Числено интегриране. Квадратурни формули на Нютон-Коутс

Постановка на задачата

Нека $y = f(x)$ е функция, дефинирана и интегруема в Риманов смисъл в интервала $[a,b]$. По зададена таблица от стойностите $y_i = f(x_i)$ на функцията в точките (възлите) $x_0, x_1, x_2, ..., x_n \in [a,b]$, да се намери приближено стойността на интеграла $I = \int_a^b f(x)\,dx$.

Квадратурни формули на Нютон-Коутс

Ако n е естествено число и $h = \dfrac{b-a}{n}$ е стъпка, с чиято помощ интервалът на интегриране е разделен на n равни подинтервала, при което $x_0 = a$, $x_{i+1} = x_i + h$, $i = 0,1,...,n-1$, то най-често използваните сумарни квадратурни формули на Нютон-Коутс са дадени в следващата таблица. Тук $M_k = \max\limits_{x\in[a,b]} \left| f^{(k)}(x) \right|$, при условие, че съществува непрекъсната k-та производна на $y = f(x)$.

Название	Квадратурна формула за числено интегриране	Оценка на грешката $\lvert R(f,x) \rvert$
Формула на левите правоъгълници	$I_1 \approx h\sum\limits_{i=0}^{n-1} f(x_i)$	$\dfrac{(b-a)^2}{2n} M_1$, т.е. $\dfrac{(b-a)M_1}{2} h$
Формула на десните правоъгълници	$I_2 \approx h\sum\limits_{i=1}^{n} f(x_i)$	$\dfrac{(b-a)^2}{2n} M_1$, т.е. $\dfrac{(b-a)M_1}{2} h$
Формула на средните правоъгълници	$I_3 \approx h\sum\limits_{i=0}^{n-1} f(x_i + \dfrac{h}{2})$	$\dfrac{(b-a)^3}{24n^2} M_2$, т.е. $\dfrac{(b-a)M_2}{24} h^2$
Формула на трапеците	$I_T \approx \dfrac{h}{2}\left(f(a) + 2\sum\limits_{i=1}^{n-1} f(x_i) + f(b) \right)$	$\dfrac{(b-a)^3}{12n^2} M_2$, т.е. $\dfrac{(b-a)M_2}{12} h^2$
Формула на Симпсън	$n = 2m$, $I_S \approx \dfrac{h}{3}\left(f(a) + 4\sum\limits_{i=1}^{m} f(x_{2i-1}) + 2\sum\limits_{i=1}^{m-1} f(x_{2i}) + f(b) \right)$	$\dfrac{(b-a)^5}{180n^4} M_4$, т.е. $\dfrac{(b-a)M_4}{180} h^4$

Пример 1. Стойностите на функцията $y = f(x) = \ln(x^2)$ в интервала $[2,3]$ са зададени в първите две колонки на таблица 1. Да се пресметнат приближените стойности на интеграла $I = \int_2^3 f(x)\,dx$, по всички квадратурни формули от горната таблица.

Решение:

В случая имаме стъпка $h = 0{,}1$ и брой на подинтервалите $n = 10$.

Таблица 1

i	x_i	y_i
0	2,0	1,38629
1	2,1	1,48387
2	2,2	1,57691
3	2,3	1,66582
4	2,4	1,75094
5	2,5	1,83258
6	2,6	1,91102
7	2,7	1,98650
8	2,8	2,05924
9	2,9	2,12942
10	3,0	2,19722

Таблица 2

i	$x_i + \frac{h}{2}$	$y_{i+\frac{1}{2}}$
0	2,05	1,43568
1	2,15	1,53094
2	2,25	1,62186
3	2,35	1,70883
4	2,45	1,79218
5	2,55	1,87219
6	2,65	1,94912
7	2,75	2,02320
8	2,85	2,09464
9	2,95	2,16361

а) По формулата за левите правоъгълници трябва да сумираме стойностите от y_0 до y_9 и полученото число да умножим по h. Получаваме

$$I_1 \approx h\sum_{i=0}^{n-1} f(x_i) = h\sum_{i=0}^{9} y_i = 0{,}1.(17{,}7826) = 1{,}77826\,.$$

б) По формулата за десните правоъгълници намираме сумата от y_1 до y_{10} и полученото число да умножаваме по h. Получаваме

$$I_2 \approx h\sum_{i=1}^{n} f(x_i) = h\sum_{i=1}^{10} y_i = 0{,}1.18{,}5935 = 1{,}85935\,.$$

в) В случая на формулата на средните правоъгълници с помощта на таблица 2 изчисляваме:

$$I_3 \approx h\sum_{i=0}^{n-1} f(x_i + \frac{h}{2}) = h\sum_{i=0}^{9} y_{i+\frac{1}{2}} = 0{,}1\ .\ 18{,}1923 = 1{,}81923.$$

г) Съответно по трапеците имаме

$$I_T \approx \frac{h}{2}\left(f(a) + 2\sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) + f(b) \right) = \frac{h}{2}\left(y_0 + 2\sum_{i=1}^{9} y_i + y_{10} \right) = 0{,}05(y_0 + 2(y_1 + y_2 + \ldots + y_9) + y_{10})$$
$$= 0{,}05(1{,}38629 + 2.(16{,}39631) + 2{,}19722) = 0{,}05.(36{,}37615) = 1{,}818807\,;$$

д) По сумарната формула на Симпсън:

$$I_S \approx \frac{h}{3}\left(f(a) + 4\sum_{i=1}^{m} f(x_{2i-1}) + 2\sum_{i=1}^{m} f(x_{2i}) - f(b) \right)$$
$$= \frac{0{,}1}{3}(y_0 + 4(y_1 + y_3 + ... + y_9) + 2(y_2 + y_4 + ... + y_8) + y_{10})$$
$$= \frac{0{,}1}{3}\left(1{,}38629 + 4.(9{,}09820) + 2.(7{,}29812) + 2{,}19722\right) = \frac{0{,}1}{3}.(54{,}57254) = 1{,}819085\,.$$

Пример 2. Да се оцени грешката на численото интегриране за I_1, I_T, I_S от пример 1.

Решение:

Намираме последователно производните на $f(x) = \ln(x^2)$:

$$f'(x) = \frac{2}{x}, \quad f''(x) = \frac{-2}{x^2}, \quad f'''(x) = \frac{4}{x^3}, \quad f^{(4)}(x) = \frac{-12}{x^4}.$$

Тогава $M_1 = \max_{2\le x\le 3} |f'(x)| = f'(2) = 1$, $M_2 = \max_{2\le x\le 3} |f''(x)| = |f''(2)| = \frac{1}{2}$,

$M_4 = \max_{2\le x\le 3} \left|f^{(4)}(x)\right| = \left|f^{(4)}(2)\right| = \frac{3}{4}$.

Като заместим във формулата за грешката на метода на левите правоъгълници, получаваме: $|R_1(f,h)| \le \frac{M_1(b-a)h}{2} = \frac{0{,}1}{2} = 0{,}05$, т.е верен е първи-втори знак на резултата. Следователно след закръгляване до втори знак имаме $I_1 \approx 1{,}78$.

За формулата на трапеците пресмятаме: $|R_T(f,h)| \le \frac{M_2(b-a)h^2}{12} = \frac{0{,}01}{24} \le 0{,}005$ или верни са два-три знака след десетичната запетая. Тогава $I_T \approx 1{,}819$.

За квадратурната формула на Симпсън:

$|R_S(f,h)| \le \frac{M_4(b-a)h^4}{180}$, т.е. всички знаци са верни и $I_S = \int_2^3 \ln(x^2)dx \approx 1{,}819085$.

Забележка. По принцип не винаги е зададена формула на функцията, или намирането на производните е сложно, или дори може да не съществуват производни от даден ред. Тогава се прилагат по-простите формули, които дават малка степен на грешката. Точността в такива случаи се постига за сметка на намаляването на стъпката h.

Пример 3. Да се определи големината на стъпката на численото интегриране h така, че приближеното пресмятане на интеграла $\int_{-1}^{3}\sqrt{1+x^2}\,dx$ по метода на трапеците да гарантира точност на резултата $\varepsilon = 0{,}000001$.

Решение:

Тук a = -1, b = 3. За производните имаме: $f'(x) = \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$, $f''(x) = \dfrac{1}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}}$.

Очевидно $0 \le f''(x) \le 1$ за всяко x, откъдето следва, че $M_2 \le 1$. Като заместим във формулата за грешката на метода на трапеците, намираме:

$$\left|R_T(f,h)\right| \le \frac{M_2(b-a)h^2}{12} = \frac{(3-(-1))}{12}h^2 = \frac{h^2}{3}.$$

За да се гарантира исканата точност налагаме условието $\dfrac{h^2}{3} \le \varepsilon$, или $h \le \sqrt{3\varepsilon} = \sqrt{0{,}000003} \approx 0{,}00173$. Удобно е да вземем стъпка h = 0,001 и съответно да разделим интервала $[-1,3]$ на n = 4000 равни подинтервала. За провеждане на изчисленията очевидно трябва да се използва компютър и междинна точност 10^{-8}.

Автор: Снежана Гочева-Илиева, snow@pu.acad.bg