Електродинамика

Андон Рангелов, кабинет В 40, email: rangelov@phys.uni-sofia.bg , интернет страница на курса http://ed.quantum-bg.org/

Уравненията на Максуел в диференциална форма са :

$$\begin{aligned}
\vec{\nabla}.\vec{D} &= \rho, \quad (Gauss's\ law) \\
\vec{\nabla}.\vec{B} &= 0, \quad (Gauss's\ law\ for\ magnetism) \\
\vec{\nabla}\times\vec{E} &= -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}, \quad (Faraday's\ law) \\
\vec{\nabla}\times\vec{H} &= j+\frac{\partial\vec{D}}{\partial t}, \quad (Ampere's\ law)
\end{aligned}$$

където $\vec{E}$ е интензитета на електричното поле, $\vec{B}$ е интензитета на магнитното поле, $\vec{D}$ е електричната индукция ($\vec{D}=\varepsilon_0\vec{E}+\vec{P}$, $\vec{P}$ е вектора на поляризация, за линейни среди имаме $\vec{D}=\varepsilon\vec{E}$), $\vec{H}$ е магнитната индукция ($\vec{H}=\vec{B}/\mu_0-\vec{M}$, $\vec{M}$ е вектора на магнитизация, за линейни среди имаме $\vec{H}=\vec{B}/\mu$), ρ е плътност на свободните електрични заряди, j е плътност на електричният ток от свободните заряди.

Задачи:

1.1 Тръгвайки от уравненията на Максуел намерете уравненията които описват промяната на поляризацията на светлинен лъч, който се разпространява в посока z и е монохроматичен с честота ω ако: лъчът се разпространява в среда, която не е изотопна (диелектричната възприемчивост $\hat{\varepsilon}$ е тензор).

1.2 Намерете уравненията, които описват нелинейният процес на сумиране на две честоти в трета. Предположете че имате два колинеарни лъча с честоти ω_1 и ω_2, които се комбинират до честота $\omega_3=\omega_1+\omega_2$, в среда с квадратична нелинейност.

1.3 Ползвайки изведените уравнения от предишната задача, намерете интензитета на електричното поле като функция на дължината на пропагирането за втората хармонична в случай на среда в която изминението на фазовата разлика на вълновя вектора е нула.

1.4 Системата от диференциалните уравнения изведени в 1.2 се линеаризира при предположение, че едно от двете входните полета е силно сравнение с другото входно поле и следователно неговият интензитет почти не се мени по време на еволюцията. Това приближение дава възможност задачата за сумиране на честоти да се реши точно. Намерете интензитета на сумарното поле, ако изменението на фазовата разлика на вълновия вектора е нула за процеса ($\Delta k=0$).

1.5 Отново разгледайте линейният режим от предишната задача, но за разлика от преди вземете ($\Delta k\neq 0$). Какво ще се случи ако разликата във вълновите вектори се мени бавно от голямо отрицателно число до голямо положително число?

1.6 Решете нелинейната системата от диференциални уравнения от задача 1.2 , ако изменението на фазовата разлика на вълновия вектор е нула за процеса ($\Delta k=0$).

Упътване: Ползвайте елиптичните функции на Якоби, които се дефинират чрез обратната функция на елиптичен интеграл от първи род

$$\begin{aligned}
cn\,(u,k) &= \cos\phi \\
sn\,(u,k) &= \sin\phi \\
dn\,(u,k) &= \sqrt{1-k^2\sin^2\phi}
\end{aligned}$$

където

$$\begin{aligned}
\phi &= F^{-1}\,(u,k) \\
u &= F\,(\phi,k)=\int_0^{\phi}\frac{dt}{\sqrt{1-k^2\sin^2 t}}
\end{aligned}$$

1.7

Използвайки закона на Ом в металите ($\vec{j}=\sigma\vec{E}$), уравнението за непрекъснатост ($\vec{\nabla}.\vec{j}=-\frac{\partial}{\partial t}\rho$) и уравнението на Гаус в локална форма ($\vec{\nabla}.\left(\varepsilon\vec{E}\right)=\rho$) покажете, че свободни заряди поставени върху проводника се разнасят експоненциално бързо.

1.8

След като разбрахме, от предишната задача, че свободните заряди поставени върху метали се разнасят за достатъчно кратко време то можем да запишем уравненията на Максуел в метали по следният начин:

$$\begin{aligned} \vec{\nabla}.\vec{E} &= 0, \quad \vec{\nabla}\times\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}, \\ \vec{\nabla}.\vec{B} &= 0, \quad \vec{\nabla}\times\vec{B} = \mu\sigma\vec{E} + \mu\varepsilon\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}, \end{aligned}$$

където сме отчели: закона на Ом $\vec{j} = \sigma\vec{E}$ и линейните връзки $\vec{H} = \vec{B}/\mu$, $\vec{D} = \varepsilon\vec{E}$. Намерете вълновите уравнения за $\vec{E}$ и $\vec{B}$, който следват от горните уравнения на Максуел.

1.9

Използвайки телеграфните уравнения от предишната задача:

$$\Delta\vec{E} = \mu\sigma\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} + \mu\varepsilon\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2}, \qquad \Delta\vec{B} = \mu\sigma\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} + \mu\varepsilon\frac{\partial^2\vec{B}}{\partial t^2}$$

покажете, че тези уравнения имат решения във вида на плоско монохроматични вълни:

$$\vec{E}\left(z,t\right) = \vec{E}_0\exp\left[i\left(kz-\omega t\right)\right], \qquad \vec{B}\left(z,t\right) = \vec{B}_0\exp\left[i\left(kz-\omega t\right)\right],$$

и намерете k.

Решения:

1.1 Тръгваме от уравнения на Максуел

$$\begin{aligned}\nabla\cdot\vec{D} &= \rho \qquad \nabla\times\vec{E}=-\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}\\ \nabla\cdot\vec{B} &= 0 \qquad \nabla\times\vec{H}=\frac{\partial\vec{D}}{\partial t}+\vec{J}\end{aligned}$$

и приемаме, че нямаме свободни заряди и токове ($\rho=0$, $\vec{J}=0$).
Приемаме, че материала в който се разпространява светлината не е магнитен ($\mu\approx 1$)$\Rightarrow$ $\vec{H}=\vec{B}/\mu_0$,
но считаме че материал е неизотропен $\vec{D}=\varepsilon_0\vec{E}+\vec{P}=\varepsilon_0\hat{\varepsilon}.\vec{E}\Rightarrow$

$$\begin{aligned}\nabla\cdot\left(\hat{\varepsilon}.\vec{E}\right) &= 0 \qquad \nabla\times\vec{E}=-\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}\\ \nabla\cdot\vec{B} &= 0 \qquad \nabla\times\vec{B}=\frac{\hat{\varepsilon}}{c^2}\cdot\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}\end{aligned}$$

Ползвайки $\nabla\times\left(\nabla\times\vec{E}\right)=\nabla\left(\nabla.\vec{E}\right)-\nabla^2\vec{E}$ получаваме

$$\nabla^2\vec{E}=\frac{\hat{\varepsilon}}{c^2}\cdot\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2}$$

Ако приемем, че честотата на светлината е ω и се разпространяват в посока z то имаме

$$\vec{E}=\begin{pmatrix}A_x(z)\\ A_y(z)\\ 0\end{pmatrix}\exp(ikz-i\omega t)$$

Нека за простота да приемем z за една от основните оси на тензора на диелектричната възприемчивост на средата

$$\hat{\varepsilon}=\begin{pmatrix}\varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xy} & 0\\ \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{xx} & 0\\ 0 & 0 & \varepsilon_z\end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2}\begin{pmatrix}A_x(z)e^{ikz-i\omega t}\\ A_y(z)e^{ikz-i\omega t}\\ 0\end{pmatrix}=\frac{1}{c^2}\begin{pmatrix}\varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xy} & 0\\ \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{xx} & 0\\ 0 & 0 & \varepsilon_z\end{pmatrix}\cdot\frac{\partial^2}{\partial t^2}\begin{pmatrix}A_x(z)e^{ikz-i\omega t}\\ A_y(z)e^{ikz-i\omega t}\\ 0\end{pmatrix}$$

пишем уравнението на вълната като две скаларни уравнения

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2}{\partial z^2}A_x+2ik\frac{\partial}{\partial z}A_x-k^2A_x &= -\frac{\omega^2}{c^2}\varepsilon_{xx}A_x-\frac{\omega^2}{c^2}\varepsilon_{xy}A_y\\ \frac{\partial^2}{\partial z^2}A_y+2ik\frac{\partial}{\partial z}A_y-k^2A_y &= -\frac{\omega^2}{c^2}\varepsilon_{xx}A_y-\frac{\omega^2}{c^2}\varepsilon_{yy}A_y\end{aligned}$$

В приближение на бавната вълна (slowly varying amplitude approximation) $\left|\frac{\partial^2}{\partial z^2}A_{x,y}\right|\ll\left|\frac{\partial}{\partial z}A_{x,y}\right|$ може да пренебрегнем втората производна сравнение с първата производна $\Rightarrow$

$$\begin{aligned}2ik\frac{\partial}{\partial z}A_x &= \left(k^2-\frac{\omega^2}{c^2}\varepsilon_{xx}\right)A_x-\frac{\omega^2}{c^2}\varepsilon_{xy}A_y\\ 2ik\frac{\partial}{\partial z}A_y &= -\frac{\omega^2}{c^2}\varepsilon_{xx}A_y+\left(k^2-\frac{\omega^2}{c^2}\varepsilon_{yy}\right)A_y\end{aligned}$$

имайки предвид, че $k^2=\frac{\omega^2}{c^2}\varepsilon_z\Rightarrow$

$$i\frac{\partial}{\partial z}\begin{pmatrix}A_x\\ A_y\end{pmatrix}=\frac{\omega}{2c\sqrt{\varepsilon_z}}\begin{pmatrix}\varepsilon_z-\varepsilon_{xx} & -\varepsilon_{xy}\\ -\varepsilon_{xy} & \varepsilon_z-\varepsilon_{yy}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}A_x\\ A_y\end{pmatrix}$$

Изразявайки стойности на електричният тензор в така избраната отправна система чрез собствените стойности на електричният тензор (направете подробно сами) имаме:

$$
\begin{aligned}
\varepsilon_{xx} &= \frac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{2}\cos(2\varphi) \\
\varepsilon_{yy} &= \frac{\varepsilon_y - \varepsilon_x}{2}\cos(2\varphi) \\
\varepsilon_{xy} &= \frac{\varepsilon_y - \varepsilon_x}{2}\sin(2\varphi)
\end{aligned}
$$

Тогава последното диференциално уравнение е идентично с нестационарното уравнение на Шрьодингер за квантова система с две нива, но вместо времето имаме координатата z (членът $\omega\sqrt{\varepsilon_z}/2c$ е несъществен и може да се елиминира при смяна на променливите $A_{x,y} = \tilde{A}_{x,y}e^{i\omega z\sqrt{\varepsilon_z}/2c}$ проверете сами):

$$
i\frac{\partial}{\partial z}\begin{pmatrix} \tilde{A}_x \\ \tilde{A}_y \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -\Delta & \Omega \\ \Omega & \Delta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \tilde{A}_x \\ \tilde{A}_y \end{pmatrix},
$$

където

$$
\begin{aligned}
\Omega &= \eta\sin(2\varphi) \\
\Delta &= \eta\cos(2\varphi) \\
\eta &= \frac{\omega(\varepsilon_x - \varepsilon_y)}{2c\sqrt{\varepsilon_z}}
\end{aligned}
$$

За вълнови пластина избираме $\varphi = 45^\circ \Rightarrow$

$$
i\frac{\partial}{\partial z}\begin{pmatrix} \tilde{A}_x \\ \tilde{A}_y \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & \eta \\ \eta & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \tilde{A}_x \\ \tilde{A}_y \end{pmatrix}
$$

$\Rightarrow$

$$
\begin{aligned}
i\frac{\partial}{\partial z}\left(\tilde{A}_x + \tilde{A}_y\right) &= \frac{\eta}{2}\left(\tilde{A}_x + \tilde{A}_y\right) \\
i\frac{\partial}{\partial z}\left(\tilde{A}_x - \tilde{A}_y\right) &= -\frac{\eta}{2}\left(\tilde{A}_x - \tilde{A}_y\right)
\end{aligned}
$$

$\Rightarrow$

$$
\begin{aligned}
\tilde{A}_x(z) &= \frac{1}{2}\left(\tilde{A}_x(0) + \tilde{A}_y(0)\right)e^{-i\eta z/2} + \frac{1}{2}\left(\tilde{A}_x(0) - \tilde{A}_y(0)\right)e^{i\eta z/2} \\
\tilde{A}_y(z) &= \frac{1}{2}\left(\tilde{A}_x(0) + \tilde{A}_y(0)\right)e^{-i\eta z/2} - \frac{1}{2}\left(\tilde{A}_x(0) - \tilde{A}_y(0)\right)e^{i\eta z/2}
\end{aligned}
$$

ако първоначално имаме хоризонтална поляризация ($\tilde{A}_x(0) = 1, \tilde{A}_y(0) = 0$) $\Rightarrow$

$$
\begin{aligned}
\tilde{A}_x(z) &= \frac{1}{2}e^{-i\eta z/2} + \frac{1}{2}e^{i\eta z/2} = \cos\left(\frac{\eta z}{2}\right) \\
\tilde{A}_y(z) &= \frac{1}{2}e^{-i\eta z/2} - \frac{1}{2}e^{i\eta z/2} = -i\sin\left(\frac{\eta z}{2}\right)
\end{aligned}
$$

ето защо можем да имаме накрая вертикална поляризация ($\left|\tilde{A}_y(z)\right| = 1$) ако $\frac{\eta z}{2} = \frac{\pi}{2}$ или дясно/ляво кръгова поляризация ($\tilde{A}_x(z) = 1/2, \tilde{A}_y(z) = \pm i/2$) ако $\frac{\eta z}{2} = \mp\frac{\pi}{4}$. Това са така наречените вълнови пластинки (ламбда или ламбда/2). Очевидно вълнова пластина която работи като ламбда/2 за дебелина z и честота ω няма да е ламбда/2 за същата дебелина и различна честота понеже $\eta(\omega, \varepsilon_x(\omega) - \varepsilon_y(\omega), \varepsilon_z(\omega))$. Но с комбинация от ламбда пластини (ламбда/2) може да се направи ефективна ламбда/2 (ламбда) пластина (за повече информация този линк `http://arxiv.org/abs/1110.1289`).

Идеята схематично е дадена по-долу:

Еволюционната матрица (матрица на Джонс, Jones matrix) написана в базиса от ляво-дясно кръгова поляризирана светлина е

$$
\mathbf{J}_\theta(\varphi) = \begin{bmatrix} \cos(A/2) & i\sin(A/2)\,e^{2i\varphi} \\ i\sin(A/2)\,e^{-2i\varphi} & \cos(A/2) \end{bmatrix}.
$$

където $A = 2\pi L(n_f - n_s)/\lambda$, λ е вакуумна дължина на вълната, n_f и n_s са показатели на пречупване за бърза и бавна ос съответно, а L дебелината на пластината.

1/2 и 1/4 вълнови пластини завъртени на ъгъл φ, $(\lambda/2)_\varphi$ и $(\lambda/4)_\varphi$, се описват съответно от следните матрици $\mathbf{J}_\varphi(\pi)$ и $\mathbf{J}_\varphi(\pi/2)$.

Тогава последователност от N вълнови пластини ще имат общ пропагатор, който се дава като:

$$\mathbf{J}^{(N)} = \mathbf{J}_{\varphi_N}(A_N)\,\mathbf{J}_{\varphi_{N-1}}(A_{N-1})\cdots\mathbf{J}_{\varphi_1}(A_1)\,.$$

Мързи ме да пиша така, че ще развия в ред на Тейлор лявата страна и ще покажа, че избирайки определени стойности на φ_N може да се занулят членове до произволен порядък в развитието на реда $\Rightarrow$ имаме вълнова пластина която зависимостта от честотата може да се контролира с произволна точност....

1.2 Тръгваме от уравнения на Максуел

$$\begin{aligned}\nabla\cdot\vec{D} &= \rho \qquad \nabla\times\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}\\ \nabla\cdot\vec{B} &= 0 \qquad \nabla\times\vec{H} = \frac{\partial\vec{D}}{\partial t} + \vec{J}\end{aligned}$$

и приемаме, че нямаме свободни заряди и токове ($\rho = 0$, $\vec{J} = 0$).

Приемаме, че материала в който се разпространява светлината е не магнитен ($\mu \approx 1$)$\Rightarrow$ $\vec{H} = \vec{B}/\mu_0$,

Също приемаме, че средата е изотопна (електричната възприемчивост е скалар), но нелинейна среда $\vec{D} = \varepsilon_0\vec{E} + \vec{P}$ където

$$\vec{P} = \vec{P}^{(1)} + \vec{P}^{(NL)} = \varepsilon_0\varkappa\vec{E} + \varkappa^{(2)}\vec{E}^2 + \varkappa^{(3)}\vec{E}^3 + ...$$

$\Rightarrow$

$$\begin{aligned}\vec{D} &= \vec{D}^{(1)} + \vec{P}^{(NL)}\\ \vec{D}^{(1)} &= (1+\varkappa)\,\varepsilon_0\vec{E} = \varepsilon\varepsilon_0\vec{E}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\nabla\cdot\left(\vec{D}\right) &= 0 \qquad \nabla\times\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}\\ \nabla\cdot\vec{B} &= 0 \qquad \nabla\times\vec{B} = \mu_0\frac{\partial\vec{D}}{\partial t}\end{aligned}$$

Ползвайки $\nabla\times\left(\nabla\times\vec{E}\right) = \nabla\left(\nabla.\vec{E}\right) - \nabla^2\vec{E}$ получаваме

$$\nabla^2\vec{E} - \frac{1}{\varepsilon_0 c^2}\frac{\partial^2\vec{D}}{\partial t^2} = 0$$

имайки предвид, че $\vec{D} = \vec{D}^{(1)} + \vec{P}^{(NL)} = \varepsilon\varepsilon_0\vec{E} + \vec{P}^{(NL)} \Rightarrow$

$$\nabla^2\vec{E} - \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0 c^2}\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2} = \frac{1}{\varepsilon_0 c^2}\frac{\partial^2\vec{P}^{(NL)}}{\partial t^2}$$

приемайки

$$\vec{E} = \sum\vec{E}_l \qquad \vec{D}^{(1)} = \sum_l\vec{D}_l^{(1)} \qquad \vec{P}^{(NL)} = \sum\vec{P}_l^{(NL)}$$

където

$$\begin{aligned}E_l &= A_l\exp\left(ik_l z - i\omega_l t\right)\\ D_l^{(1)} &= \varepsilon\left(\omega_l\right)\varepsilon_0 A_l\exp\left(ik_l z - i\omega_l t\right)\end{aligned}$$

където $k_l = n_l\omega_l/c$ и $n_l = \sqrt{\varepsilon\left(\omega_l\right)\mu\left(\omega_l\right)} \approx \sqrt{\varepsilon\left(\omega_l\right)}$

За трите честоти имаме индекса $l = 1, 2, 3$ и пишем вълново уравнение за един от индексите, да речем $l = 3 \Rightarrow$

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial z^2}A_3 + 2ik_3\frac{\partial}{\partial z}A_3 - k_3^2 A_3 + \frac{\omega_3^2}{c^2}\varepsilon(\omega_3) A_3\right]\exp(ik_3 z - i\omega_3 t) = \frac{-2\varkappa^{(2)}\omega_3^2}{c^2}A_1 A_2 \exp(ik_1 z + ik_2 z - i\omega_3 t)$$

В приближение на бавната вълна (slowly varying amplitude approximation) $\left|\frac{\partial^2}{\partial z^2}A_{x,y}\right| \ll \left|\frac{\partial}{\partial z}A_{x,y}\right| \Rightarrow$

$$i\frac{\partial}{\partial z}A_3 = \frac{-\varkappa^{(2)}\omega_3^2}{k_3 c^2}A_1 A_2 \exp(ik_1 z + ik_2 z - ik_3 z)$$

Аналогично за $l = 1, 2 \Rightarrow$

$$\begin{aligned} i\frac{\partial}{\partial z}A_1 &= \frac{-\varkappa^{(2)}\omega_1^2}{k_1 c^2}A_2^* A_3 \exp(-ik_1 z - ik_2 z + ik_3 z) \\ i\frac{\partial}{\partial z}A_2 &= \frac{-\varkappa^{(2)}\omega_2^2}{k_2 c^2}A_1^* A_3 \exp(-ik_1 z - ik_2 z + ik_3 z) \end{aligned}$$

След симетризиране (направете сами симетризирането като положите $A_{1,2,3} = \frac{\omega_{1,2,3}}{\sqrt{k_{1,2,3}}}\tilde{A}_{1,2,3}$) имаме:

$$\begin{aligned} i\frac{\partial}{\partial z}A_1 &= \Omega A_2^* A_3 \exp(-i\Delta k z) \\ i\frac{\partial}{\partial z}A_2 &= \Omega A_1^* A_3 \exp(-i\Delta k z) \\ i\frac{\partial}{\partial z}A_3 &= \Omega A_1 A_2 \exp(i\Delta k z) \end{aligned}$$

където $\Omega = \frac{-\varkappa^{(2)}\omega_1\omega_2\omega_3}{\sqrt{k_1 k_2 k_3 c^2}}$ а фазовата разлика Δk се дава като $\Delta k = k_1 + k_2 - k_3$.
1.3 В случай на втория хармоник имаме $A_1 = A_2 = A_\omega, A_3 = A_{2\omega}$ както и $\omega_1 = \omega_2 = \omega, \omega_3 = 2\omega \Rightarrow$

$$\begin{aligned} i\frac{\partial}{\partial z}A_\omega &= \Omega A_\omega^* A_{2\omega} \exp(-i\Delta k z) \\ i\frac{\partial}{\partial z}A_{2\omega} &= \Omega A_\omega^2 \exp(i\Delta k z) \end{aligned}$$

По условие на задачата $\Delta k = 0 \Leftrightarrow 2k_\omega = k_{2\omega}$ (phase maching case) $\Rightarrow$

$$\begin{aligned} i\frac{\partial}{\partial z}A_\omega &= \Omega A_\omega^* A_{2\omega} \\ i\frac{\partial}{\partial z}A_{2\omega} &= \Omega A_\omega^2 \end{aligned}$$

Сега не е трудно да се съобрази, че решението на тази система се дава като:

$$\begin{aligned} A_\omega(z) &= \frac{A_\omega(z=0)}{\cosh(z\Omega)} \\ A_{2\omega}(z) &= -iA_\omega(z=0)\tanh(z\Omega) \end{aligned}$$

1.4 Тръгваме от следните уравнения

$$\begin{aligned} i\frac{d}{dz}A_1 &= \Omega A_2^* A_3 \exp[-i\Delta k z], \\ i\frac{d}{dz}A_2 &= \Omega A_1^* A_3 \exp[-i\Delta k z], \\ i\frac{d}{dz}A_3 &= \Omega A_1 A_2 \exp[i\Delta k z]. \end{aligned}$$

и използваме от условието на задачата $\Delta k = 0$, както и факта че $A_1 = const$ ($\frac{d}{dz}A_1 = 0$)$\Rightarrow$

$$
\begin{aligned}
0 &= 0, \\
i\frac{d}{dz}A_2 &= \tilde{\Omega}A_3, \\
i\frac{d}{dz}A_3 &= \tilde{\Omega}A_2,
\end{aligned}
$$

където $\tilde{\Omega} = \Omega A_1$, тогава последните две диференциални уравнения са същата система като в задача 1.1 и лесно може да се използва резултата от там (повторете сами в къщи).

1.5 Тръгваме от следните уравнения

$$
\begin{aligned}
i\frac{d}{dz}A_1 &= \Omega A_2^* A_3 \exp\left[-i\Delta kz\right], \\
i\frac{d}{dz}A_2 &= \Omega A_1^* A_3 \exp\left[-i\Delta kz\right], \\
i\frac{d}{dz}A_3 &= \Omega A_1 A_2 \exp\left[i\Delta kz\right].
\end{aligned}
$$

и използваме от условието на задачата, че $A_1 = const$ ($\frac{d}{dz}A_1 = 0$)$\Rightarrow$

$$
\begin{aligned}
0 &= 0, \\
i\frac{d}{dz}A_2 &= \tilde{\Omega}A_3 \exp\left[-i\Delta kz\right], \\
i\frac{d}{dz}A_3 &= \tilde{\Omega}A_2 \exp\left[i\Delta kz\right],
\end{aligned}
$$

където $\tilde{\Omega} = \Omega A$. Сега правим смяна на променливите $A_{2,3} = \tilde{A}_{2,3}e^{\mp i\Delta kz/2}$ $\Rightarrow$

$$
i\frac{d}{dz}\begin{pmatrix} \tilde{A}_2 \\ \tilde{A}_3 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} -\Delta & \Omega \\ \Omega & \Delta \end{pmatrix}}_{=\hat{H}(z)} . \underbrace{\begin{pmatrix} \tilde{A}_2 \\ \tilde{A}_3 \end{pmatrix}}_{=\vec{A}(z)},
$$

където сме въвели $\Delta = \Delta k/2$. Нека сега да минем в собствен базис на матрицата $\hat{H}\left(z\right)$. Връзката между новият и старият базис е

$$
\underbrace{\begin{pmatrix} \tilde{A}_2 \\ \tilde{A}_3 \end{pmatrix}}_{=\vec{A}(z)} = \underbrace{\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}}_{=\hat{R}(\theta(z))} . \underbrace{\begin{pmatrix} C_2 \\ C_3 \end{pmatrix}}_{=\vec{C}(z)},
$$

където $\tan 2\theta = \Omega/\Delta$. Тогава имаме

$$
i\frac{d}{dz}\vec{A}\left(z\right) = \hat{H}\left(z\right).\vec{A}\left(z\right) \Leftrightarrow i\frac{d}{dz}\left[\hat{R}\left(\theta\left(z\right)\right).\vec{C}\left(z\right)\right] = \hat{H}\left(z\right).\hat{R}\left(\theta\left(z\right)\right).\vec{C}\left(z\right)
$$

$\Rightarrow$

$$
i\left[\frac{d}{dz}\hat{R}\left(\theta\left(z\right)\right)\right].\vec{C}\left(z\right) + i\hat{R}\left(\theta\left(z\right)\right).\frac{d}{dz}\vec{C}\left(z\right) = \hat{H}\left(z\right).\hat{R}\left(\theta\left(z\right)\right).\vec{C}\left(z\right)
$$

$\Rightarrow$

$$
i\frac{d}{dz}\vec{C}\left(z\right) = \left[\hat{R}^{-1}\left(\theta\left(z\right)\right)\hat{H}\left(z\right).\hat{R}\left(\theta\left(z\right)\right) - i\hat{R}^{-1}\left(\theta\left(z\right)\right)\frac{d}{dz}\hat{R}\left(\theta\left(z\right)\right)\right].\vec{C}\left(z\right)
$$

новият базис диагонализира матрицата $\hat{H}\left(z\right)$:

$$
\hat{R}^{-1}\left(\theta\left(z\right)\right)\hat{H}\left(z\right).\hat{R}\left(\theta\left(z\right)\right) = \begin{pmatrix} -\sqrt{\Omega^2+\Delta^2} & 0 \\ 0 & \sqrt{\Omega^2+\Delta^2} \end{pmatrix}.
$$

А матрицата $-i\hat{R}^{-1}\left(\theta\left(z\right)\right)\frac{d}{dz}\hat{R}\left(\theta\left(z\right)\right)$ е

$$-i\hat{R}^{-1}\left(\theta\left(z\right)\right)\frac{d}{dz}\hat{R}\left(\theta\left(z\right)\right)=\left(\begin{array}{cc}0 & -i\frac{d\theta}{dz}\\ i\frac{d\theta}{dz} & 0\end{array}\right).$$

$\Rightarrow$

$$i\frac{d}{dz}\left(\begin{array}{c}C_2\\ C_3\end{array}\right)=\left(\begin{array}{cc}-\sqrt{\Omega^2+\Delta^2} & -i\frac{d\theta}{dz}\\ i\frac{d\theta}{dz} & \sqrt{\Omega^2+\Delta^2}\end{array}\right).\left(\begin{array}{c}C_2\\ C_3\end{array}\right),$$

извън диагоналите елементи може да пренебрегнем спрямо диагоналите (така наречената адиабатна еволюция) ако

$$\left|\frac{d\theta}{dz}\right|\ll\left|\sqrt{\Omega^2+\Delta^2}\right|$$

или от дефиницията на ъгъла θ имаме

$$\tan 2\theta=\Omega/\Delta\Rightarrow\frac{2\frac{d\theta}{dz}}{\cos^2 2\theta}=\frac{\Delta\frac{d\Omega}{dz}-\Omega\frac{d\Delta}{dz}}{\Omega^2+\Delta^2}\Rightarrow\left|\Delta\frac{d\Omega}{dz}-\Omega\frac{d\Delta}{dz}\right|\ll\left(\Omega^2+\Delta^2\right)^{3/2}$$

когато последното неравенство се изпълнява (имаме адиабатна еволюция) то можем веднага да решим системата

$$i\frac{d}{dz}\left(\begin{array}{c}C_2\\ C_3\end{array}\right)=\left(\begin{array}{cc}-\sqrt{\Omega^2+\Delta^2} & 0\\ 0 & \sqrt{\Omega^2+\Delta^2}\end{array}\right).\left(\begin{array}{c}C_2\\ C_3\end{array}\right),$$

решенията се дават като

$$\begin{aligned}C_2\left(z\right) &= C_2\left(z_i\right)\exp\left[\underbrace{i\int_{z_i}^{z}\sqrt{\Omega^2\left(z'\right)+\Delta^2\left(z'\right)}dz'}_{=\alpha}\right],\\ C_3\left(z\right) &= C_3\left(z_i\right)\exp\left[\underbrace{-i\int_{z_i}^{z}\sqrt{\Omega^2\left(z'\right)+\Delta^2\left(z'\right)}dz'}_{=\alpha}\right],\end{aligned}$$

или може да ги дадем чрез пропагатора $U\left(z,z_i\right)$

$$\begin{aligned}\hat{U}\left(z,z_i\right) &= \left(\begin{array}{cc}\exp\left(i\alpha\right) & 0\\ 0 & \exp\left(-i\alpha\right)\end{array}\right),\\ \vec{C}\left(z\right) &= \hat{U}\left(z,z_i\right).\vec{C}\left(z_i\right).\end{aligned}$$

или в първоначалният базис имаме

$$\vec{A}\left(z\right)=\hat{R}\left(\theta\left(z\right)\right).\vec{C}\left(z\right)=\hat{R}\left(\theta\left(z\right)\right).\hat{U}\left(z,z_i\right).\vec{C}\left(z_i\right)=\underbrace{\hat{R}\left(\theta\left(z\right)\right).\hat{U}\left(z,z_i\right).\hat{R}^{-1}\left(\theta\left(z\right)\right)}_{=\hat{V}\left(z,z_i\right)}.\vec{A}\left(z_i\right)$$

сега ако вземем следното начално условие

$$\left(\begin{array}{c}\tilde{A}_2\left(z_i\right)\\ \tilde{A}_3\left(z_i\right)\end{array}\right)=\left(\begin{array}{c}1\\ 0\end{array}\right),$$

то за интензитета на честотата ω_3 имаме

$$\left|\tilde{A}_3\left(z\right)\right|^2=\left|\hat{V}_{21}\left(z,z_i\right)\right|^2=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\frac{\Delta\left(z\right)\Delta\left(z_i\right)}{\sqrt{\Omega^2\left(z_i\right)+\Delta^2\left(z_i\right)}\sqrt{\Omega^2\left(z\right)+\Delta^2\left(z\right)}}-\frac{1}{2}\frac{\Omega\left(z\right)\Omega\left(z_i\right)\cos\alpha}{\sqrt{\Omega^2\left(z_i\right)+\Delta^2\left(z_i\right)}\sqrt{\Omega^2\left(z\right)+\Delta^2\left(z\right)}}$$

очевидно при $\left|\Delta\left(z_i\right)\right|\gg\left|\Omega\left(z_i\right)\right|$, $\left|\Delta\left(z\right)\right|\gg\left|\Omega\left(z\right)\right|$ и едновременно с това $\Delta\left(z\right).\Delta\left(z_i\right)<0$ имаме $\left|\tilde{A}_3\left(z\right)\right|^2=1$. За повече информация към задачата може да разледате следният линк `http://arxiv.org/abs/0805.1517`.

1.6 Тръгваме от нелинейната система от диференциални уравнения, която изведохме в задача 1.2

$$
\begin{aligned}
i\frac{d}{dz}A_1 &= \Omega A_2^* A_3 \exp\left[-i\Delta kz\right], \\
i\frac{d}{dz}A_2 &= \Omega A_1^* A_3 \exp\left[-i\Delta kz\right], \\
i\frac{d}{dz}A_3 &= \Omega A_1 A_2 \exp\left[i\Delta kz\right].
\end{aligned}
$$

В условието на задачата имаме $\Delta k = k_1 + k_2 - k_3 = 0 \Rightarrow$

$$
\begin{aligned}
i\frac{d}{dz}A_1 &= \Omega A_2^* A_3, \\
i\frac{d}{dz}A_2 &= \Omega A_1^* A_3, \\
i\frac{d}{dz}A_3 &= \Omega A_1 A_2.
\end{aligned}
$$

Ние може да приемем, че $A_1(0)$ и $A_2(0)$ са реални числа, тогава $A_1(z)$ и $A_2(z)$ са реални, докат $A_1(z)$ е чисто имагинерно число и следователно последните уравнения могат да бъдат пренаписани в следната форма

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dz}A_1(z) &= -\Omega(z)\, A_2(z)\, B_3(z), \\
\frac{d}{dz}A_2(z) &= -\Omega(z)\, A_1(z)\, B_3(z), \\
\frac{d}{dz}B_3(z) &= \Omega(z)\, A_1(z)\, A_2(z),
\end{aligned}
$$

където $B_3(z) = iA_3(z)$. Освен това нека отбележим приликата на последните уравнения с производните на елиптичните функции на Якоби `http://mathworld.wolfram.com/JacobiEllipticFunctions.html`

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dz}dn(z,k) &= -k^2 sn(z,k)\, cn(z,k), \\
\frac{d}{dz}cn(z,k) &= -sn(z,k)\, dn(z,k), \\
\frac{d}{dz}sn(z,k) &= cn(z,k)\, dn(z,k).
\end{aligned}
$$

Сега е лесно да се види, че решенията за A_1, A_2, A_3 се дават като

$$
\begin{aligned}
A_1(z) &= dn\left(\int_0^z \Omega(z')\, dz', k\right), \\
A_2(z) &= kcn\left(\int_0^z \Omega(z')\, dz', k\right), \\
A_3(z) &= -iksn\left(\int_0^z \Omega(z')\, dz', k\right),
\end{aligned}
$$

Стойността на k намираме от началните условия, при условие че амплитудата на напомпващото поле сме избрали за единица

$$
\begin{aligned}
A_1(0) &= dn(0,k) = 1, \\
A_2(0) &= kcn(0,k) = k, \\
A_3(0) &= -iksn(0,k) = 0,
\end{aligned}
$$

$\Rightarrow$

$$k = A_2(0).$$

1.7

Замествайки закона на Ом ($\vec{j} = \sigma\vec{E}$) в уравнението за непрекъснатост $\Rightarrow$

$$\vec{\nabla}.\vec{j} = \sigma\vec{\nabla}.\vec{E} = -\frac{\partial}{\partial t}\rho$$

сега от уравнението на Гаус

$$\vec{\nabla}.\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon}$$

взимаме $\vec{\nabla}.\vec{E} \Rightarrow$

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho = -\sigma\frac{\rho}{\varepsilon}$$

$\Rightarrow$

$$\rho(t) = \rho(0)\exp\left(-\frac{\sigma t}{\varepsilon}\right)$$

1.8

Взимаме $\vec{\nabla}\times$ от закона на Фарадей ($\vec{\nabla}\times\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}$)$\Rightarrow$

$$\begin{aligned}
\vec{\nabla}\times\left(\vec{\nabla}\times\vec{E}\right) &= \vec{\nabla}\underbrace{\left(\vec{\nabla}.\vec{E}\right)}_{=0} - \Delta\vec{E} = -\vec{\nabla}\times\left(\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}\right) \Rightarrow \\
\Delta\vec{E} &= \frac{\partial}{\partial t}\underbrace{\left(\vec{\nabla}\times\vec{B}\right)}_{=\mu\sigma\vec{E}+\mu\varepsilon\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}} = \mu\sigma\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} + \mu\varepsilon\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2}
\end{aligned}$$

окончателно имаме

$$\begin{aligned}
\Delta\vec{E} &= \mu\sigma\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} + \mu\varepsilon\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2} \\
\Delta\vec{B} &= \mu\sigma\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} + \mu\varepsilon\frac{\partial^2\vec{B}}{\partial t^2}
\end{aligned}$$

това са така наречените телеграфни уравнения.

1.9

Заместваме плоските вълни от вида:

$$\begin{aligned}
\vec{E}(z,t) &= \vec{E}_0\exp\left[i\left(kz-\omega t\right)\right], \\
\vec{B}(z,t) &= \vec{B}_0\exp\left[i\left(kz-\omega t\right)\right],
\end{aligned}$$

В телеграфните уравнения от предишната задача

$$\begin{aligned}
\Delta\vec{E} &= \mu\sigma\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} + \mu\varepsilon\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2} \\
\Delta\vec{B} &= \mu\sigma\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} + \mu\varepsilon\frac{\partial^2\vec{B}}{\partial t^2}
\end{aligned}$$

$\Rightarrow$

$$\begin{aligned}
-k^2\begin{pmatrix}E_{0x}\\E_{0y}\\E_{0z}\end{pmatrix}\exp\left[i\left(kz-\omega t\right)\right] &= -\mu\sigma\omega i\begin{pmatrix}E_{0x}\\E_{0y}\\E_{0z}\end{pmatrix}\exp\left[i\left(kz-\omega t\right)\right] - \mu\varepsilon\omega^2\begin{pmatrix}E_{0x}\\E_{0y}\\E_{0z}\end{pmatrix}\exp\left[i\left(kz-\omega t\right)\right] \\
-k^2\begin{pmatrix}B_{0x}\\B_{0y}\\B_{0z}\end{pmatrix}\exp\left[i\left(kz-\omega t\right)\right] &= -\mu\sigma\omega i\begin{pmatrix}B_{0x}\\B_{0y}\\B_{0z}\end{pmatrix}\exp\left[i\left(kz-\omega t\right)\right] - \mu\varepsilon\omega^2\begin{pmatrix}B_{0x}\\B_{0y}\\B_{0z}\end{pmatrix}\exp\left[i\left(kz-\omega t\right)\right]
\end{aligned}$$

$\Rightarrow$

$$k^2 = \mu\varepsilon\omega^2 + i\mu\sigma\omega$$

след коренуване получаваме:

$$k = \Re(k) + i\Im(k),$$

където:

$$\begin{aligned}\Re(k) &= \omega\sqrt{\frac{\mu\varepsilon}{2}\left[\sqrt{1+\left(\frac{\sigma}{\varepsilon\omega}\right)}+1\right]},\\ \Im(k) &= \omega\sqrt{\frac{\mu\varepsilon}{2}\left[\sqrt{1+\left(\frac{\sigma}{\varepsilon\omega}\right)}-1\right]}.\end{aligned}$$

$\Rightarrow$

$$\begin{aligned}\vec{E}(z,t) &= \vec{E}_0\exp\left[-\Im(k)z\right]\exp\left[i\left(\Re(k)z-\omega t\right)\right],\\ \vec{B}(z,t) &= \vec{B}_0\exp\left[-\Im(k)z\right]\exp\left[i\left(\Re(k)z-\omega t\right)\right].\end{aligned}$$

Тоест в металите се разпространяват вълни, които затихват навлизайки в метала. За идеални метали имаме $\sigma\to\infty\Rightarrow$ за тях слоят в който проникват магнитните и електричните полета е нула.

Взимаме $\vec{\nabla}.\vec{E}=0$ и $\vec{\nabla}.\vec{B}=0\Rightarrow$

$$\begin{aligned}\underbrace{\frac{\partial E_x}{\partial x}}_{=0}+\underbrace{\frac{\partial E_y}{\partial y}}_{=0}+\frac{\partial E_z}{\partial z} &= ikE_{0z}\exp\left[i\left(kz-\omega t\right)\right]=0,\\ \underbrace{\frac{\partial B_x}{\partial x}}_{=0}+\underbrace{\frac{\partial B_y}{\partial y}}_{=0}+\frac{\partial B_z}{\partial z} &= ikB_{0z}\exp\left[i\left(kz-\omega t\right)\right]=0\end{aligned}$$

$\Rightarrow$

$$\begin{aligned}E_{0z} &= 0,\\ B_{0z} &= 0\end{aligned}$$

сега взимаме другите две уравнения на Максуел $\Rightarrow$

$$\begin{aligned}\vec{\nabla}\times\vec{E} &= \begin{vmatrix}\mathsf{e}_x & \mathsf{e}_y & \mathsf{e}_z\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ E_x & E_y & 0\end{vmatrix}=-ikE_{0y}\exp\left[i\left(kz-\omega t\right)\right]\mathsf{e}_x+ikE_{0x}\exp\left[i\left(kz-\omega t\right)\right]\mathsf{e}_y+0\mathsf{e}_z\\ -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} &= i\omega B_{0x}\exp\left[i\left(kz-\omega t\right)\right]\mathsf{e}_x+i\omega B_{0y}\exp\left[i\left(kz-\omega t\right)\right]\mathsf{e}_y+0\mathsf{e}_z\end{aligned}$$

$\Rightarrow$

$$\begin{aligned}-kE_{0y} &= \omega B_{0x}\\ kE_{0x} &= \omega B_{0y}\end{aligned}$$

които равенства можем да запишем с едно векторно равенство от вида:

$$\vec{B}_0=\frac{k}{\omega}\left(\mathsf{e}_z\times\vec{E}_0\right),$$

понеже вълновият вектор е комплексен то електричното поле е отместено по фаза спрямо магнитното поле

$$\begin{aligned}k &= \tilde{k}_0\exp\left(-i\phi\right),\\ B_0 &= \tilde{B}_0\exp\left(-i\delta_B\right),\\ E_0 &= \tilde{E}_0\exp\left(-i\delta_E\right).\end{aligned}$$

$\Rightarrow$

$$\tilde{B}_0\exp\left(-i\delta_B\right)=\frac{\tilde{k}_0\exp\left(-i\phi\right)}{\omega}\tilde{E}_0\exp\left(-i\delta_E\right)$$

$\Rightarrow\delta_B-\delta_E=\phi$