Електродинамика

Андон Рангелов, кабинет В 39, email: rangelov@phys.uni-sofia.bg , интернет страница на курса http://ed.quantum-bg.org/

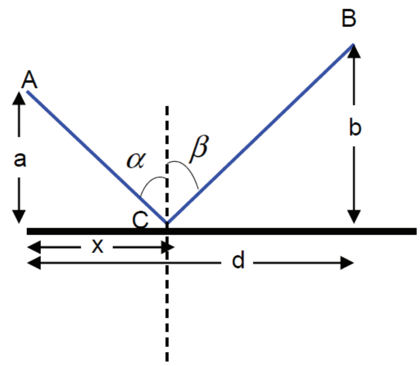
Принципа на минималното действие, който сте използвали в механиката за да изведете уравненията на Хамилтон е универсален принцип. Сега ще го използваме за да изведем законите в геометричната оптика (закона за отражение и за пречупване на лъчите). В оптиката принципа на минималното действие е известен като принципа на Ферма (Fermat's principle).

Принципа на Ферма гласи:

Светлината изминава разстоянието между две точки А и Б за най-кратко време.

Задача 1

Използвайки принципа на Ферма изведете закона за отражение на светлината (ъгъла на падане е равен на ъгъла на отражение). За целта разгледайте източник на светлина (точка А) и наблюдател (точка В) разположени над огледало както е показано на Фиг .



Задача 2

Използвайки принципа на Ферма изведете закона на Снелиус. За целта разгледайте източник на светлина (точка А) разположен в среда с показател на пречупване n_1 и наблюдател (точка В) разположен в среда с показател на пречупване n_2 както е показано на Фиг .

Задача 3

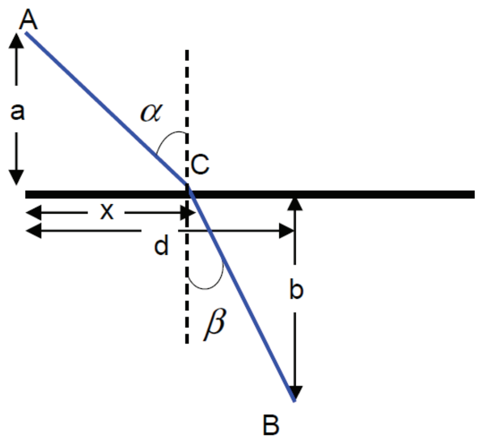
Спасител стои на брега когато забелязва давещ се във водата както е показано на Фиг . Спасителят бяга със скорост v_1 а може да плува със скорост v_2. Намерете в коя точка от брега той трябва да влезне във водата ($x =?$) за да може най-бързо да стигне до давещият се.

Забележка :

Използвайте принципа на Ферма за да решите задачата.

Задача 4

Как трябва да се движи паяка от Фиг. за да стигне най-бързо до мухата



Задача 5

Дадени са две точки A и B, разположени на различна височина, които са свързани с жица. Докажете, че кривата, по която пръстенчето ще се спусне под действие на силата на тежестта от точка A до точка B за най-кратко време, е дъга от циклоида.

Забележка:

Една крива $y\left(x\right)$ е циколида тогава и само тогава, когато удовлетворява уравнението:

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + 2y\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right) + 1 = 0$$

Задача 6

Покаже, че топчетата A и B лежащи на Циклоида както е показано на Фиг., ако са пуснати свободно да се търкалят без триене достигат до най-ниската точка C за едно и също време.

Забележка:

Уравнението на циклоидата се дава параметрично чрез

$$x = a\left(\theta - \sin\theta\right), \tag{1}$$

$$y = a\left(1 - \cos\theta\right), \tag{2}$$

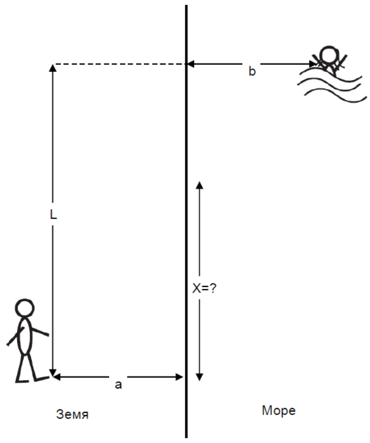
където $0 \leq \theta \leq \pi$ е параметризационата променлива а a е някаква константа.

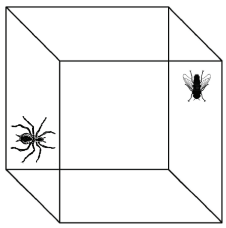
Задача 7

Нека сега да докажем добре известният фактът, че най-късото разстояние между две точки на повърхността на сфера е част от големия кръг на сферата, който свързва двете точки. Крива на минималната дължина между две точки в изкривено пространство се наричат геодезична и е обобщение на правата в равнината.

Задача 8

Определете уравнението на геодезичната върху прав кръгов цилиндър с радиус a.

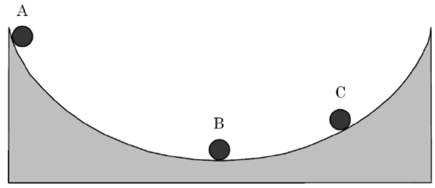


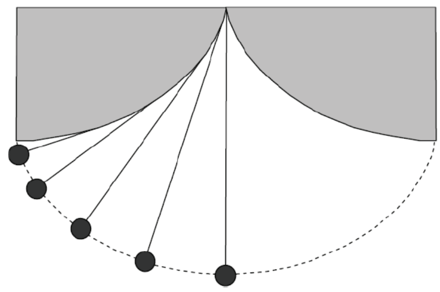


Решения:

Задача 1

Най-бързият път от точка A до огледалото и от точка B до огледалото са прави линии. Единственият въпрос е, къде върху огледалото трябва да бъде точката на отражение C? Нека x да е хоризонталното разстояние от точка A до точка на отражение C. Времето за което лъчът пътува от A до C е $t_1 = AB/c$, а времето за което лъча стига от точка C до точка B е $t_2 = BC/c$, където c е скоростта на светлината във вакуум. Тогава пълното





време е:

$$t = t_1 + t_2 = \frac{AB}{c} + \frac{BC}{c} = \frac{\sqrt{a^2 + x^2}}{c} + \frac{\sqrt{b^2 + (d-x)^2}}{c}, \tag{3}$$

търсим екстремалното врем $\Rightarrow$

$$\frac{dt}{dx} = 0 \Leftrightarrow \frac{x}{c\sqrt{a^2 + x^2}} - \frac{d-x}{c\sqrt{b^2 + (d-x)^2}} = 0,$$

като последното равенство можем да запишем като:

$$\frac{x}{\sqrt{a^2+x^2}} = \frac{d-x}{c\sqrt{b^2+(d-x)^2}} \Leftrightarrow \sin\alpha = \sin\beta \Leftrightarrow \alpha = \beta.$$

Задача 2

Най-бързият път във всякаква среда е права линия. Единственият въпрос е, къде на границата между двете среди трябва да бъде точката на пречупване C? Нека с x да означим хоризонталното разстояние от точка A до точка на пречупване C. Времето за което светлината стига от A до B е:

$$t = t_1 + t_2 = \frac{AB}{v_1} + \frac{BC}{v_2} = \frac{\sqrt{a^2+x^2}}{v_1} + \frac{\sqrt{b^2+(d-x)^2}}{v_2}, \tag{4}$$

търсим екстремалното врем $\Rightarrow$

$$\frac{dt}{dx} = 0 \Leftrightarrow \frac{x}{v_1\sqrt{a^2+x^2}} - \frac{d-x}{v_2\sqrt{b^2+(d-x)^2}} = 0,$$

като последното равенство можем да запишем като:

$$\frac{x}{v_1\sqrt{a^2+x^2}} = \frac{d-x}{v_2\sqrt{b^2+(d-x)^2}} \Leftrightarrow \frac{1}{v_1}\sin\alpha = \frac{1}{v_2}\sin\beta \Leftrightarrow \frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \frac{n_2}{n_1}.$$

Задача 3

Решава се като ползваме закона на Снелиус.

Задача 4

За решението виж Фиг.**??**

Задача 5

Нека $y(x)$ е търсената крива. При движението си по кривата пръстенчето има скорост $v = \sqrt{2gy}$. Тъй като търсим крива, по която движението се извършва за най-кратко време, ще направим аналогия с принципа на Ферма:

Ще разгледаме движението на пръстенчето като движение на светлинен лъч в среда с показател на пречупване, пропорционален на $y^{-1/2}$. Тогава скоростта на лъча ще е пропорционална на $y^{1/2}$. Оптично нееднородната среда можем да разгледаме като съвкупност от оптично еднородни хоризонтални слоеве с различни показатели на пречупване. Поради пречупване на границата между слоевете лъча се закривява, като от слой към слой спазва закона на Снелиус $\Rightarrow$

$$n_1\sin\alpha_1 = n_2\sin\alpha_2 = \ldots = n\sin\alpha = const,$$

където ъгъла α е ъгъла на падане върху произволен избран слой с показател на пречупване n. От друга страна имаме $n = ay^{-1/2}$, където a е константа, и $\cot\alpha = dy/dx \Rightarrow$

$$\begin{aligned} n\sin\alpha &= \frac{a}{\sqrt{y\left[1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]}} = const \Rightarrow \\ y\left[1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right] &= const \end{aligned}$$

деференцираме последният израз по $x \Rightarrow$

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + 2y\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right) + 1 = 0$$

Тази задача е известна като Брахистохрона и е била поставена през 1696 от Бернули
`http://en.wikipedia.org/wiki/Brachistochrone_curve`.
Блиска задача до задачата за Брахистохроната е задачата за Таутохрона
`http://en.wikipedia.org/wiki/Tautochrone_curve`.

Задача 6
Тръгвайки от уравненията

$$x = a(\theta - \sin\theta), \quad (5)$$
$$y = a(1 - \cos\theta), \quad (6)$$

намираме

$$\frac{dx}{d\theta} = a(\theta - \cos\theta), \quad (7)$$
$$\frac{dy}{d\theta} = a\sin\theta \quad (8)$$

$\Rightarrow$

$$\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2 = 2a^2(1 - \cos\theta) \quad (9)$$

От закон за запазване на енергията имаме, че при движението си по циклоидата топчето има скорост $v = \sqrt{2gy} \Rightarrow$

$$v = \frac{ds}{dt} = \sqrt{2gy} \Rightarrow dt = \frac{ds}{\sqrt{2gy}} = \frac{\sqrt{dx^2 + dy^2}}{\sqrt{2gy}} = \frac{a\sqrt{2(1 - \cos\theta)}}{\sqrt{2ga(1 - \cos\theta)}}d\theta, \quad (10)$$

$\Rightarrow$

$$T = \int_0^\pi \sqrt{\frac{a}{g}}d\theta \Rightarrow T = \pi\sqrt{\frac{a}{g}} \quad (11)$$

нека сега да пуснем топчето не от началото на координатната система ($x = 0, y = 0, \theta = 0$) а от произволен ъгъл θ_0 тогава от закон за запазване на енергията имаме, че при движението си по циклоидата топчето има скорост $v = \sqrt{2g(y - y_0)} = \sqrt{2ga(\cos\theta_0 - \cos\theta)} \Rightarrow$

$$T = \int_{\theta_0}^\pi \frac{a\sqrt{2(1 - \cos\theta)}}{\sqrt{2ga(\cos\theta_0 - \cos\theta)}}d\theta = \sqrt{\frac{a}{g}}\int_{\theta_0}^\pi \sqrt{\frac{1 - \cos\theta}{\cos\theta_0 - \cos\theta}}d\theta, \quad (12)$$

Използвайки, че

$$\cos\theta = 2\cos^2(\theta/2) - 1 \quad (13)$$

$\Rightarrow$

$$T = \sqrt{\frac{a}{g}}\int_{\theta_0}^\pi \frac{\sin(\theta/2)}{\sqrt{\cos^2(\theta_0/2) - \cos^2(\theta/2)}}d\theta. \quad (14)$$

Нека сега да направим следната смяна на променливите

$$\cos(\theta/2) = \cos(\theta_0/2)\sin(\eta) \Rightarrow \sin(\theta/2)\,d\theta = -2\cos(\theta_0/2)\cos\eta d\eta \Rightarrow \quad (15)$$
$$T = \sqrt{\frac{a}{g}}\int_{\theta_0}^\pi \frac{\sin(\theta/2)}{\sqrt{\cos^2(\theta_0/2) - \cos^2(\theta/2)}}d\theta = -2\sqrt{\frac{a}{g}}\int_{\pi/2}^0 \frac{\cos(\eta)}{\sqrt{1 - \sin^2(\eta)}}d\eta = \quad (16)$$
$$= 2\sqrt{\frac{a}{g}}\int_0^{\pi/2} d\eta = \pi\sqrt{\frac{a}{g}}. \quad (17)$$

Задача 7
Нека да работим в сферични координати с центъра на координатното начало центъра на сферата. Дължина на пътя от точка А до точка Б се дава със следният интеграл

$$I = \int_A^B dl = \int_A^B \sqrt{dr^2 + r^2d\theta^2 + r^2\sin^2\theta d\varphi^2} \quad (18)$$

Нашата цел е да намерим пътя с най-малката дължина на движение по сферата ($r = r_0$, където r_0 е радиуса на сферата). Условието за движение по повърхността на сферата е холономна връзка, която ограничава степените на свобода до 2. Тогава дължина на пътя от точка А до точка Б ще е

$$I = r_0 \int_A^B \sqrt{d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2} = r_0 \int_A^B \sqrt{\left(\frac{d\theta}{d\varphi}\right)^2 + \sin^2\theta} d\varphi \tag{19}$$

Може да запишем последното уравнение аналогично на действието (**??**), като вместо времето t ще имаме променливата φ а функцията аналогична на функцията на Лагранж ще е

$$L = r_0 \sqrt{\left(\frac{d\theta}{d\varphi}\right)^2 + \sin^2\theta} \tag{20}$$

понеже $\partial L/\partial\varphi = 0$, то имаме закон подобен на закон за запазване на енергията $\Rightarrow$

$$\frac{d}{d\varphi}\left(\left(\frac{d\theta}{d\varphi}\right)\frac{\partial L}{\partial\left(\frac{d\theta}{d\varphi}\right)} - L\right) = 0 \Leftrightarrow L - \left(\frac{d\theta}{d\varphi}\right)\frac{\partial L}{\partial\left(\frac{d\theta}{d\varphi}\right)} = C_1 \tag{21}$$

$\Rightarrow$

$$\sqrt{\left(\frac{d\theta}{d\varphi}\right)^2 + \sin^2\theta} - \left(\frac{d\theta}{d\varphi}\right)\frac{\partial\sqrt{\left(\frac{d\theta}{d\varphi}\right)^2 + \sin^2\theta}}{\partial\left(\frac{d\theta}{d\varphi}\right)} = C_1, \tag{22}$$

$\Rightarrow$

$$\frac{\sin^2\theta}{\sqrt{\left(\frac{d\theta}{d\varphi}\right)^2 + \sin^2\theta}} = C_1, \tag{23}$$

$\Rightarrow$

$$\frac{d\theta}{d\varphi} = \sin\theta\sqrt{\frac{\sin^2\theta}{C_1^2} - 1}, \tag{24}$$

$\Rightarrow$ Решението на това уравнение е

$$\varphi = \arcsin\left(\frac{\cot\theta}{C_1}\right) + C_2, \tag{25}$$

което може да пренапишем като

$$\cot\theta = C_1 \sin(\varphi - C_2), \tag{26}$$

$\Rightarrow$

$$\cot\theta = C_1 \sin(\varphi)\cos(C_2) - C_1\cos(\varphi)\sin(C_2), \tag{27}$$

умножавайки двете страни на последното уравнение с $r_0 \sin\theta \Rightarrow$

$$\underbrace{r_0\cos\theta}_{=z} = C_1\cos(C_2)\underbrace{r_0\sin\theta\sin(\varphi)}_{=y} - C_1\sin(C_2)\underbrace{r_0\sin\theta\cos(\varphi)}_{=x}, \tag{28}$$

$\Rightarrow$

$$z - C_1\cos(C_2)\,y + C_1\sin(C_2)\,x = 0. \tag{29}$$

Последното уравнение е уравнение на равнина минаваща през началото на координатната система (центъра на сферата).

Задача 8

В цилиндрични координати (ρ, θ, z), разстоянието се дава като

$$dl^2 = d\rho^2 + \rho^2 d\theta^2 + dz^2 \tag{30}$$

понеже радиуса е $\rho = a$ (намираме се върху цилиндъра) $\Rightarrow d\rho = 0 \Rightarrow$

$$dl^2 = a^2 d\theta^2 + dz^2 \Rightarrow \left(\frac{dl}{d\theta}\right)^2 = a^2 + \left(\frac{dz}{d\theta}\right)^2 \tag{31}$$

$\Rightarrow$

$$l = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \sqrt{a^2 + \left(\frac{dz}{d\theta}\right)^2} d\theta \tag{32}$$

Може да запишем последното уравнение аналогично на действието (**??**), като вместо времето t ще имаме променливата θ а функцията аналогична на функцията на Лагранж ще е

$$L = \sqrt{a^2 + \left(\frac{dz}{d\theta}\right)^2} \tag{33}$$

понеже $\partial L / \partial z = 0$, то за уравненията на Лагранж-Ойлер имаме:

$$\frac{d}{d\theta}\left(\frac{\partial L}{\partial \left(\frac{dz}{d\theta}\right)}\right) = 0 \Rightarrow \frac{\partial L}{\partial \left(\frac{dz}{d\theta}\right)} = C_1 \Rightarrow \frac{\frac{dz}{d\theta}}{\sqrt{a^2 + \left(\frac{dz}{d\theta}\right)^2}} = C_1 \tag{34}$$

$\Rightarrow$

$$dz = \sqrt{\frac{C_1^2 a^2}{1 - C_1^2}} d\theta \Rightarrow z = \frac{C_1 a}{\sqrt{1 - C_1^2}} \theta + C_2 \tag{35}$$