}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\kappa_0}{r_0}\left(\sqrt{r_2^2+z^2}-\sqrt{r_1^2+z^2}\right)$$

където $r_{1,2} = r_0 \exp\theta_{1,2}$

1.5
Потенциала в точка O се задава с

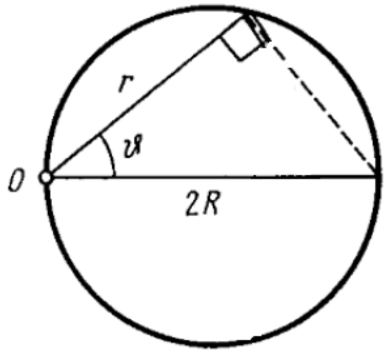
$$\varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int\frac{\sigma ds}{r}$$

удобно е да се работи в полярни координати (това са цилиндрични координати с z-та координата която е нула) $\Rightarrow ds = rd\theta dr$ (виж предишното упражнение) $\Rightarrow$

$$\varphi = \frac{\sigma}{4\pi\varepsilon_0}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\int_0^{r_{\max}}d\theta dr$$

където $r_{\max} = 2R\cos\theta \Rightarrow$

$$\varphi = \frac{\sigma}{4\pi\varepsilon_0}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}2R\cos\theta d\theta = \frac{\sigma R}{\pi\varepsilon_0}$$



Фигура 4:

1.6

$$\vec{E}\left(\vec{r}\right) = -gradU(x,y,z) = -\alpha(y,x,-2z)$$

проекцията на интензитета на електричното поле по направление на вектора $\vec{A}$ е

$$\frac{\vec{A}}{\left|\vec{A}\right|}.\vec{E}\left(\vec{r}\right) = -\frac{\alpha(y-6z)}{\sqrt{3^2+1}}$$

а в точка с координати $(2,1,-3) \Rightarrow$

$$\frac{\vec{A}}{\left|\vec{A}\right|}.\vec{E}(2,1,-3) = -\frac{19\alpha}{\sqrt{10}}$$

1.7
Пълният потенциал е сума от потенциалите създадени от положителният и от отрицателният заряд $\Rightarrow$

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{q}{r_+}-\frac{q}{r_-}\right)$$

когато търсим потенциала на големи разстояние от дипола то имаме $r >> l$ където l е разстоянието между положителният и отрицателният заряд на дипола. За разстоянията имаме:

$$\begin{aligned} r_+^2 &= r^2 + \frac{l^2}{4} - rl\cos\theta \\ r_-^2 &= r^2 + \frac{l^2}{4} + rl\cos\theta \end{aligned}$$

$\Rightarrow$

$$\begin{aligned} r_+ + r_- &\approx 2r \\ r_+ r_- &\approx r^2 \\ r_- - r_+ &\approx l\cos\theta \end{aligned}$$

$\Rightarrow$

$$\varphi = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r_+ r_-}(r_- - r_+) \approx \frac{ql\cos\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^2} = \frac{p\cos\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

интензитета намираме от връзката между интензитета и потенциала

$$\vec{E} = -grad\varphi$$

Удобно е да се използва симетрията и да се работи в полярни координати (като цилиндрични координати, но z=0) тогава за компонентите на интензитета имаме:

$$\begin{aligned} E_r &= -\frac{\partial\varphi}{\partial r} = \frac{2p\cos\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^3} \\ E_\theta &= -\frac{\partial\varphi}{r\partial\theta} = \frac{p\sin\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^3} \end{aligned}$$

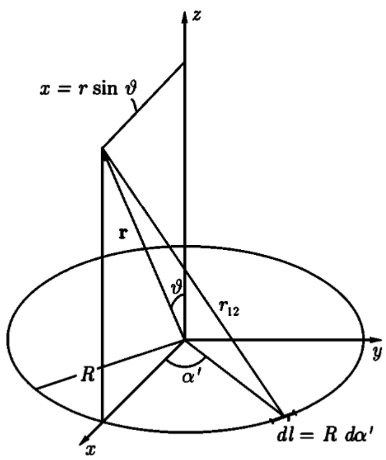
за модула на електричното поле имаме

$$E = \sqrt{E_r^2 + E_\theta^2} = \frac{p}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\sqrt{1 + 3\cos^2\theta}$$

Тоест полето е максимално за $\theta = 0$ и минимално за $\theta = \pi/2$

1.8

От фигура 5 съобразяваме:



Фигура 5:

$$r_{12} = \sqrt{r^2 + R^2 - 2rR\sin\theta\cos\alpha}$$

а за потенциала, който създава елемента dl имаме:

$$\varphi(r,\theta) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int\frac{dq}{r_{12}} = \frac{2}{4\pi\varepsilon_0}\frac{qR}{2\pi R}\int_0^{\pi}\frac{d\alpha}{\sqrt{r^2+R^2-2rR\sin\theta\cos\alpha}}$$

след като въведем означенията:

$$\begin{aligned}\alpha &= \pi-2\beta\\ k^2 &= \frac{4rR\sin\theta}{\sqrt{r^2+R^2+2rR\sin\theta}}\end{aligned}$$

то получаваме

$$\varphi(r,\theta) = \frac{q}{4\pi^2\varepsilon_0\sqrt{r^2+R^2+2rR\sin\theta}}\int_0^{\pi/2}\frac{d\beta}{\sqrt{1-k^2\sin^2\beta}} = \frac{qk}{8\pi^2\varepsilon_0\sqrt{rR\sin\theta}}K(k)$$

Забележка:
Нормираният елиптичен интеграл на Лежандър от 1 род се определя като:

$$K(k,\phi) = \int_0^{\phi}\frac{d\beta}{\sqrt{1-k^2\sin^2\beta}}$$

или във форма на Якоби

$$K(k,x) = \int_0^{x}\frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)(1-k^2y^2)}}.$$

Нормираният елиптичен интеграл на Лежандър от 2 род се определя като:

$$E(k,\phi) = \int_0^{\phi}\sqrt{1-k^2\sin^2\beta}\,d\beta$$

или след полагането $y=\sin\beta$

$$E(k,x) = \int_0^{x}\frac{\sqrt{1-k^2y^2}}{\sqrt{1-y^2}}dy.$$

В нашият случай имаме пълен елиптичен интеграл от 1-род:

$$K(k) = \int_0^{\pi/2}\frac{d\beta}{\sqrt{1-k^2\sin^2\beta}}$$

който може да се изрази със степенен ред като:

$$K(k) = \frac{\pi}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}\right]^2 k^{2n}$$

В историята на науката елиптични интеграли се явяват за първи път, когато се решава точно задачата за математично махало. За тези който искат да научат малко по-вече за елиптични интеграли препоръчвам да погледнат следният линк `http://ed.quantum-bg.org/elliptic-integrals.pdf`