

ЛЕКЦИИ ПО СИГНАЛИ И СИСТЕМИ

Лектор: доц. Румен Попов

гр. Пловдив

Зима 2019г.

Глава 1

Сигнали основни понятия

Думите информация, сигнал и система са много популярни, тъй като са непосредствено свързани с ежедневието на хората.

Доказано е, че по-голямата част от времето обществото насочва към информационните процеси: възприятие, представяне, обработка, пренасяне и съхраняване на информация.

Нека вникнем по-подробно в смисъла на понятията **информация, съобщение, сигнал и система**.

1.1. Информация

Какво по същество е информацията? Думата информация има латински произход (Informatio - осведомяване) и означава осведомяване за нещо.

Информацията е **съдържание** на връзката между материалните обекти в една **система** и се проявява в изменение на техните състояния, а те от своя страна, чрез отражение, се предават от един на друг обект.

За специалистите, които се занимават с техническите проблеми на информационните процеси, е формирано "работно понятие" с две съществени части, а именно:

- а) информация са всички **сведения**, **които подлежат на пренасяне**, преобразуване и съхраняване;
- б) информацията **намалява неопределеността** в знанията ни за обекта.

Първата част е свързана с качествено разглеждане, а втората – с количественото определяне на информацията.

При пренасянето, обработката и съхраняването на информация специалистите (инженери, програмисти, техници, оператори и др.) се интересуват преди всичко какво е количеството информация, с какви средства може да се пренесе най-бързо и без грешки, какви памети са необходими за съхраняването, коя форма на представяне е най-подходяща във връзка с обработката и възприемането и други проблеми от това естество.

Чрез информацията се управляват множество обекти. Без това не можем да си представим транспорта, продоволствието, производството, или която и да било друга дейност. Информационните процеси имат широко място и в

природата. Например в организацията на пчелните семейства, във физиологичните процеси в човешкия и животински организъм, в растителния свят и т.н.

В ежедневието понятието информация се използва много често и всички сме навикнали да влагаме известен смисъл в това понятие.

Най-общо може да се определи, че с **понятието информация се означава признакът на новост в едно съобщение**. Тази представа е по-скоро интуитивна. Следователно тя не би могла да се използва като метод за решаване на количествени задачи, свързани с преработването на информацията.

Теорията на информацията възникна на базата на известни направления в математиката, които още в самото начало са с подчертана приложна насоченост - към създаване на технически средства (средства за връзка, системи за управление, изчислителни машини) за предаване и преработка на информацията. Но разработките, на базата на които се оформяла непосредствено теорията на информацията като отделно направление в техническата кибернетика са предложени главно от видния учен, един от най-видните математици и инженери на нашето време американеца Клод Шенън (Шенон), който се приема за основоположник на теорията на информацията. Теорията е описана в основополагащата му статия от 1948 г. "Математическа теория на комуникацията".

Развитието на теорията на информацията като отделна наука доведе до много по-широка трактовка на понятието "информация" от тази, която се дава в ежедневието. Теорията на информацията и кибернетиката наложиха понятието "информация" като основно понятие, каквито са понятията „материя“ и „енергия“. **Според Норберт Винер „Информацията е информация, а не материя или енергия“.**

Основанията за един такъв подход към това понятие са, че освен енергийната и материалната страна реално протичащите в природата явления имат и трета страна - информационна.

Щом като понятието информация се оформи като основно понятие, неговото точно дефиниране стана трудно, тъй както е трудно дефинирането на понятията „материя“, „енергия“: тези основни понятия се възприемат просто интуитивно, а с тяхна помощ се дефинират останалите понятия. Независимо от трудностите редица учени са дали определение за „информация“ в съвременното му разбиране като основно понятие.

Така и създателят на кибернетиката Н. Винер е дал определение за информацията:

„Информация - това е означение на съдържанието, получено от външния свят в процеса на нашето приспособяване към него, на приспособяване към него на нашите сетива. Процесът на получаването и използването на информацията е процес на нашето приспособяване към случайностите на външната среда и на нашата жизнедеятелност в тази среда.”

Вижда се, че това определение има и философски характер, то е много по-общо от определението, което се дава ежедневно.

Този нов подход към информацията стана възможен в резултат на това, че беше решен въпросът за количественото определяне на информацията (определяне на количеството информация, съдържащо се в едно съобщение). В това се състои и големия принос на К. Шенон. Възможността да се определя количествено информацията позволи да се види връзката с някои други основни физически понятия, да може понятието „информация” да се определя чрез тези основни понятия и така да се разшири неговия смисъл.

1.2. Съобщение

Как неопределеността в знанията ни за обект служи за количественото определяне на информацията, ще установим по-нататък. Често пъти информацията неправилно се смесва със съобщението. То е форма на представяне на информацията, какъвто е случаят с факса – (хартията с текста/знаците), говорът, музиката, изображението в телевизията, входните и изходните данни за компютъра и др. **Понякога за краткост се казва, че съобщението е това, което трябва да се предаде.** Всяко съобщение е някъква част от информацията, която се предава.

1.3. Сигнал

Думата сигнал е също от латински произход (signit - знак). Той може да се определи като **физически процес, който отразява (изобразява) съобщението**, т.е. неговите изменения съответствуват на съобщението. Очевидна е връзката между информацията и сигнала. Тя трябва да бъде еднозначна, иначе се получават лъжливи сведения и неправилни команди. Казано накратко **сигналът е физическия носител на информацията.**

Сигналът има управляваща функция. Физическите процеси (величини), които се избират за сигнали трябва да отговарят на следните условия:

а) да могат да се разпространяват на значителни разстояния чрез изразходването на минимално количество енергия;

б) да притежават свойството да управляват местните източници на енергия, без да въздействуват пряко на изпълнителните механизми; например чрез електрически сигнал може да се включва и изключва електродвигател от голямо разстояние, като се въздействува на специално комутационно устройство, разположено до двигателя заедно с местен източник на захранване, иначе загубите, свързани със захранването са много големи;

в) да могат да въздействуват на особени органи в управлението; в частен случай това са сетивните органи на човека, а в последния пример - приемната част на комутационното устройство.

Сигналът е количествено описание на физическо явление, събитие или процес в което е заложена информацията, предавана чрез съобщението.

Някои често срещани примери включват:

1. Текуща стойност на електрически ток или напрежение в дадена верига.
2. Ежедневна стойност на една акция при затваряне на борсата миналата седмица.
3. Аудио сигнал: непрекъснат във времето в първоначалния му вид, или в дискретно време, когато се съхранява на CD.

По-точно, един сигнал е функция, обикновено от една променлива във времето. Въпреки това, като цяло, сигналите могат да бъдат функции на повече от една променлива, например, сигнали на изображения.

В нашия случай ние сме заинтересовани основно от два вида сигнали:

1. **Непрекъснат във времето сигнал** $x(t)$, където t е реална променлива, обозначаваща времето, т.е., $t \in \mathbb{R}$. Тук с $\mathbb{R}$ е обозначено множеството на реалните числа. Ние ще използваме кръгли скоби $(.)$ за означаване на непрекъснати във времето сигнали.

2. **Дискретен във времето сигнал** $x[n]$, където n е целочислена променлива, обозначаваща дискретните проби от време, т.е., $n \in \mathbb{Z}$. Тук с $\mathbb{Z}$ е обозначено множеството на целите числа. Ние ще използваме квадратни скоби $[.]$, за означаване на дискретни сигнали. Съгласно определението на дискретен сигнал, $x[1.5]$, например не е определено.

1.4. Система

Думата система се използва по различни поводи и в различен смисъл. Нейният произход е гръцки (**systema - цяло, съставено от части**). Тя е придобила международна употреба. За нас е важно нейното значение в техниката и преди всичко във връзка с пренасянето и обработката на информация и сигнали.

За една техническа система е характерно следното:

- а) тя е **съвкупност от краен брой елементи**, които са обединени в едно цяло;
- б) **между елементите съществуват** определени отношения (**връзки**);
- в) съвкупността от елементи е **подчинена на определена цел**, в нея съществува определен ред;
- г) **елементите имат относителен характер**; те от своя страна могат да бъдат толкова сложни, че да са една подсистема (субсистема) на разглежданата.

За пример може да се посочи единната система на съобщения.

Нейните елементи са подсистемите за кабелни, радиорелейни и спътникови връзки. Между тях съществуват определена зависимост и ред. От своя страна подсистемите са също така доста сложни. Чрез единната система се осъществяват много важни за света информационни процеси, като се започне с бита, продоволствието и се стигне до банковото дело и крупния бизнес.

Друг пример е системата на енергоснабдяването. Чрез нея се осигуряват главно топло- и електроснабдяване. В нея се съдържат подсистеми (елементи) с различна степен на обвързаност, установени са строги правила по отношение на организацията и пр.

В широкия смисъл на думата „система“ означава определени правила, институции, установен ред, редовно повтаряне и т.н. За пример могат да се посочат системата за социално осигуряване, съдебната система, нервната система, бюрократичната система и др.

1.5. Преглед на комплексните числа

Ние се интересуваме главно от комплексните сигнали:

$$x(t) \in \mathbb{C} \text{ и } x[n] \in \mathbb{C}$$

където множеството от комплексни числа $\mathbb{C}$ се определя като

$$\mathbb{C} = \{z \mid z = x + jy, x, y \in \mathbb{R}, j = \sqrt{-1}\}$$

Комплексното число Z може да бъде представено в декартова форма като

$$z = x + jy,$$

или в полярни координати като

$$z = re^{j\theta}.$$

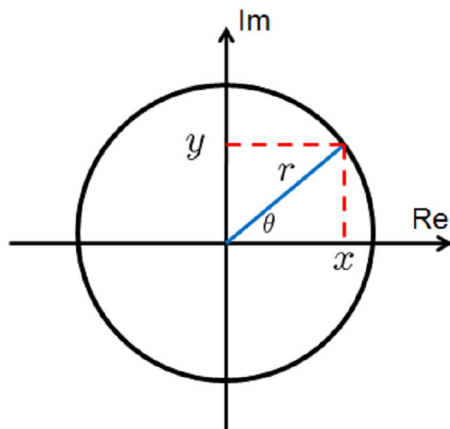
Теорема 1. Формула на Ойлер

$$e^{j\theta} = \cos \theta + j \sin \theta \quad (1.1)$$

С използването на формулата на Ойлер, връзката между x , y , r , и θ се дава от

$$\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2}, \\ \theta = \tan^{-1} \frac{y}{x}. \end{cases}$$

Комплексното число може да бъде изобразено на комплексната равнина, както е показано на фиг. 1.1. Y -оста на комплексната равнина е известна като имагинерна ос, и X -оста на комплексната равнина е известна като реална ос. Комплексното число еднозначно се определя от $r = x + jy$ в декартова форма, или $z = re^{j\theta}$ в полярна форма.



Фигура 1.1 Комплексното число z може да се изрази в своята декартова форма $z = x + jy$, или в своята полярна форма $z = re^{j\theta}$

Пример. Конвертиране на следните комплексни числа, от декартова форма в полярна форма: (а) $1 + 2j$; (б) $1 - j$.

За (а), ние прилагаме формулата на Ойлер и намираме

$$r = \sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5} \quad \text{и} \quad \theta = \tan^{-1} \left(\frac{2}{1} \right) \approx 63.64^\circ.$$

Следователно,

$$1 + 2j = \sqrt{5}e^{j63.64^\circ}$$

За (б), отново прилагаме формулата на Ойлер и намираме

$$r = \sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$$

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{-1}{1}\right) = -45^\circ$$

Следователно,

$$1 - j = \sqrt{2}e^{-j\pi/4}$$

Припомнете си, че: π в радиани = 180° в градуси.

Пример. Изчислете стойността на j^j .

$$j^j = (e^{j\pi/2})^j = e^{-\pi/2} \approx 0.2078$$

1.6. Основни операции със сигнали

1.6.1 Отместване във времето

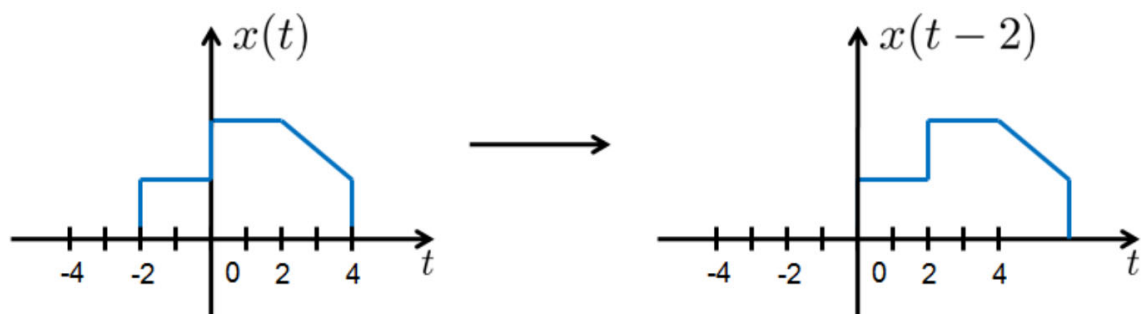
За всяко $t_0 \in \mathbb{R}$ и $n_0 \in \mathbb{Z}$ отместването във времето е операция, определена като

$$\begin{aligned} x(t) &\longrightarrow x(t - t_0) \\ x[n] &\longrightarrow x[n - n_0]. \end{aligned} \quad (1.2)$$

Първото уравнение се отнася за случая с непрекъснат във времето сигнал, докато второто е за дискретен във времето сигнал.

Ако $t_0 > 0$, отместването във времето е известно като „закъснение“. Ако $t_0 < 0$, отместването във времето е известно като „предварение“.

Пример. На фиг. 1.2, лявото изображение показва непрекъснатия във времето сигнал $x(t)$. Изместената във времето версия $x(t-2)$ е показана в дясната част на фигурата.



Фигура 1.2 Пример за отместване във времето

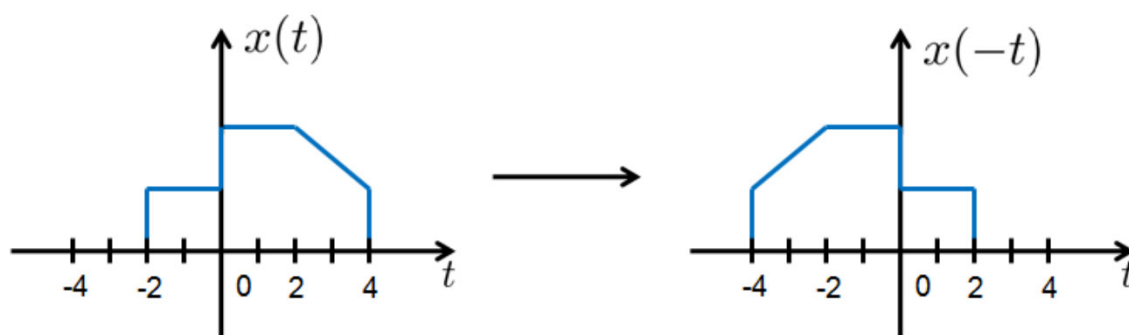
1.6.2 Обръщане на времето

Обръщането на времето се определя със следната операция

$$\begin{aligned} x(t) &\longrightarrow x(-t) \\ x[n] &\longrightarrow x[-n], \end{aligned} \quad (1.3)$$

което може да се разглежда като "преобръщане по оста t ".

Пример. На фиг. 1.3, лявото изображение показва непрекъснатия във времето сигнал $x(t)$. Преобрънатата във времето версия $x(-t)$ е показана в дясната част на фигурата.



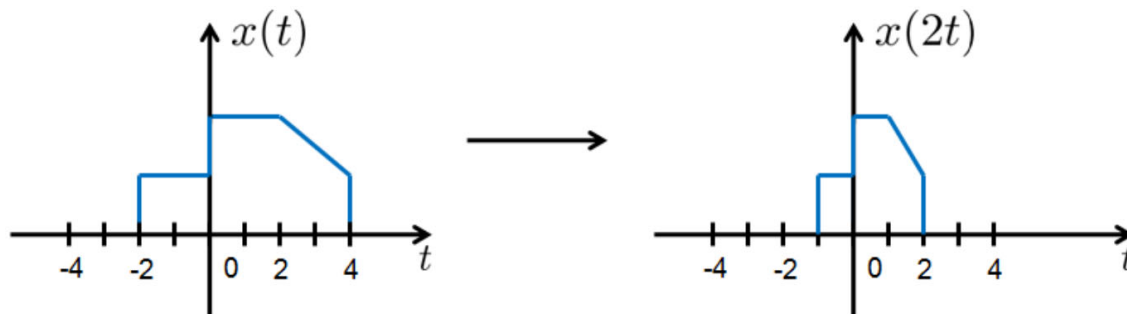
Фигура 1.3 Пример за обръщане на времето

1.6.3 Мащабиране във времето

Мащабирането във времето е операция, където променливата време t се умножава с константа a :

$$x(t) \longrightarrow x(at), \quad a > 0. \quad (1.4)$$

Ако $a > 1$, времевата скала на получения сигнал се "свива" (ускоряване). Този процес се нарича децимация. Ако $0 < a < 1$, времевата скала на получения сигнал се "разтяга" (експандиране).



Фигура 1.4 Пример за мащабиране във времето

1.6.4 Комбиниране на операции

Като цяло, линейна операция (във времето) на сигнала $x(t)$ може да се изрази като $y(t) = x(at - b)$; $a, b \in \mathbb{R}$. Има два метода да се опише изходния сигнал $y(t) = x(at - b)$.

Метод А: “Отместване, след това мащабиране” (препоръчително)

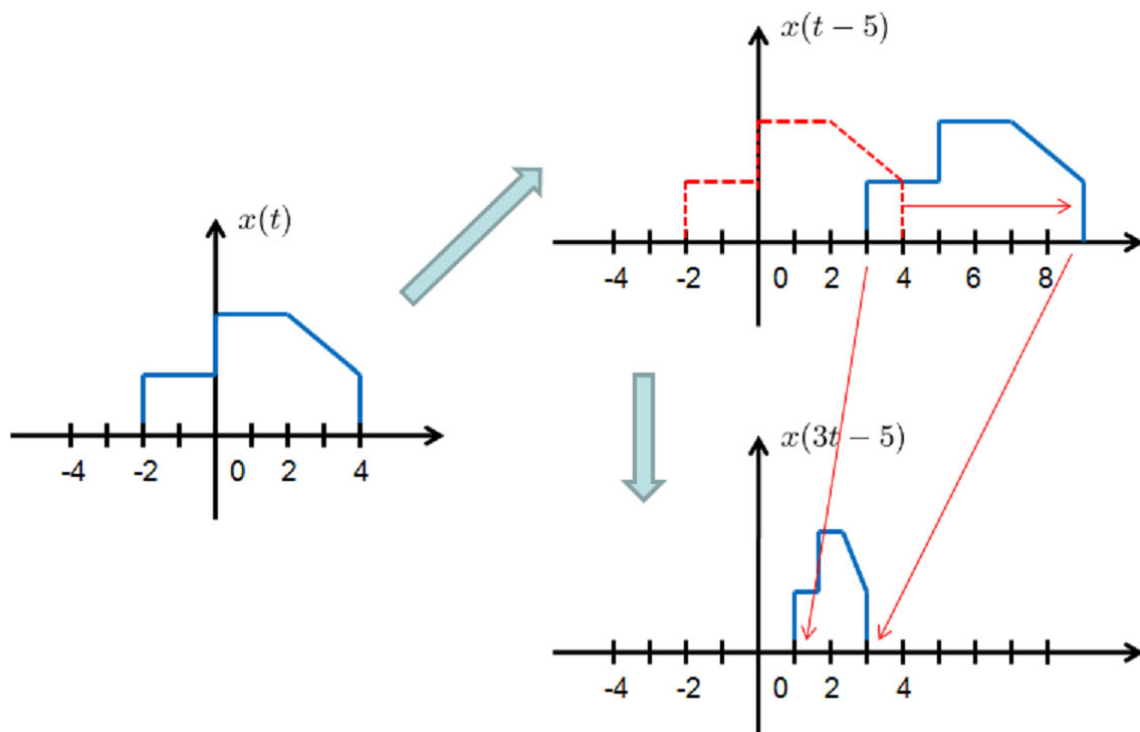
- 1) Определяме $v(t) = x(t - b)$;
- 2) Определяме $y(t) = v(at) = x(at - b)$.

Метод Б: “Мащабиране, след това отместване”

- 1) Определяме $v(t) = x(at)$;
- 2) Определяме $y(t) = v(t - \frac{b}{a}) = x(at - b)$.

Пример.1 Отместване и мащабиране във времето

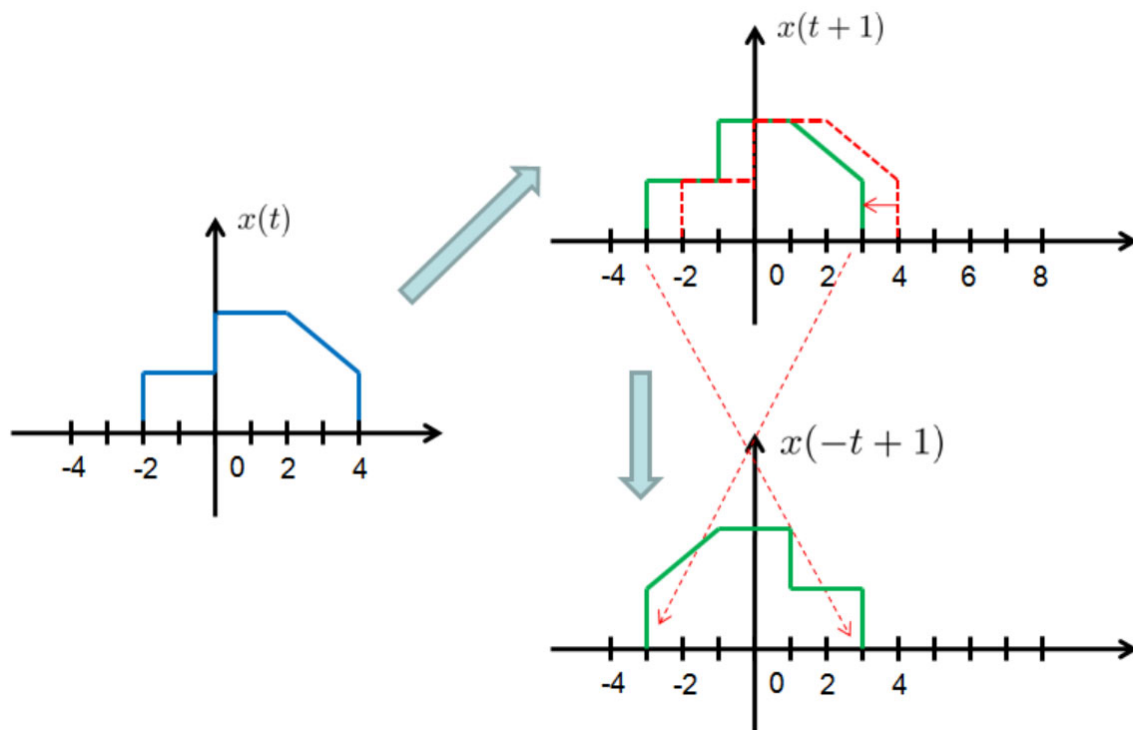
За сигнала $x(t)$, показан на фиг. 1.5, да се изобрази $x(3t - 5)$.



Фигура 1.5 Пример. 1 за комбинирана операция $y = x(3t - 5)$

Пример.2 Обръщане на времето и отместване

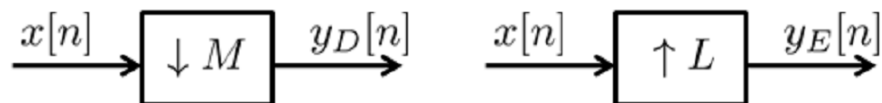
За сигнала $x(t)$, показан на фиг. 1.6, да се изобрази $x(1 - t)$.



Фигура 1.6 Пример. 2 за комбинирана операция $y = x(-t + 1)$

1.6.5 Децимация и експандиране

Децимацията и експандирането са стандартни операции при обработката на дискретни сигнали. Обозначението на тези операции и местоположението на входните и изходните сигнали в двата случая са показани на Фиг. 1.7.



Фигура 1.7 Децимация (отляво) и експандиране (отдясно)

Децимация.

Децимацията се дефинира като

$$y_D[n] = x[Mn], \quad (1.5)$$

за целочислената константа $M \in \mathbb{Z}$. Числото M се нарича фактор на децимация.

Експандиране.

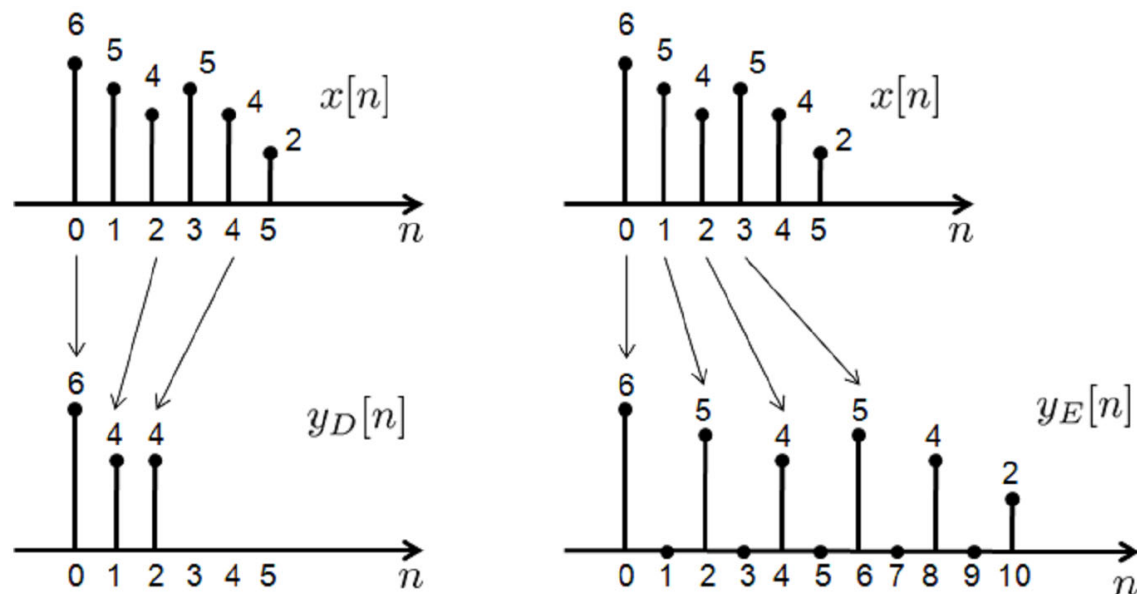
Експандирането се дефинира като

$$y_E[n] = \begin{cases} x\left[\frac{n}{L}\right], & n = \text{целочислено произведение на } L \\ 0, & \text{в противен случай} \end{cases} \quad (1.6)$$

Числото L се нарича фактор на експандиране.

Пример.

Примери за децимация ($M = 2$) и експандиране ($L = 2$) на дискретния сигнал $x[n]$ са показани на Фиг. 1.8.



Фигура 1.8 Примери за децимация (отляво) и експандиране (отдясно) при $M = 2$ и $L = 2$

1.7. Периодичност

1.7.1 Определения

Определение 1. Непрекъснатият във времето сигнал $x(t)$ е периодичен, ако съществува константа $T > 0$ такава, че

$$x(t) = x(t + T), \quad (1.7)$$

за всяко $t \in \mathbb{R}$.

Определение 2. Дискретният във времето сигнал $x[n]$ е периодичен, ако съществува константа $N > 0$ такава, че

$$x[n] = x[n + N], \quad (1.8)$$

за всяко $n \in \mathbb{Z}$.

Сигналите, които не отговарят на условията за периодичност се наричат аperiodични сигнали.

Пример. Да разгледаме сигнал $x(t) = \sin(\omega_0 t)$, $\omega_0 > 0$. Може да бъде показано, че $x(t) = x(t + T)$, където $T = k \frac{2\pi}{\omega_0}$ за всяко $k \in \mathbb{Z}^+$:

$$\begin{aligned} x(t + T) &= \sin \left(\omega_0 \left(t + k \frac{2\pi}{\omega_0} \right) \right) \\ &= \sin(\omega_0 t + 2\pi k) \\ &= \sin(\omega_0 t) = x(t). \end{aligned}$$

Следователно $x(t)$ е периодичен сигнал.

Определение 3. Стойността T_0 се нарича основен период на $x(t)$, ако тя е най-малката стойност на $T > 0$, която отговаря на условието за периодичност. Числото $\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0}$ се нарича основна честота на $x(t)$.

Определение 4. Стойността N_0 се нарича основен период $x[n]$, ако тя е най-малката стойност на $N > 0$ ($N \in \mathbb{Z}$), която отговаря на условието за периодичност. Числото $\Omega_0 = \frac{2\pi}{N_0}$ се нарича основна честота на $x[n]$.

Пример. Да се определи основния период на следните сигнали: (а) $e^{j3\pi t/5}$; (б) $e^{j3\pi n/5}$.

За (а), нека приемем $x(t) = e^{j3\pi t/5}$. Ако $x(t)$ е периодичен сигнал, тогава съществува $T > 0$ и $x(t) = x(t + T)$. Следователно,

$$\begin{aligned} x(t) &= x(t + T) \\ \Rightarrow e^{j\frac{3\pi}{5}t} &= e^{j\frac{3\pi}{5}(t+T)} \\ \Rightarrow 1 &= e^{j\frac{3\pi}{5}T} \\ \Rightarrow e^{j2k\pi} &= e^{j\frac{3\pi}{5}T}, \text{ за някое } k \in \mathbb{Z}^+. \\ \Rightarrow T &= \frac{10}{3}. \quad (k = 1) \end{aligned}$$

За (б), ние нека $x[n] = e^{j3\pi n/5}$. Ако $x[n]$ е периодичен сигнал, тогава съществува $N > 0$ и $x[n] = x[n + N]$. Следователно,

$$\begin{aligned} x[n] &= x[n + N] \\ \Rightarrow e^{j\frac{3\pi}{5}n} &= e^{j\frac{3\pi}{5}(n+N)} \\ \Rightarrow e^{j2k\pi} &= e^{j\frac{3\pi}{5}N}, \text{ за някое } k \in \mathbb{Z}^+ \\ \Rightarrow N &= \frac{10k}{3} \\ \Rightarrow N &= 10. \quad (k = 3). \end{aligned}$$

1.7.2 По-сложен пример

Нека разгледаме следните два сигнала

$$\begin{aligned} x(t) &= \cos \left(\frac{\pi t^2}{8} \right) \\ x[n] &= \cos \left(\frac{\pi n^2}{8} \right) \end{aligned}$$

Ще покажем, че $x(t)$ е аperiодична функция, докато $x[n]$ е периодична с основен период $N_0 = 8$.

Фиг. 1.9 изобразява сигналите

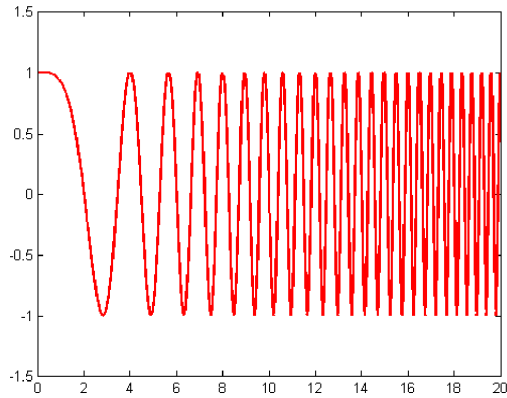
$$x(t) = \cos\left(\frac{\pi t^2}{8}\right)$$

за $0 \leq t \leq 8$ и

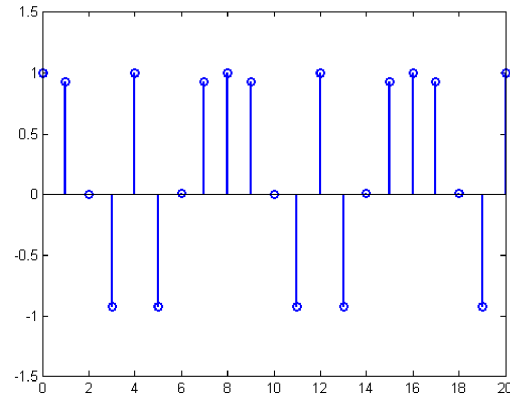
$$x[n] = \cos\left(\frac{\pi n^2}{8}\right)$$

за $0 \leq n \leq 8$.

Ясно е, че $x(t)$ е аperiодична, тъй като разликите в стойностите на t при $t > 0$, за които $x(t) = 0$, образуват редица, чиито последователни елементи монотонно намаляват.



(a) $\cos\left(\frac{\pi t^2}{8}\right)$



(b) $\cos\left(\frac{\pi n^2}{8}\right)$

Фигура 1.9 Разликата между $x(t) = \cos\left(\frac{\pi t^2}{8}\right)$ и $x[n] = \cos\left(\frac{\pi n^2}{8}\right)$. Забележете, че $x(t)$ е аperiодична, докато $x[n]$ е периодична.

От друга страна, $x[n]$ е периодична, с основен период $N_0 = 8$. За да проверим това, нека погледнем условието за периодичност $x[n] = x[n + N]$, което става:

$$\cos\left(\frac{\pi(n + N)^2}{8}\right) = \cos\left(\frac{\pi n^2}{8}\right),$$

за всяко $n \in \mathbb{Z}$. Това означава

$$\frac{\pi(n + N)^2}{8} = \frac{\pi n^2}{8} + 2\pi k,$$

за всяко $k \in \mathbb{Z}$, където k може да зависи от конкретния момент от времето n . Можем да се опростим това условие чрез разделяне на двете страни на уравнението с $\pi/8$ и да получим

$$(n + N)^2 = n^2 + \frac{8}{\pi}(2\pi k),$$

или

$$n^2 + 2nN + N^2 = n^2 + 16k,$$

откъдето

$$2nN + N^2 = 16k,$$

за всяко $k \in \mathbb{Z}$. След това, ние намираме N такова, че $2nN + N^2$ да се дели на 16 за всяко $n \in \mathbb{Z}$. Така определяме: $N = 8$ удовлетворява това условие, и няма по-малко число $N > 0$, което да го прави.

Приемайки $N = 8$ ние имаме

$$2nN + N^2 = 16n + 64,$$

което за всяко $n \in \mathbb{Z}$ е кратно на 16. Следователно $N = 8$ е периодът на $x[n]$. Може да се провери директно, че за всяко $1 \leq N < 8$, съществува стойност $n \in \mathbb{Z}$, такава че $2nN + N^2$ не се дели на 16. Например, ако вземем $N = 4$, получаваме израза

$$2nN + N^2 = 8n + 16,$$

който, за $n = 1$, не се дели на 16. Така $N = 4$, не е период на $x[n]$.

1.7.3 Периодичност и мащабиране

1. Да предположим, че $x(t)$ е периодична, и нека $a > 0$. Дали $y(t) = x(at)$ също е периодична? И дали ако T_0 е основния период на $x(t)$, T_0/a ще е основен период на $y(t)$.

2. Да предположим, че $x[n]$ е периодична, и нека $m \in \mathbb{Z}^+$. Дали $y[n] = x[mn]$ също е периодична? И дали ако N_0 е основния период на $x[n]$, и N - основния период на $y[n]$ е най-малкото положително цяло число, такова че mN се дели на N_0 без остатък, т.е.

$$mN \equiv 0 \pmod{N_0}$$

Пример 1: $N_0 = 8$, $m = 2$, тогава $n = 4$.

Пример 2: $N_0 = 6$, $m = 4$, тогава $n = 3$.

1.8. Нечетни и четни сигнали

1.8.1 Определения

Определение 5. Непрекъснатият във времето сигнал $x(t)$ е четен ако

$$x(-t) = x(t) \quad (1.9)$$

и е нечетен, ако

$$x(-t) = -x(t). \quad (1.10)$$

Определение 6. Дискретният във времето сигнал $x[n]$ е четен ако

$$x[-n] = x[n] \quad (1.11)$$

и е нечетен, ако

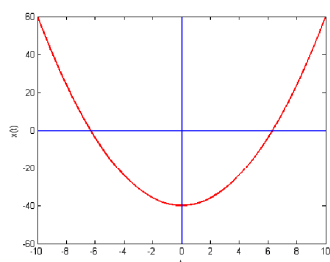
$$x[-n] = -x[n]. \quad (1.12)$$

Забележка: Тъждествено нулевият сигнал е както нечетен, така и четен. Никой друг сигнал не може да бъде едновременно нечетен и четен, но може да не бъде и двете. Следните примери (виж Фиг. 1.10) илюстрират просто тези свойства.

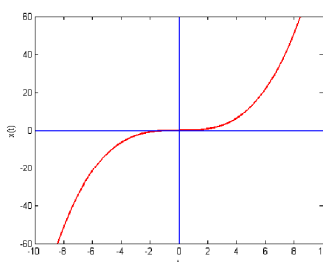
Пример 1: $x(t) = t^2 - 40$ е нечетна.

Пример 2: $x(t) = 0.1 t^3$ е четна.

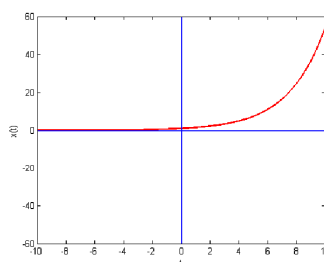
Пример 3: $x(t) = e^{0.4t}$ не е нито четна нито нечетна.



(a) $x(t) = t^2 - 40$



(b) $x(t) = 0.1t^3$



(c) $x(t) = e^{0.4t}$

Фигура 1.10 Илюстрации на четни и нечетни функции. (a) Четна; (b) Нечетна; (c) Нито четна нито нечетна

1.8.2 Теорема за разлагането

Теорема 2. Всеки непрекъснат във времето сигнал $x(t)$ може да се изрази както следва:

$$x(t) = y(t) + z(t),$$

където сигналът $y(t)$ е четен и $z(t)$ е нечетен.

Доказателство. Дефинираме

$$y(t) = \frac{x(t) + x(-t)}{2}$$

и

$$z(t) = \frac{x(t) - x(-t)}{2}.$$

Ясно е, че така дефинираният $y(-t) = y(t)$ е четен, а $z(t) = -z(-t)$ е нечетен. Можем също така да проверим, че $x(t) = y(t) + z(t)$.

Терминология: Сигналът $y(t)$ се нарича четна част на $x(t)$, обозначена с $\mathcal{E}v\{x(t)\}$. Сигналът $z(t)$ се нарича нечетна част на $x(t)$, обозначена с $\mathcal{O}dd\{x(t)\}$.

Пример: Нека разгледаме сигнала $x(t) = e^t$.

$$\mathcal{E}v\{x(t)\} = \frac{e^t + e^{-t}}{2} = \cosh(t).$$

$$\mathcal{O}dd\{x(t)\} = \frac{e^t - e^{-t}}{2} = \sinh(t).$$

По същия начин, можем да определим четната и нечетната части на дискретния във времето сигнал $x[n]$:

$$\mathcal{E}v\{x[n]\} = \frac{x[n] + x[-n]}{2},$$

$$\mathcal{O}dd\{x[n]\} = \frac{x[n] - x[-n]}{2}.$$

Лесно е да се провери, че

$$x[n] = \mathcal{E}v\{x[n]\} + \mathcal{O}dd\{x[n]\}.$$

Теорема 3. Разлагането е уникално, например, ако

$$x[n] = y[n] + z[n],$$

то $y[n]$ е четна и $z[n]$ е нечетна тогава и само тогава, когато $y[n] = \mathcal{E}v\{x[n]\}$ и $z[n] = \mathcal{O}dd\{x[n]\}$.

Доказателство. ако $y[n]$ е четна и $z[n]$ е нечетна, то

$$x[-n] = y[-n] + z[-n] = y[n] - z[n].$$

Следователно,

$$x[n] + x[-n] = (y[n] + z[n]) + (y[n] - z[n]) = 2y[n],$$

което означава, че $y[n] = \frac{x[n] + x[-n]}{2} = \mathcal{E}v\{x[n]\}$ и съответно $z[n] = \frac{x[n] - x[-n]}{2} = \mathcal{O}dd\{x[n]\}.$

Обратното доказателство е тривиално по дефиниция, тъй като $\mathcal{E}v\{x[n]\}$ трябва да бъде четна и $\mathcal{O}dd\{x[n]\}$ трябва да е нечетна.

1.9. Импулсна и стъпаловидна функции

1.9.1 Дискретни импулсна и стъпаловидна функции

Определение 7. Дискретният единичен импулсен сигнал $\delta[n]$ се дефинира като

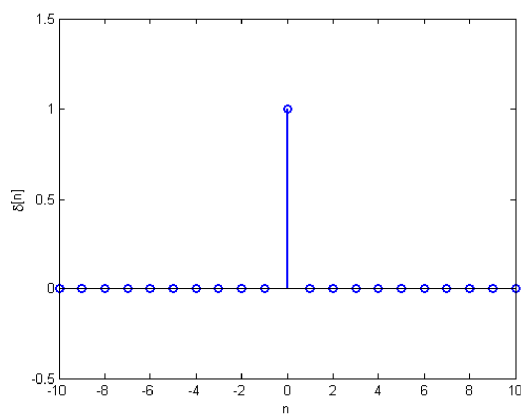
$$\delta[n] = \begin{cases} 1, & n = 0, \\ 0, & n \neq 0. \end{cases} \quad (1.13)$$

Определение 8. Дискретният единичен стъпаловиден сигнал $u[n]$ се дефинира като

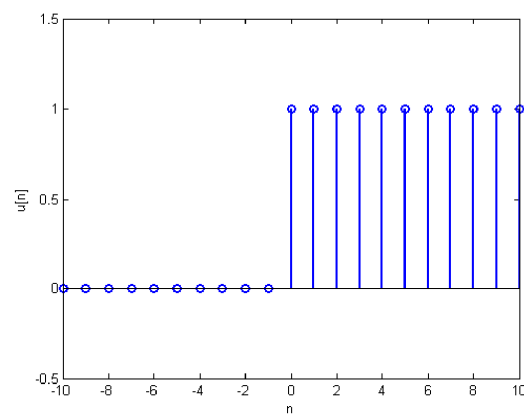
$$u[n] = \begin{cases} 1, & n \geq 0, \\ 0, & n < 0. \end{cases} \quad (1.14)$$

Може да се покаже, че

$$\begin{aligned} \delta[n] &= u[n] - u[n-1] \\ u[n] &= \sum_{k=0}^{\infty} \delta[n-k] \\ u[n] &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} u[k] \delta[n-k] \end{aligned}$$



(a) $\delta[n]$



(b) $u[n]$

Фигура 1.11 Определения на дискретна импулсна (а) функция и стъпаловидна (б) функции

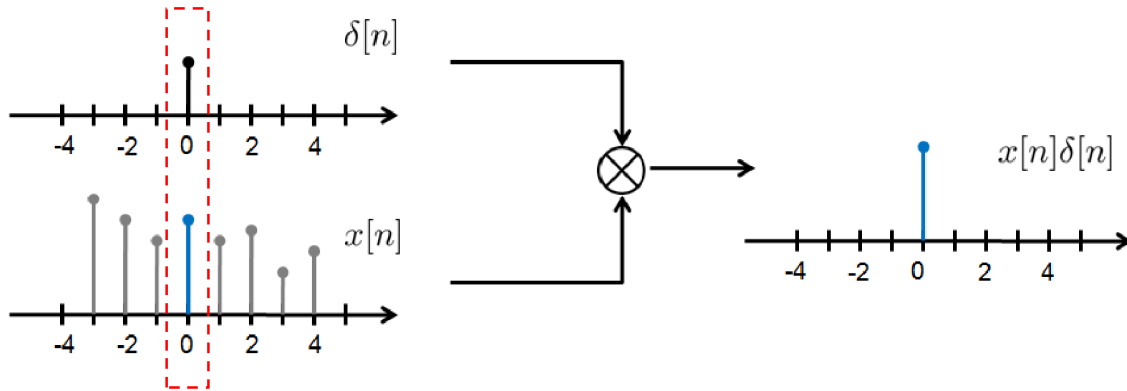
1.9.2 Свойства на $\delta[n]$

Свойство – вземане на отчет

По определение на $\delta[n]$, $\delta[n - n_0] = 1$, ако $n = n_0$ и на 0 в противен случай. Следователно,

$$\begin{aligned} x[n]\delta[n - n_0] &= \begin{cases} x[n], & n = n_0 \\ 0, & n \neq n_0 \end{cases} \\ &= x[n_0]\delta[n - n_0]. \end{aligned} \quad (1.15)$$

В частност когато $n_0 = 0$, ние имаме $x[n]\delta[n] = x[0]\delta[n]$. Образно казано, когато сигналът $x[n]$ се умножава $\delta[n]$, изходът (Фиг. 1.12) е единичен импулс с амплитуда $x[0]$.



Фигура 1.12: Илюстрация на $x[n]\delta[n] = x[0]\delta[n]$.

Свойство отместване

Понеже $x[n]\delta[n] = x[0]\delta[n]$ и $\sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta[n] = 1$ ние имаме

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]\delta[n] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[0]\delta[n] = x[0] \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta[n] = x[0]$$

И съответно

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]\delta[n - n_0] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n_0]\delta[n - n_0] = x[n_0] \quad (1.16)$$

Оттук правим следния извод:

$$\sum_{n=a}^b x[n]\delta[n - n_0] = \begin{cases} x[n_0], & \text{if } n_0 \in [a, b] \\ 0, & \text{if } n_0 \notin [a, b] \end{cases} \quad (1.17)$$

Свойство представителност

Използването на свойството **вземане на отчет** води до следното:

$$x[k]\delta[n - k] = x[n]\delta[n - k]$$

Сумираме двете страни на това уравнение по индекса k , което води до

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\delta[n-k] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[n]\delta[n-k] = x[n] \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta[n-k] = x[n]$$

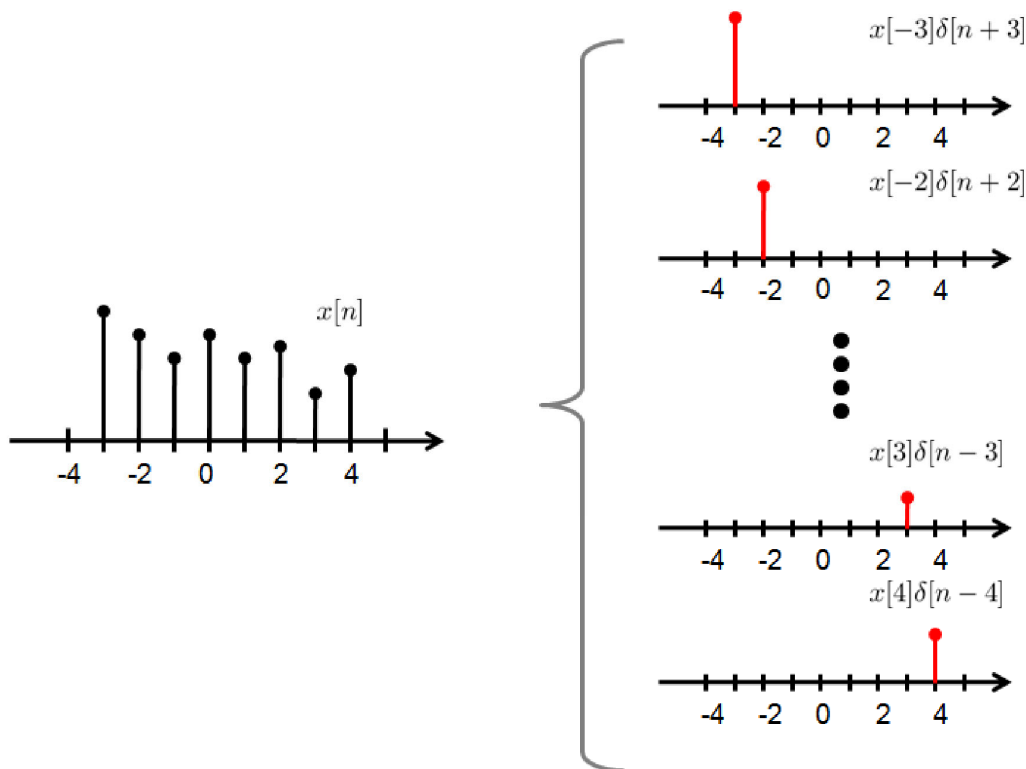
Този резултат показва, че всеки дискретен времеви сигнал $x[n]$ може да бъде представен като линейна комбинация от единични отместени импулси.

$$x[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\delta[n-k] \quad (1.18)$$

Например, единичната стъпаловидна функция може да бъде изразено като

$$u[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} u[k]\delta[n-k]$$

Защо ние използваме такова сложно представяне на $x[n]$? Защото, когато разглеждаме линейни инвариантни във времето системи (Глава 2), това ще ни позволи да се определим реакцията на системата към произволен сигнал $x[n]$ от импулсната ѝ реакция.



Фигура 1.13 Представяне на сигнал $x[n]$ с помощта на поредица от импулси $\delta[n-k]$

1.9.3 Непрекъснати във времето импулсна и стъпаловидна функции

Определение 9. Делта функцията на Дирак се дефинира като

$$\delta(t) = \begin{cases} 0, & \text{if } t \neq 0 \\ \infty, & \text{if } t = 0 \end{cases},$$

където

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = 1$$

Определение 10. Единичната стъпаловидна функция се дефинира като

$$u(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ 1, & t \geq 0 \end{cases}$$

1.9.4 Свойства на $\delta(t)$

Свойствата на $\delta(t)$ са аналогични на случая с дискретно време.

Свойство – вземане на отчет

$$x(t)\delta(t) = x(0)\delta(t) \quad (1.19)$$

За да видим това, трябва да имаме предвид, че $x(t)\delta(t) = x(0)$, когато $t = 0$ и $x(t)\delta(t) = 0$, когато $t \neq 0$.

Свойство представителност

Аналогично имаме

$$x(t)\delta(t - t_0) = x(t_0)\delta(t - t_0) \quad (1.20)$$

За всяко $t_0 \in \mathbb{R}$.

Свойство отместване

Свойството отместване следва от свойството за вземане на отчет. Интегрирането $x(t)\delta(t)$ дава

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(t)\delta(t)dt = \int_{-\infty}^{\infty} x(0)\delta(t)dt = x(0) \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)dt = x(0) \quad (1.21)$$

По същия начин, може да се покаже, че

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(t)\delta(t - t_0)dt = x(t_0) \quad (1.22)$$

Свойство представителност

Свойството представителност също е аналогично на случая с дискретно време:

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\delta(t - \tau)d\tau \quad (1.23)$$

когато частния случай за $u(t)$ се изчислява по формулата

$$u(t) = \int_{-\infty}^{\infty} u(\tau) \delta(t - \tau) d\tau \quad (1.23)$$

Като пример за свойството, нека разгледаме $\frac{d}{dt}u(t)$

$$\begin{aligned} u(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} u(\tau) \delta(t - \tau) d\tau \quad (\text{свойство представителност}) \\ &= \int_0^{\infty} \delta(t - \tau) d\tau, \text{ защото } u(\tau) = 0, \text{ при } \tau \leq 0 \\ &= \int_{-\infty}^t \delta(\sigma) d\sigma, \text{ нека } \sigma = t - \tau. \end{aligned}$$

От основната теорема за пресмятане на определен интеграл, имаме

$$\frac{d}{dt}u(t) = \frac{d}{dt} \int_{-\infty}^t \delta(\sigma) d\sigma = \delta(t). \quad (1.24)$$

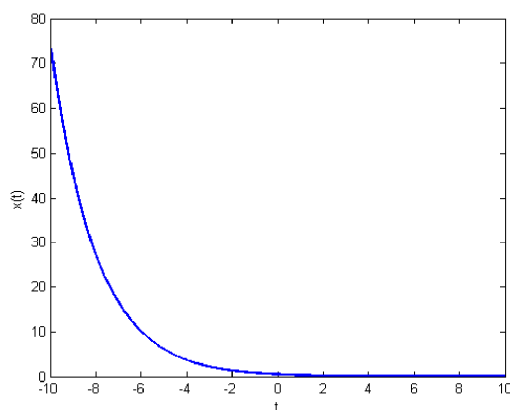
1.10. Комплексни експоненциални функции при непрекъснато време

Определение 11. Комплексната експоненциална функция се определя като

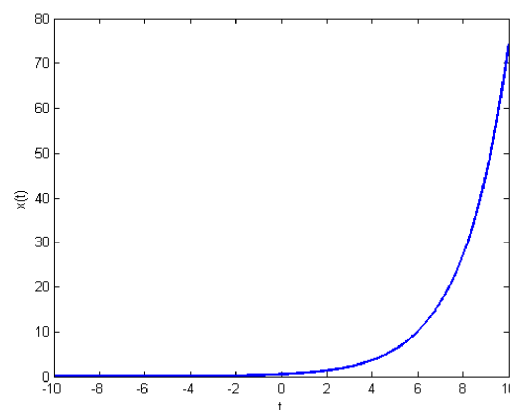
$$x(t) = Ce^{at}, \text{ където } C, a \in \mathbb{C}.$$

1.10.1 Реален експоненциал

Нека първо разгледаме случая (Фиг.1.14) на реални експоненциални функции, т.е. $a \in \mathbb{R}$ и $C \in \mathbb{R}$.



(a) $x(t) = \frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}t}$



(b) $x(t) = \frac{1}{2}e^{\frac{1}{2}t}$

Фигура 1.14 Реални експоненциални функции

В частност, когато $a = 0$ тогава функцията $x(t) = C$ е константна функция.

1.10.2 Периодичен комплексен експоненциал

Нека разгледаме случая, когато a е чисто имагинерна, т.е. $a = j\omega_0$, $\omega_0 \in \mathbb{R}$.

Тъй като C е комплексно число, имаме

$$x(t) = Ce^{at}$$

$$C = Ae^{j\theta}, \text{ където } A, \theta \in \mathbb{R}$$

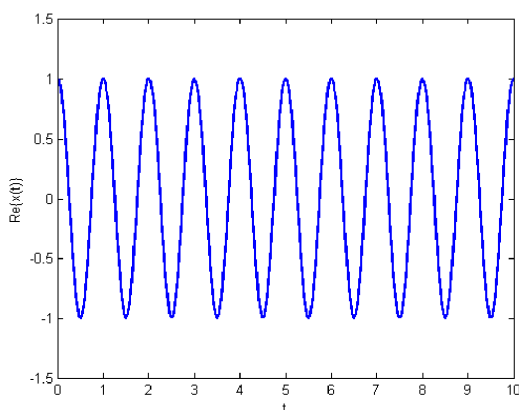
$$\begin{aligned} x(t) &= Ce^{j\omega_0 t} = Ae^{j\theta} e^{j\omega_0 t} \\ &= Ae^{j(\omega_0 t + \theta)} = A \cos(\omega_0 t + \theta) + jA \sin(\omega_0 t + \theta) \end{aligned}$$

Реалната и имагинерната части на $x(t)$ се дават от

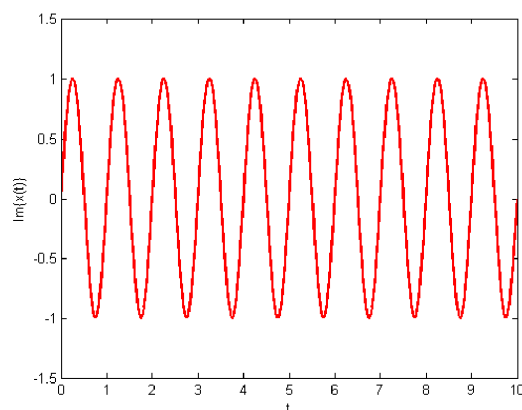
$$\operatorname{Re}\{x(t)\} = A \cos(\omega_0 t + \theta)$$

$$\operatorname{Im}\{x(t)\} = A \sin(\omega_0 t + \theta)$$

Можем да мислим за $x(t)$ като за двойка синусоидални сигнали с едни и същи амплитуда A , честота ω_0 и изместване на фазата θ , като единият е косинусоидален, а другият синусоидален.



(a) $\operatorname{Re}\{Ce^{j\omega_0 t}\}$



(b) $\operatorname{Im}\{Ce^{j\omega_0 t}\}$

Фигура 1.15 Периодична комплексна експоненциална функция $x(t) = Ce^{j\omega_0 t}$ ($C = 1$, $\omega_0 = 2\pi$)

Полезни резултати. $x(t) = Ce^{j\omega_0 t}$ е периодична с:

1. основен период $T_0 = \frac{2\pi}{|\omega_0|}$;
2. основна ъглова честота $|\omega_0|$.

Второто твърдение е непосредствен резултат от първото. За да покажем, верността на първото, ние трябва да докажем, че $x(t + T_0) = x(t)$ и не съществува по-малък период T_0 който да отговаря на критериите за периодичност.

$$\begin{aligned} x(t + T_0) &= C e^{j\omega_0(t + \frac{2\pi}{|\omega_0|})} = C e^{j\omega_0 t} e^{\pm j2\pi} \\ &= C e^{j\omega_0 t} = x(t). \end{aligned}$$

Лесно е да се покаже, че T_0 е най-малкият период!

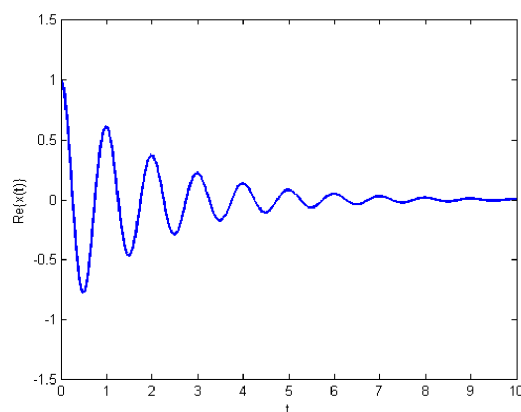
1.10.3 Общ случай на комплексен експоненциал

В общия случай, ние имаме $C = A e^{j\theta}$, където $A, \theta \in \mathbb{R}$ и $a = r + j \omega_0$, където $r, \omega_0 \in \mathbb{R}$. Следователно,

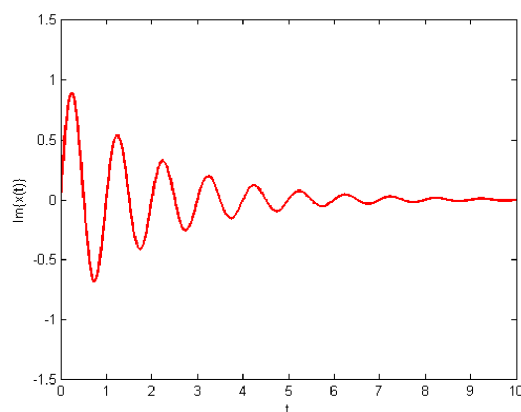
$$x(t) = (A e^{jr}) e^{(r+j\omega_0)t} = A e^{rt} e^{j(\omega_0 t + \theta)}$$

Да препишем това в ортогонална форма (виж Фиг.1.16):

$$x(t) = A e^{rt} \cos(\omega_0 t + \theta) + j A e^{rt} \sin(\omega_0 t + \theta).$$



(a) $\mathcal{R}e\{A e^{rt} e^{j\omega_0 t}\}$



(b) $\mathcal{I}m\{A e^{rt} e^{j\omega_0 t}\}$

Фигура 1.16: Периодична комплексна експоненциална функция

$$x(t) = A e^{rt} e^{j\omega_0 t} \quad (A = 1, r = -1/2, \omega_0 = 2\pi)$$

1.11. Комплексни експоненциали в дискретно време

1.11.1 Определения

Функцията на комплексния експоненциал в дискретно време има вида:

$$x[n] = C e^{\beta n},$$

Където $C, \beta \in \mathbb{C}$. Замествайки с $\alpha = e^{\beta}$ получаваме

$$x[n] = C \alpha^n.$$

В следващите подраздели, ние ще обсъдим поведението на $x[n]$ при различни стойности на C и α .

1.11.2 Комплексен експоненциал с реални стойности

$x[n]$ е комплексен експоненциал с реални стойности когато $C \in \mathbb{R}$ и $\alpha \in \mathbb{R}$. В този случай, $x[n] = C\alpha^n$ е монотонна намаляваща функция при $0 < \alpha < 1$, и е монотонно нарастваща функция, когато $\alpha > 1$.

1.11.3 Комплексен експоненциал с комплексни стойности

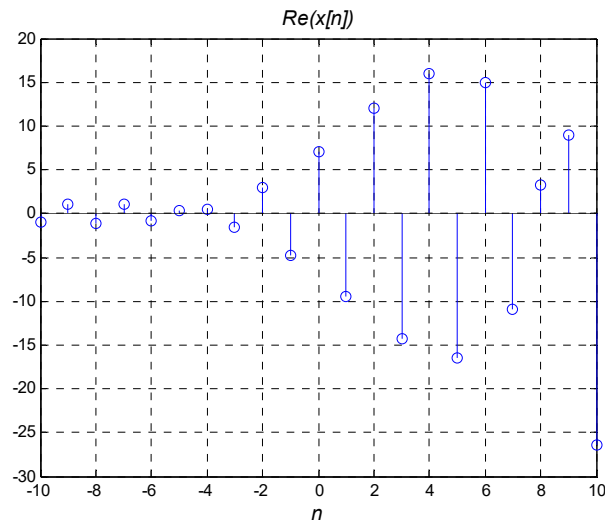
$x[n]$ е комплексен експоненциал с комплексни стойности, когато $C, \alpha \in \mathbb{C}$. В този случай, C и α могат да бъдат записани като $C = |C|e^{j\theta}$ и $\alpha = |\alpha|e^{j\Omega_0}$. Следователно,

$$\begin{aligned} x[n] &= C\alpha^n = |C|e^{j\theta} (|\alpha|e^{j\Omega_0})^n \\ &= |C||\alpha|^n e^{j(\Omega_0 n + \theta)} \\ &= |C||\alpha|^n \cos(\Omega_0 n + \theta) + j|C||\alpha|^n \sin(\Omega_0 n + \theta). \end{aligned}$$

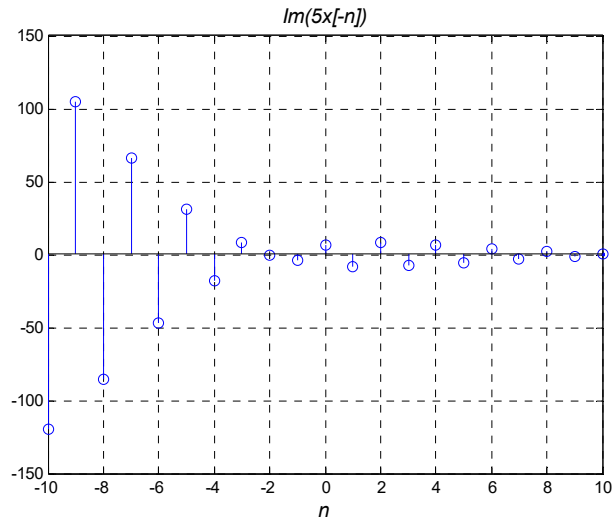
Тук могат да бъдат разгледани три случая:

1. Когато $|\alpha| = 1$, тогава $x[n] = |C| \cos(\Omega_0 n + \theta) + j|C| \sin(\Omega_0 n + \theta)$ и тя има синусоидални реални и имагинерни части (все пак не задължително периодични).

2. Когато $|\alpha| > 1$, тогава $|\alpha|^n$ е нарастващ експоненциал и реалните и имагинерните части на $x[n]$ са произведения със синусоиди.



3. Когато $|\alpha| < 1$, тогава реалните и имагинерните части на $x[n]$ са синусоиди, ограничени от спадящ експоненциал.



1.11.4 Периодични комплексни експоненциали

Нека разгледаме $x[n] = Ce^{j\Omega_0 n}$, $\Omega_0 \in \mathbb{R}$. Искаме да изследваме дали $x[n]$ ще бъде периодична. Условието за периодичност изисква, за някое $N > 0$,

$$x[n + N] = x[n], \quad \forall n \in \mathbb{Z}.$$

От $x[n] = Ce^{j\Omega_0 n}$, $\Omega_0 \in \mathbb{R}$ следва

$$e^{j\Omega_0(n+N)} = e^{j\Omega_0 n} e^{j\Omega_0 N} = e^{j\Omega_0 n}, \quad \forall n \in \mathbb{Z}.$$

Това е еквивалентно на

$e^{j\Omega_0 N} = 1$ или $\Omega_0 N = 2\pi m$, за всяко $m \in \mathbb{Z}$. Следователно, условието за периодичност на $x[n]$ е

$$\Omega_0 = \frac{2\pi m}{N}, \text{ за всяко } m \in \mathbb{Z} \text{ и всяко } N > 0 \text{ и } N \in \mathbb{Z}.$$

Така $x[n] = e^{j\Omega_0 n}$ е периодично, тогава и само тогава, когато Ω_0 е рационално число, кратно на 2π . Основният период е

$$N = \frac{2\pi m}{\Omega_0},$$

където можем да приемем, че m и N взаимно прости, $\text{НОД}(m; N) = 1$, т.е., m/N е в съкратен вид.

1.11.4 Периодичност на честотата

Нека $x[n] = e^{j\Omega_0 n}$, където $\Omega_0 \in \mathbb{R}$. Ако увеличим Ω_0 с 2π ще намерим

$$x_1[n] = e^{j(\Omega_0 + 2\pi)n} = e^{j\Omega_0 n} e^{j2\pi n}.$$

Но $n \in \mathbb{Z}$, затова $e^{j2\pi n} = 1$ и става ясно, че

$$x_1[n] = e^{j\Omega_0 n} = x[n].$$

Записано по-общо, за всяко $k \in \mathbb{Z}$, ние имаме

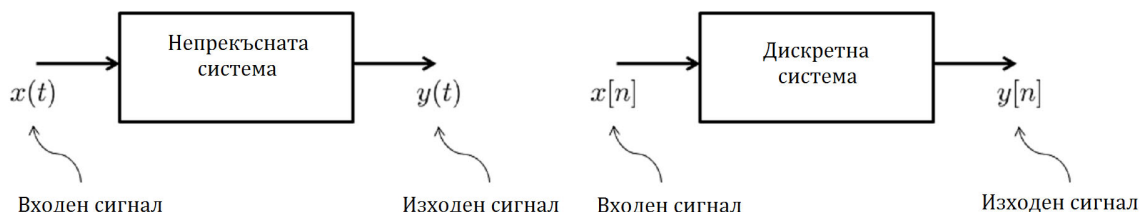
$$x_k[n] = e^{j(\Omega_0 + 2\pi k)n} = e^{j\Omega_0 n} = x[n].$$

Това означава, че може да се ограничи обхвата от стойности на Ω_0 до някакъв реален интервал от дължина 2π . Този интервал най-често се избира в диапазоните $(0, 2\pi)$ или $(-\pi, +\pi)$. Периодичността на честотата се отнася, разбира се, до периодичните сложни експоненциални сигнали, така че ние имаме различно разбиране за ниски и високи честоти в случая на дискретно време.

Глава 2

Системи

Система е количествено описание на физичен процес, което преобразува сигналите „на нейните входове“ в сигнали „на нейните изходи“. По-точно, една система е черна кутия "(разгледана като математическа абстракция), която детерминистично преобразува входните сигнали в изходни сигнали. В тази глава, ние ще изучаваме свойствата на системите.



Фигура 2.1 Непрекъсната и дискретна във времето системи

Забележки:

1. Тук ще разглеждаме и двата типа - непрекъснати системи и дискретни системи. Преобразуването на непрекъснатия сигнал $x(t)$ в дискретен във времето сигнал $x[n]$ ще бъде обсъдено в **Глава 6**.
2. Ще се съсредоточим върху системите с един вход и с един изход. Системите с много-входове и много изходи (MIMO) са извън обхвата на този курс.

2.1. Свойства на системите

2.1.1 Системи с и без памет

Определение 12. Една система е без памет ако изходът ѝ $y(t)$ в момента t (или n) зависи само от входа ѝ в момента t (или n).

Примери:

1. $y(t) = (2x(t) - x^2(t))^2$ е без памет защото $y(t)$ зависи само от $x(t)$. Тук отсъстват съставки например от типа $x(t+1)$ или $x(t-1)$.
2. $y[n] = x[n]$ е без памет. В действителност, в тази система има прехвърляха на входа към изхода директно, без никаква обработка.
3. $y[n] = x[n-1]$ е с памет, защото n -тото състояние на изхода зависи от $n-1$ -вото състояние на входа.

4. $y[n] = x[n] + y[n - 1]$ е с памет. За да видим това нека разгледаме

$$y[n - 1] = x[n - 1] + y[n - 2].$$

Заместването в $y[n] = x[n] + y[n - 1]$ ни дава

$$y[n] = x[n] + (x[n - 1] + y[n - 2]).$$

Чрез повтаряне на изчислението, имаме

$$\begin{aligned} y[n] &= x[n] + x[n - 1] + x[n - 2] + \dots \\ &= \sum_{k=-\infty}^n x[k]. \end{aligned}$$

Ясно е, че $y[n]$ зависи от не само от $x[n]$.

2.1.2 Обратимост и обратни системи

Определение 13. Една система е обратима, ако при точно определени входни сигнали тя създава точно определени изходни сигнали.

С други думи, системата е обратима ако съществува едно-към-едно преобразуване от набора от входни сигнали към набора от изходни сигнали.

Има две основни правила за демонстриране на обратимостта на система:

1. За да покажем, че системата е обратима, трябва да покажем инверсната формула.
2. За да покажем, че системата не е обратима, трябва да дадем числен пример.

Пример 1.

Системата $y(t) = (\cos(t) + 2)x(t)$ е обратима.

Доказателство. За да се покаже, че системата е обратима, ние трябва да намерим инверсна формула.

Това е лесно: от $y(t) = (\cos(t) + 2)x(t)$, чрез прегрупиране на израза имаме

$$x(t) = \frac{y(t)}{\cos(t) + 2},$$

което представлява обратна формула. Имайте предвид, че знаменателят е винаги положителен, като по този начин деленето е винаги валидно.

Пример 2.

Системата $y[n] = x[n] + y[n - 1]$ е обратима.

Доказателство. От $y[n] = x[n] + y[n - 1]$, чрез прегрупиране на израза имаме

$$x[n] = y[n] - y[n - 1].$$

Това е обратна формула.

Пример 3.

Системата $y(t) = x^2(t)$ не е обратима.

Доказателство. За да се покаже, че системата не е обратима, ние даваме числен пример. Нека разгледаме два сигнала

$$\begin{aligned} x_1(t) &= 1, \quad \forall t \\ x_2(t) &= -1, \quad \forall t. \end{aligned}$$

Очевидно $x_1(t) \neq x_2(t)$, но $(x_1(t))^2 = (x_2(t))^2$. Така, ние открихме един числен пример, при който различни входни сигнали дават еднакъв изходен сигнал. Следователно системата не е обратима.

2.1.2 Обусловеност (каузалност)

Определение 14. Една система е обусловена, ако изходът ѝ в момента t (или n) зависи само от входа във време $s \leq t$ (т.е., в настоящето и миналото).

Примери:

1. $y[n] = x[n - 1]$ е обусловена, защото $y[n]$ зависи само от миналия отчет $x[n - 1]$.
2. $y[n] = x[n] + x[n + 1]$ не е обусловена, защото $x[n + 1]$ е бъдещ отчет.
3. $y(t) = \int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau$ е обусловена, защото интегрирането по τ става в границите от $-\infty$ до t (който е изцяло в миналото).
4. $y[n] = x[-n]$ не е обусловена защото $y[-1]$ зависи от $x[1]$, което означава, че изходът при $n = -1$ зависи от бъдещо състояние на входа.
5. $y(t) = x(t) \cos(t + 1)$ е обусловена и без памет, защото $\cos(t + 1)$ е константа при зададено t .

2.1.3 Устойчивост

За да се опише устойчивостта на една система, първо трябва да се определи ограничеността на сигнала.

Определение 15. Сигналът $x(t)$ (и $x[n]$) е ограничен ако съществува константа $B < \infty$ такава, че $|x(t)| < B$ за всяко t .

Определение 16. Една система е устойчива, ако ограничен входен сигнал винаги поражда ограничен изходен сигнал. Това е вярно, ако при $|x(t)| < B$ и $B < \infty$ се изпълнява условието $|y(t)| < \infty$.

Пример 1.

Системата $y(t) = 2x^2(t-1) + x(3t)$ е устойчива.

Доказателство. За да покажем, че системата е устойчива, нека разгледаме ограничения входен сигнал $x(t)$, такъв че $|x(t)| < B$ за някакво $B < \infty$.

$$\begin{aligned} |y(t)| &= |2x^2(t-1) + x(3t)| \\ &\leq |2x^2(t-1)| + |x(3t)|, \text{ от неравенството на триъгълника} \\ &\leq 2|x^2(t-1)| + |x(3t)| \\ &\leq 2B^2 + B < \infty. \end{aligned}$$

Следователно, за всеки ограничен входен сигнал $x(t)$, сигналът на изхода $y(t)$ е винаги ограничен. Следователно системата е устойчива.

Пример 2.

Системата $y[n] = \sum_{k=-\infty}^n x[k]$ е неустойчива.

Доказателство. За да покажем, че системата $y[n] = \sum_{k=-\infty}^n x[k]$ е неустойчива ние ще зададем ограничен входен сигнал $x[n]$ и ще покажем, че изходният сигнал не е ограничен.

Нека $x[n] = u[n]$. Ясно е, че $|x[n]| < 1$ (т.е., ограничена). Следователно,

$$\begin{aligned} |y[n]| &= \left| \sum_{k=-\infty}^n u[k] \right| \\ &= \sum_{k=0}^n u[k] \\ &\leq \sum_{k=0}^n 1 = n + 1, \end{aligned}$$

което се стреми към ∞ при $n \rightarrow \infty$. Следователно, $|y[n]|$ не е ограничена.

2.1.3 Инвариантност във времето (стационарност)

Една система е **инвариантна** във времето (стационарна), ако **отместването във времето на входния сигнал води до същото отместване във времето на изходния сигнал**. Тоест ако на сигнала $x(t)$ съответства сигнал $y(t)$

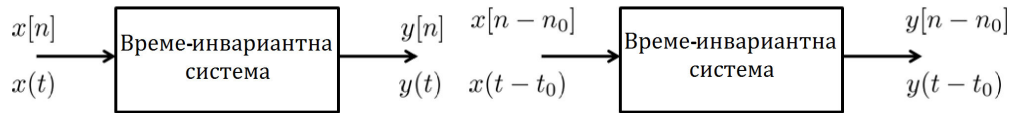
$$x(t) \longrightarrow y(t),$$

тогава системата е инвариантна във времето, ако

$$x(t - t_0) \longrightarrow y(t - t_0),$$

за всяко $t_0 \in \mathbb{R}$.

Фиг. 2.2 илюстрира тълкуване на време-инвариантна система: Ако при входен сигнал $x(t)$ за дадена време-инвариантна система се получава изходен сигнал $y(t)$, то при входен сигнал $x(t - t_0)$ в изхода ще се получи сигнал $y(t - t_0)$.



Фигура 2.2 Илюстрация на време-инвариантна система

Пример 1.

Системата $y(t) = \sin[x(t)]$ е време-инвариантна.

Доказателство. Нека разгледаме един, изместен във времето сигнал $x_1(t) = x(t - t_0)$. Съответно, нека $y_1(t)$ да е сигнала на изхода при $x_1(t)$. Следователно,

$$y_1(t) = \sin[x_1(t)] = \sin[x(t - t_0)].$$

Сега, ние трябва да проверим дали $y_1(t) = y(t - t_0)$. За да покажем това, нека отбележим, че

$$y(t - t_0) = \sin[x(t - t_0)],$$

която е същата като $y_1(t)$. Следователно, системата е време-инвариантна.

Пример 2.

Системата $y[n] = nx[n]$ не е време-инвариантна (т.е. е нестационарна).

Доказателство. За да докажем, че системата не е време-инвариантна нека разгледаме един числен пример. Нека $x[n] = \delta[n]$, тогава $y[n] = n \delta[n] = 0$ за всяко n (защо?). Сега, нека $x_1[n] = x[n - 1] = \delta[n - 1]$. Ако $y_1[n]$ е изхода вследствие на $x_1[n]$, е лесно да се покаже, че

$$\begin{aligned} y_1[n] &= nx_1[n] \\ &= n\delta[n - 1] \\ &= \delta[n - 1] \text{ (защо?).} \end{aligned}$$

Въпреки това, $y[n - 1] = (n - 1) x[n - 1] = (n - 1) \delta[n - 1] = 0$ за всяко n . Така $y_1[n] \neq y[n - 1]$. С други думи, ние дадохме един пример, където $y[n - 1]$ не е изхода при $x[n - 1]$.

2.1.6 Линеиност

Определение 18. Една система е линейна ако е адитивна и мащабируема. Това означава,

$$ax_1(t) + bx_2(t) \longrightarrow ay_1(t) + by_2(t),$$

за всяко $a, b \in \mathbb{C}$.

Пример 1.

Системата $y(t) = 2\pi x(t)$ е линейна. За да видим това нека разгледаме сигнала

$$x(t) = ax_1(t) + bx_2(t),$$

където $y_1(t) = 2\pi x_1(t)$ и $y_2(t) = 2\pi x_2(t)$. Тогава

$$\begin{aligned} ay_1(t) + by_2(t) &= a(2\pi x_1(t)) + b(2\pi x_2(t)) \\ &= 2\pi [ax_1(t) + bx_2(t)] = 2\pi x(t) = y(t). \end{aligned}$$

Пример 2.

Системата $y[n] = (x[2n])^2$ е нелинейна. За да видим това нека разгледаме сигнала

$$x[n] = ax_1[n] + bx_2[n],$$

където $y_1[n] = (x_1[2n])^2$ и $y_2[n] = (x_2[2n])^2$. Искаме да видим дали $y[n] = ay_1[n] + by_2[n]$. Тогава

$$ay_1[n] + by_2[n] = a(x_1[2n])^2 + b(x_2[2n])^2.$$

Обаче,

$$y[n] = (x[2n])^2 = (ax_1[2n] + bx_2[2n])^2 = a^2(x_1[2n])^2 + b^2(x_2[2n])^2 + 2abx_1[n]x_2[n].$$

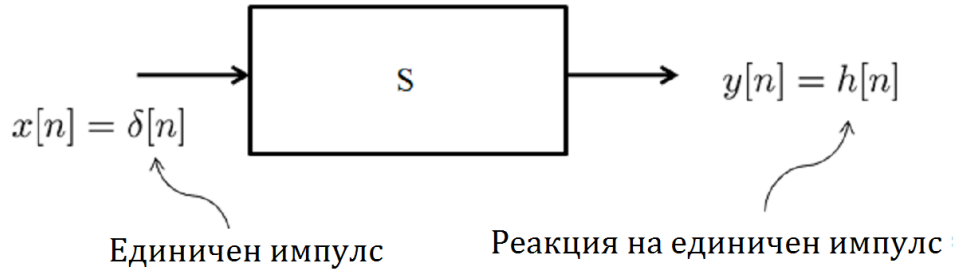
2.2. Конволюция (кръгово свиване)

2.2.1 Какво е конволюция

Линейните инвариантни във времето (ЛИВ) системи са добри модели за много системи от реалния живот, и те имат свойства, които водят до много мощна и ефективна теория за анализ на тяхното поведение. По-нататък, ние ще изучаваме ЛИВ системите чрез тяхната характеристична функция, наречена **импулсна реакция** (или импулсна преходна функция).

Да започнем с това, като разгледаме дискретни във времето сигнали. Нека означим с $h[n]$ "импулсната реакция" на ЛИВ системата S . Импулсната реакция, е реакцията на системата на единичен входен импулс (Фиг. 2.3). Припомнете си определението на единичен импулс:

$$\delta[n] = \begin{cases} 1, & n = 0 \\ 0, & n \neq 0 \end{cases} \quad (2.1)$$



Фигура 2.3 Определение на импулсна реакция

Беше показано (формула 1.15), че

$$x[n]\delta[n - n_0] = x[n_0]\delta[n - n_0] \quad (2.2)$$

Изполвайки този факт ние получаваме следните уравнения:

$$\begin{array}{lll} x[n]\delta[n] & = & x[0]\delta[n] \quad (n_0 = 0) \\ x[n]\delta[n - 1] & = & x[1]\delta[n - 1] \quad (n_0 = 1) \\ x[n]\delta[n - 2] & = & x[2]\delta[n - 2] \quad (n_0 = 2) \\ \vdots & & \vdots \\ \underbrace{x[n]\delta[n - k]}_{=x[n]\left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta[n - k]\right)} & = & \underbrace{x[k]\delta[n - k]}_{=\sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\delta[n - k]} \end{array}$$

Сумата отлявата страна е

$$x[n] \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta[n - k] \right) = x[n],$$

защото $\sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta[n - k] = 1$ за всяко n . Сумата отлявата страна е

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\delta[n - k]$$

Ето защо, приравняването на лявата страна и дясната страна дава

$$x[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\delta[n - k] \quad (2.3)$$

С други думи, **всеки сигнал $x[n]$, винаги може да се изрази като сума от импулси!**

Нататък, да предположим, че **знаем, че импулсната реакция на ЛИВ системата е $h[n]$** . Искаме **да определим изхода $y[n]$** . За да направим това, ние първо изразяваме $x[n]$ като сума от импулси:

$$x[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] \delta[n - k]$$

За всеки импулс $\delta[n - k]$, можем да определим нейната импулсна реакция, защото за една ЛИВ система:

$$\delta[n] \rightarrow h[n],$$

$$\delta[n - k] \rightarrow h[n - k] \text{ (отместване - системата е стационарна),}$$

$$x[k] \delta[n - k] \rightarrow x[k] h[n - k] \text{ (мащабиране - системата е линейна).}$$

Следователно, ние имаме

$$x[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] \delta[n - k] \rightarrow \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] h[n - k] = y[n]$$

Това уравнение

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] h[n - k] \quad (2.4)$$

е известно като **уравнение на конволюцията**.

2.2.2 Определение и свойства на конволюцията

Определение 19. При входен сигнал $x[n]$ и импулсна реакция на ЛИВ система $h[n]$, конволюцията между $x[n]$ и $h[n]$ се определя като

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] h[n - k]$$

Ние ще означаваме действието конволюция като

$$y[n] = x[n] * h[n].$$

За входния сигнал имаме аналогично обозначение

$$x[n] = x[n] * \delta[n].$$

- **равнотойна форма:** Полагайки $m = n - k$, ние можем да покажем, че

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[n-k] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x[n-m]h[m] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[n-k]h[k]$$

Формулата за конволюцията е вярна само когато системата е ЛИВ. Ако системата е променлива във времето (нестационарна), тогава

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h_k[n-k],$$

т.е. $h[n]$ е различна във всеки момент от времето k .

Лесно могат да бъдат доказани следните "стандартни" свойства:

1. Комутативност: $x[n] * h[n] = h[n] * x[n]$ (виж равностойната форма)
2. Асоциативност: $x[n] * (h_1[n] * h_2[n]) = (x[n] * h_1[n]) * h_2[n]$
3. Разпределителност: $x[n] * (h_1[n] + h_2[n]) = (x[n] * h_1[n]) + (x[n] * h_2[n])$

2.2.3 Как да изчислим конволюцията?

За да се изчисли конволюцията, има три основни стъпки:

1. Обръщане във времето;
2. Отместване във времето;
3. Умножение и сумиране.

Пример 1. (Вижте нагледна демонстрация) Да разгледаме сигнала $x[n]$ и импулсната реакция $h[n]$, показани по-долу.



Нека изчислим изхода $y[n]$ стъпка по стъпка. Първо, да видим $y[0]$:

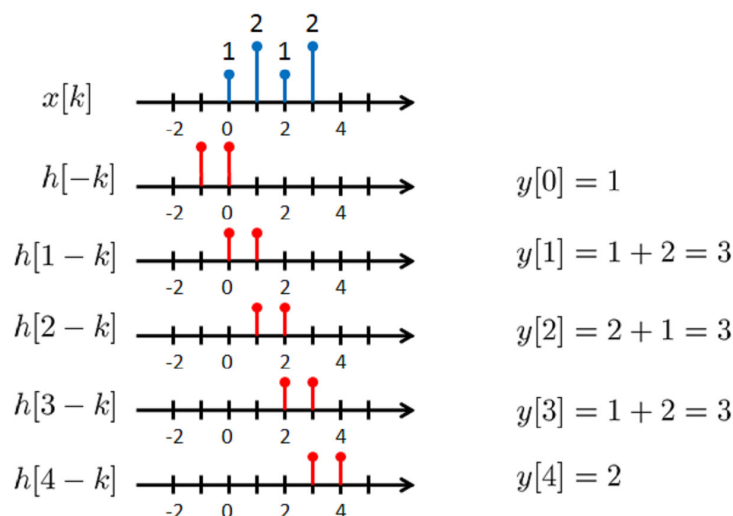
$$y[0] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[0-k] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[-k] = 1$$

Забележете, че $h[-k]$ е обърнатата във времето версия на $h[k]$, а $\sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[-k]$ е сума на произведенията на $x[k]$ и $h[-k]$.

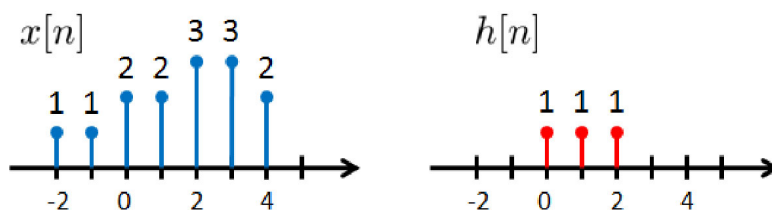
За да определим $y[1]$ ние обръщаме във времето $h[k]$ за да получим $h[-k]$, отместваме във времето $h[k]$ за да получим $h[1-k]$ и сумираме произведенията за да изчислим $\sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[1-k]$. Следователно,

$$y[1] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[1-k] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[1-k] = 1 \times 1 + 2 \times 1 = 3$$

Илюстративно, това изчисление е показано на фигурата по-долу.



Пример 2. (Вижте нагледна демонстрация)



Пример 3. (Вижте нагледна демонстрация)

$$x[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n],$$

$$h[n] = \delta[n] + \delta[n-1]$$

2.3. Свойства на импулсната реакция на ЛИВ система

С въвеждането на понятието конволюция, вече можем да пристъпим към обсъждане на **свойствата на системата от гледна точка на нейната импулсна характеристика** (реакция).

2.3.1 Памет

Една система е без памет ако изходът ѝ зависи само настоящото състояние на входа. Еквивалентното твърдение с използването на импулсната реакция $h[n]$ е, че:

Теорема 4. Една ЛИВ система е без памет тогава и само тогава, когато

$$h[n] = a\delta[n] \text{ за някакво } a \in \mathbb{C}.$$

Доказателство. $h[n] = a\delta[n]$, тогава за всеки вход $x[n]$, изходът е

$$\begin{aligned}
y[n] &= x[n] * h[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[n-k] \\
&= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]a\delta[n-k] \\
&= ax[n].
\end{aligned}$$

Така че, системата е без памет. И обратно, ако системата е без памет, тогава $y[n]$, не може да зависи от стойностите на $x[k]$ при $k \neq n$. Ако погледнем към формулата за сумата на конволюцията

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[n-k],$$

можем да заключим, че

$$h[n-k] = 0 \text{ за всяко } k \neq n,$$

или еквивалентно

$$h[n] = 0 \text{ за всяко } n \neq 0.$$

Това означава,

$$y[n] = x[n]h[0] = ax[n],$$

когато сме задали $a = h[0]$.

2.3.2 Обратимост

Теорема 5. Една ЛИВ система е обратима, тогава и само тогава, когато съществува $g[n]$, така че

$$h[n] * g[n] = \delta[n] \quad (2.6)$$

Доказателство. Ако системата S е обратима, тогава $x_1[n] \neq x_2[n]$ означава, че и $y_1[n] \neq y_2[n]$. По този начин съществува еднозначно съответствие S , така че $y[n] = S(x[n]) = h[n] * x[n]$.

Тъй като функцията $y[n]$ е обратима, съществува обратно еднозначно съответствие S^{-1} , такава че

$$S^{-1}(S(x[n])) = x[n],$$

за всяко $x[n]$. Следователно, съществува $g[n]$, такава че

$$g[n] * (h[n] * x[n]) = x[n].$$

Вследствие на асоциативността на конволюцията, имаме $(g[n] * h[n]) * x[n] = x[n]$, което означава, че $g[n] * h[n] = \delta[n]$.

И обратно, ако съществува $g[n]$, такава че $h[n] * g[n] = \delta[n]$, тогава за всяко $x_1[n] \neq x_2[n]$ ние имаме

$$\begin{aligned} y_1[n] &= h[n] * x_1[n] \\ y_2[n] &= h[n] * x_2[n], \end{aligned}$$

И $y_1[n] \neq y_2[n]$. Вземайки разликата между $y_1[n]$ и $y_2[n]$, имаме

$$y_1[n] - y_2[n] = h[n] * \{x_1[n] - x_2[n]\}.$$

Конволирайки двете страни на горното уравнение с $g[n]$ получаваме

$$g[n] * (y_1[n] - y_2[n]) = \delta[n] * (x_1[n] - x_2[n]).$$

Тъй като $x_1[n] \neq x_2[n]$ и $g[n] \neq 0$, то за всяко n , ние имаме $y_1[n] \neq y_2[n]$. Следователно системата е обратима.

2.3.3 Обусловеност

Теорема 6. Една ЛИВ система е обусловена (причинно-следствена) тогава и само тогава, когато

$$h[n] = 0, \text{ за всяко } n < 0.$$

Доказателство. Ако S е обусловена, тогава изходът $y[n]$ не може да зависи от $x[k]$ за $k > n$. От уравнението на конволюцията,

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[n-k],$$

ние имаме

$$h[n-k] = 0; \text{ за } k > n; \text{ или еквивалентно } h[n-k] = 0; \text{ за } n-k < 0:$$

Полагайки $m = n - k$ ние виждаме, че

$$h[m] = 0; \text{ за } m < 0:$$

Обратно, ако $h[k] = 0$ за $k < 0$, тогава за входния сигнал $x[n]$,

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]x[n-k] = \sum_{k=0}^{\infty} h[k]x[n-k]$$

Следователно, $y[n]$ зависи само от $x[m]$ за $m \leq n$.

2.3.4 Устойчивост

Теорема 7. Една ЛИВ система е устойчива тогава и само тогава, когато

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |h[k]| < \infty.$$

Доказателство. Да предположим, че $\sum_{k=-\infty}^{\infty} |h[k]| < \infty$. За всеки ограничен сигнал $|x[n]| \leq B$, изходът е

$$\begin{aligned} |y[n]| &\leq \left| \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[n-k] \right| \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} |x[k]| \cdot |h[n-k]| \\ &\leq B \cdot \sum_{k=-\infty}^{\infty} |h[n-k]|. \end{aligned}$$

Следователно, $y[n]$ също е ограничен.

От друга страна, ако предположим, че $\sum_{k=-\infty}^{\infty} |h[k]| = \infty$. Можем да покажем, че $y[n]$ не е ограничена. За целта дефинираме сигнала

$$x[n] = \begin{cases} 1, & h[-n] > 0, \\ -1, & h[-n] < 0. \end{cases}$$

Ясно е, че $|x[n]| \leq 1$ за всяко n . Изходният сигнал $y[0]$ се дава от

$$\begin{aligned} |y[0]| &= \left| \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[-k] \right| \\ &= \left| \sum_{k=-\infty}^{\infty} |h[-k]| \right| \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} |h[-k]| = \infty. \end{aligned}$$

Следователно, сигналът $y[n]$ не е ограничен.

2.4. Конволюция при непрекъснато време

До този момент ние бяхме фокусирани върху случая с дискретно време. Случаят с непрекъснато време, в действителност, е аналогичен на случая с дискретно време. При непрекъснати във времето сигнали, представянето на сигнала е

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\delta(t-\tau)d\tau, \quad (2.8)$$

и следователно, при непрекъснато време конволюцията се определя като

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau. \quad (2.9)$$

Пример.

Конволюцията при непрекъснатото време също следва правилото за трите стъпки: обръщане във времето, отместване във времето, сумиране на произведения. За да видим конкретен пример, нека разгледаме сигнала $x(t) = e^{-at} u(t)$ за $a > 0$, и импулсна реакция $h(t) = u(t)$. Изходът $y(t)$ ще бъде

Случай А: $t > 0$:

$$\begin{aligned} y(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) h(t - \tau) d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-a\tau} u(\tau) u(t - \tau) d\tau \\ &= \int_0^t e^{-a\tau} d\tau \\ &= \frac{1}{-a} [1 - e^{-at}]. \end{aligned}$$

Случай В: $t \leq 0$:

$$y(t) = 0.$$

Тогава

$$y(t) = \frac{1}{a} [1 - e^{-at}] u(t).$$

2.4.1 Свойства на конволюцията при непрекъснато време

Лесно могат да бъдат доказани следните свойства:

1. Комутативност: $x(t) * h(t) = h(t) * x(t)$
2. Асоциативност: $x(t) * (h_1(t) * h_2(t)) = (x(t) * h_1(t)) * h_2(t)$
3. Разпределителност: $x(t) * [h_1(t) + h_2(t)] = [x(t) * h_1(t)] + [x(t) * h_2(t)]$

2.4.2 Свойства на ЛИВ системите при непрекъснато време

Дадените по-долу резултати са аналогични на случая с дискретно време.

Памет

Една ЛИВ система е без памет тогава и само тогава, когато

$$h(t) = a\delta(t), \text{ за } a \in \mathbb{C}.$$

Обратимост

Една ЛИВ система е обратима тогава и само тогава, когато съществува $g(t)$ такава, че

$$h(t) * g(t) = \delta(t).$$

Обусловеност

Една ЛИВ система е обусловена тогава и само тогава, когато

$$h(t) = 0; \text{ за всяко } t < 0.$$

Устойчивост

Една ЛИВ система е устойчива тогава и само тогава, когато

$$\int_{-\infty}^{\infty} |h(\tau)| d\tau < \infty.$$

Глава 3

Редове на Фурие

Целта на тази глава е да определи едно семейство от сигнали $\{x_k(t)\}$ такива, че:

1. Всеки сигнал в това семейство да преминава през произволна ЛИВ система само с промяна на мащаба (или с друга просто описана промяна)

$$x_k(t) \longrightarrow \lambda_k x_k(t),$$

където λ_k е мащабиращ фактор.

2. "Всеки" сигнал може да бъде представен като "линейна комбинация" на сигнали от неговото семейство.

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k x_k(t).$$

Това ще ни позволи да определим изхода, генериран от $x(t)$:

$$x(t) \longrightarrow \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k \lambda_k x_k(t),$$

където скаларната величина a_k идва от определението на линейна комбинация.

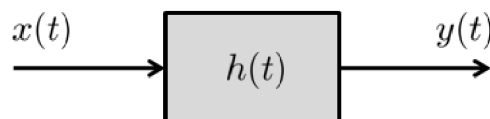
3.1. Собствени функции на ЛИВ система

За да се отговори на първия въпрос, ние се нуждаем от понятието собствена функция на ЛИВ система.

Определение 20. За ЛИВ система, ако изходът е мащабирана версия на входа, тогава входната функция се нарича **собствена функция** на системата. Коефициентът на мащабиране се нарича **собствена стойност** на системата.

3.1.1 Случай с непрекъснато време

Нека разгледаме ЛИВ система с импулсна реакция $h(t)$ и входен сигнал $x(t)$:



Да предположим, че $x(t) = e^{st}$ за стойност на $s \in \mathbb{C}$, тогава изходът се дава от

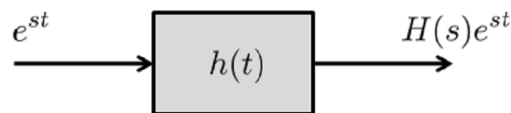
$$\begin{aligned} y(t) &= h(t) * x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) x(t - \tau) d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) e^{s(t-\tau)} d\tau \\ &= \left[\int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) e^{-s\tau} d\tau \right] e^{st} = H(s) e^{st} = H(s) x(t), \end{aligned}$$

където $H(s)$ се определя от

$$H(s) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) e^{-s\tau} d\tau.$$

Функцията $H(s)$ е известна като предавателна функция на непрекъснатата във времето ЛИВ система. Имайте предвид, че $H(s)$ се определя от импулсната реакция $h(t)$, и е функция на s (независима от t). Следователно, $H(s) x(t)$ може да се разглежда като скаларната величина $H(s)$, умножена с функцията $x(t)$.

От диференцирането по-горе, ние виждаме, че ако на входа имаме $x(t) = e^{st}$, тогава изходът е мащабирана версия $y(t) = H(s)e^{st}$:



Следователно, като се използва определението на собствена функция, се демонстрира, че

1. e^{st} е собствена функция на всяка непрекъснатата във времето ЛИВ система, и
2. $H(s)$ е съответната ѝ собствена стойност.

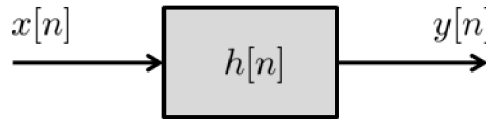
Ако ние се ограничим с подкласа на периодичните комплексни експоненциали от вида $e^{j\omega t}$, $\omega \in \mathbb{R}$, чрез определяне $s = j\omega$, получаваме

$$H(s)|_{s=j\omega} = H(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau.$$

$H(j\omega)$ се нарича честотната характеристика на системата.

3.1.2 Случай с дискретно време

По-нататък нека разгледаме случая с дискретно време



Да предположим, че импулсната реакция се дава от $h[n]$, и входът е $x[n] = z^n$, тогава изходът $y[n]$ е

$$\begin{aligned} y[n] &= h[n] * x[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]x[n-k] \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]z^{n-k} \\ &= z^n \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]z^{-k} = H(z)z^n, \end{aligned}$$

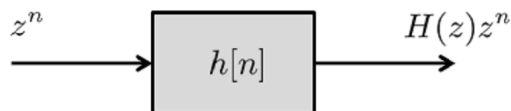
където ние дефинираме

$$H(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]z^{-k}$$

и $H(z)$ е известна като предавателна функция в дискретно време на ЛИВ система.

Подобно на случая с непрекъснато време, този резултат показва, че

1. z^n е собствена функция на дискретна ЛИВ система и
2. $H(z)$ е съответната ѝ собствена стойност.



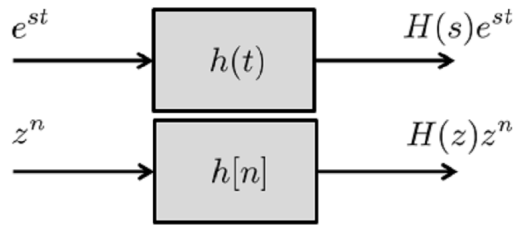
Разглеждайки подкласа на периодичните комплексни експоненциали $e^{j(2\pi/N)n}$ и полагайки $z = e^{j2\pi/N}$ ние имаме

$$H(z)|_{z=e^{j\Omega}} = H(e^{j\Omega}) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]e^{-j\Omega k},$$

където $\Omega = \frac{2\pi}{N}$, и $H(e^{j\Omega})$ се нарича честотна характеристика на системата.

3.1.3 Обобщение

В резюме можем да изкажем следните съображения:



Ако e^{st} е собствена функция на непрекъснатата във времето (НВ) система, както и z^n е собствена функция на дискретна във времето (ДВ) система. Съответните собствени стойности са съответно $H(s)$ и $H(z)$.

Ако заместим $s = j\omega$ и $z = e^{j\Omega}$, тогава собствените функции стават $e^{j\omega t}$ и $e^{j\Omega n}$; собствените стойности стават $H(j\omega)$ и $H(e^{j\Omega})$.

3.1.4 Защо са важни собствените функции

Отговорът на този въпрос е свързан с втората цел, поставена в началото на главата. Нека разгледаме сигнала $x(t)$:

$$x(t) = a_1 e^{s_1 t} + a_2 e^{s_2 t} + a_3 e^{s_3 t}.$$

Според анализа на собствените функции, изходът за всеки един комплексен входен експоненциал е

$$\begin{aligned} e^{s_1 t} &\longrightarrow H(s_1) e^{s_1 t} \\ e^{s_2 t} &\longrightarrow H(s_2) e^{s_2 t} \\ e^{s_3 t} &\longrightarrow H(s_3) e^{s_3 t}. \end{aligned}$$

Тогава изходът е

$$y(t) = a_1 H(s_1) e^{s_1 t} + a_2 H(s_2) e^{s_2 t} + a_3 H(s_3) e^{s_3 t}.$$

Резултатът означава, че ако на входа имаме линейна комбинация от комплексни експоненциали, на изхода на ЛИВ системата също имаме линейна комбинация от комплексни експоненциали. По-общо казано, ако $x(t)$ е крайна сума от комплексни експоненциали,

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{s_k t},$$

тогава изходът е отново сума от комплексни експоненциали:

$$y(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k H(s_k) e^{s_k t}.$$

По същия начин за дискретни сигнали, ако

$$x[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k z_k^n,$$

то

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k H(z_k) z_k^n$$

Това е важно наблюдение, защото след като ние можем да изразим сигнала $x(t)$ като линейна комбинация от собствени функции, тогава изходът $y(t)$ лесно може да се определи чрез предавателната функция (която е фиксирана за ЛИВ система!). Сега, въпросът е: Как да се изрази сигналът $x(t)$ като линейна комбинация от комплексни експоненциали?

3.2. Представяне в ред на Фурие

Съществуване на реда на Фурие

Като цяло, не всеки сигнал $x(t)$ може да бъде представен като линейна комбинация от комплексни експоненциали. Въпреки това, такова разлагане е възможно за изключително голям клас на сигнали. Нека проучим един клас сигнали, които могат да бъдат разложени. Това са периодичните сигнали

$$x(t + T) = x(t)$$

които отговарят на квадратичното интегрално условие,

$$\int_T |x(t)|^2 dt < \infty,$$

или на условията на Дирихле (Можете да намерите повече за тях в § 3.4):

1. През всеки период $x(t)$ трябва да бъде абсолютно интегрируемо, т.е.

$$\int_T |x(t)| dt < \infty.$$

2. Във всеки краен интервал от време $x(t)$ е с ограничени вариации; това означава, че има не повече от краен брой максимуми и минимуми по време на всеки един период на сигнала.

3. Във всеки краен интервал от време, има само краен брой прекъсвания.

Този клас сигнали, ние сме в състояние да изразим като линейна комбинация от комплексни експоненциали:

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk\omega_0 t}.$$

Тук ω_0 е основната честота

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T},$$

и коефициентите a_k са известни като коефициенти на Ред на Фурие.

При даден периодичен сигнал $x(t)$, чийто квадрат на модула е интегрируем, как да се определят коефициентите a_k на реда на Фурие? Отговор дава следната теорема.

3.2.1 Коефициенти на реда на Фурие при непрекъснато време

Теорема 8. Коефициентите на реда на Фурие при НВ a_k на сигнала

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk\omega_0 t}$$

се дават от

$$a_k = \frac{1}{T} \int_T x(t) e^{-jk\omega_0 t} dt$$

Доказателство. Нека разгледаме сигнала

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk\omega_0 t}$$

Ако умножим двете страни с $e^{-jn\omega_0 t}$, тогава имаме

$$x(t) e^{-jn\omega_0 t} = \left[\sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk\omega_0 t} \right] e^{-jn\omega_0 t} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{j(k-n)\omega_0 t}.$$

Интегрирането на двете страни от 0 до T дава

$$\begin{aligned} \int_0^T x(t) e^{-jn\omega_0 t} dt &= \int_0^T \left[\sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{j(k-n)\omega_0 t} \right] dt \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left[a_k \int_0^T e^{j(k-n)\omega_0 t} dt \right] \end{aligned}$$

Съставката $\int_0^T e^{j(k-n)\omega_0 t} dt$ може да се оцени като (Трябва да проверите това!)

$$\frac{1}{T} \int_0^T e^{j(k-n)\omega_0 t} dt = \begin{cases} 1 & \text{ако } k = n \\ 0 & \text{в противен случай.} \end{cases} \quad (3.1)$$

Този резултат е известен като ортогоналност на комплексни експоненциали.

Използвайки уравнение (3.1), имаме

$$\int_0^T x(t) e^{-jn\omega_0 t} dt = T a_n,$$

което е еквивалентно на

$$a_n = \frac{1}{T} \int_0^T x(t) e^{-jn\omega_0 t} dt.$$

Пример 1. Синусоиди

Нека разгледаме сигнала $x(t) = 1 + \frac{1}{2} \cos 2\pi t + \sin 3\pi t$. Периодът на $x(t)$ е $T = 2$ [Защо?], Така че основната честота е $\omega_0 = \frac{2\pi}{T} = \pi$. Припомняйки си формулата на Ойлер $e^{j\theta} = \cos \theta + j \sin \theta$, ние имаме

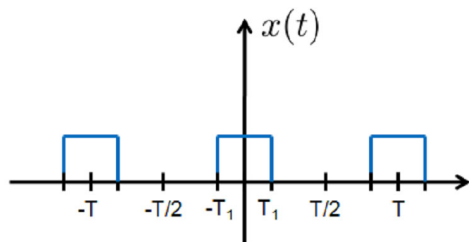
$$x(t) = 1 + \frac{1}{4} [e^{j2\pi t} + e^{-j2\pi t}] + \frac{1}{2j} [e^{j3\pi t} - e^{-j3\pi t}].$$

Ето защо, коефициентите на реда на Фурие са (просто "отчетете" от това уравнение!):

$$a_0 = 1, \quad a_1 = a_{-1} = 0, \quad a_2 = a_{-2} = \frac{1}{4}, \quad a_3 = \frac{1}{2j}, \quad a_{-3} = -\frac{1}{2j},$$

и $a_k = 0$ в останалите случаи.

Пример 2. Периодична правоъгълна вълна



Нека да определим коефициентите на реда на Фурие на следния сигнал

$$x(t) = \begin{cases} 1 & |t| < T_1, \\ 0 & T_1 < |t| < \frac{T}{2} \end{cases}$$

Коефициентите на реда на Фурие (РФ) са ($k \neq 0$):

$$a_k = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) e^{-jk\omega_0 t} dt = \frac{1}{T} \int_{-T_1}^{T_1} e^{-jk\omega_0 t} dt$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{-1}{jk\omega_0 T} \left[e^{-jk\omega_0 t} \right]_{-T_1}^{T_1} \\
&= \frac{2}{k\omega_0 T} \left[\frac{e^{jk\omega_0 T_1} - e^{-jk\omega_0 T_1}}{2j} \right] = \frac{2 \sin(k\omega_0 T_1)}{k\omega_0 T}.
\end{aligned}$$

Ако $k = 0$, то

$$a_0 = \frac{1}{T} \int_{-T_1}^{T_1} dt = \frac{2T_1}{T}.$$

Пример 3. Периодична импулсна последователност

Да разгледаме сигнала $x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - kT)$. Основният период на $x(t)$ е T [Защо?]. Коефициентите на РФ са

$$a_k = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \delta(t) dt = \frac{1}{T},$$

за всяко k .

3.2.2 Коефициенти на реда на Фурие при дискретно време

За да се построи представяне в ред на Фурие в дискретно време разглеждаме периодичен дискретен времеви сигнал с период N

$$x[n] = x[n + N],$$

и да приемем, че $x[n]$ е квадратично сумируема, т.е., $\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]|^2 < \infty$, или $x[n]$ удовлетворява условията на Дирихле. В този случай, ние имаме

Теорема 9. Коефициентите на реда на Фурие при ДВ a_k на сигнала

$$x[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk\Omega_0 n}$$

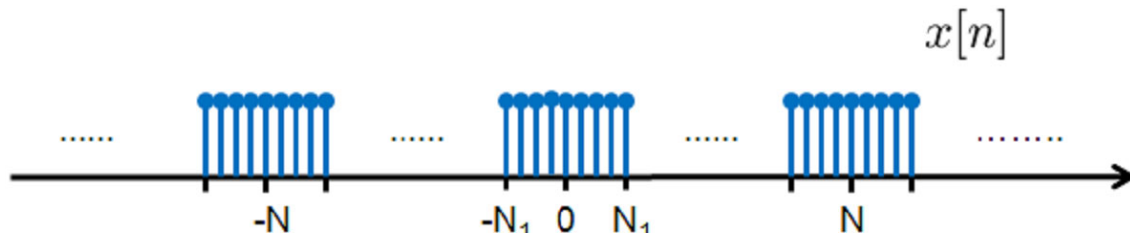
се дават от

$$a_k = \frac{1}{N} \sum_{n=\langle N \rangle} x[n] e^{-jk\Omega_0 n}$$

Тук, $\sum_{n=\langle N \rangle}$ означава сумиране на сигнала в рамките на период N . Тъй като периодичният сигнал в дискретно време се повтаря на всеки N отчета, то няма значение, кой отчет се взема пръв.

Пример.

Нека разгледаме следния сигнал, показан по-долу. Искаме да определим коефициентите на РФ при ДВ.



За $k \neq 0; \pm N; \pm 2N, \dots$, ние имаме

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{1}{N} \sum_{n=\langle N \rangle} e^{-jk\Omega_0 n} = \frac{1}{N} \sum_{n=-N_1}^{N_1} e^{-jk\Omega_0 n} \\ &= \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{2N_1} e^{-jk\Omega_0(m-N_1)}, \quad (m = n + N_0) \\ &= \frac{1}{N} e^{jk\Omega_0 N_1} \sum_{m=0}^{2N_1} e^{-jk\Omega_0 m}. \end{aligned}$$

Докато

$$\sum_{m=0}^{2N_1} e^{-jk\Omega_0 m} = \frac{1 - e^{-jk\Omega_0(2N_1+1)}}{1 - e^{-jk\Omega_0}}$$

следва, че

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{1}{N} e^{jk\Omega_0 N_1} \left(\frac{1 - e^{-jk\Omega_0(2N_1+1)}}{1 - e^{-jk\Omega_0}} \right), \quad (\Omega_0 = 2\pi/N) \\ &= \frac{1}{N} \frac{e^{-jk(2\pi/2N)} [e^{jk2\pi(N_1+1/2)/N} - e^{-jk2\pi(N_1+1/2)/N}]}{e^{-jk(2\pi/2N)} [e^{jk(2\pi/2N)} - e^{-jk(2\pi/2N)}]} \\ &= \frac{1}{N} \frac{\sin[2\pi k(N_1 + 1/2)/N]}{\sin(\frac{\pi k}{N})}. \end{aligned}$$

За $k = 0; \pm N; \pm 2N, \dots$, ние имаме

$$a_k = \frac{2N_1 + 1}{N}.$$

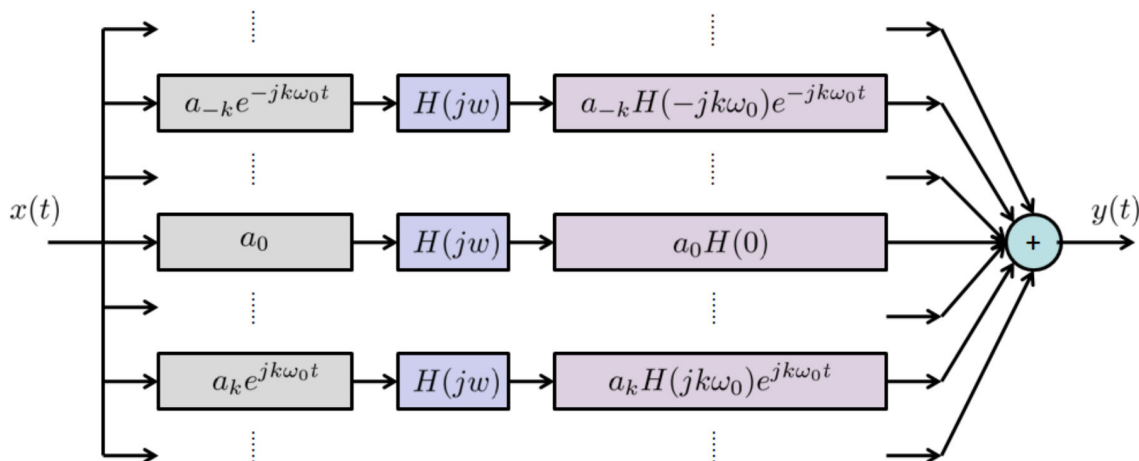
3.2.3 Как използваме представянето в редове на Фурие?

представяне в редове на Фурие казва, че всички периодични квадратично интегрируеми сигнали (или сигнали, които отговарят на условията на Дирихле) могат да бъдат изразени като линейна комбинация от комплексни експоненциали. Тъй като комплексните експоненциали са

собствени функции за ЛИВ системите, изходният сигнал трябва също да бъде линейна комбинация от комплексни експоненциали.

Това означава, че всеки периодичен сигнал $x(t)$, от разглеждания клас, може да бъде представен като

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk\omega_0 t}$$



Тогава изходният сигнал се дава от

$$y(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k H(jk\omega_0) e^{jk\omega_0 t}$$

Замествайки $b_k = a_k H(jk\omega_0)$, ние получаваме

$$y(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} b_k e^{jk\omega_0 t}$$

3.2.4 Колко коефициента в редовете на Фурие са достатъчни?

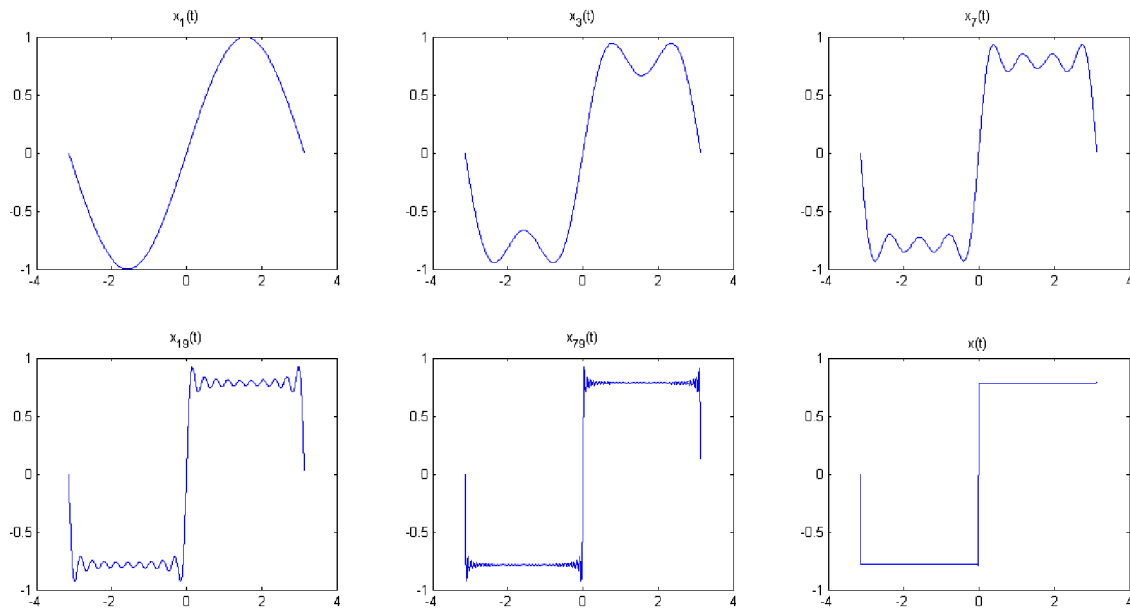
Ако дефинираме

$$x_N(t) = \sum_{k=-N}^N a_k e^{jk\omega_0 t},$$

тогава $x_N(t)$ е апроксимация на $x(t)$. Когато $N \rightarrow \infty$, виждаме, че $x_N(t) \rightarrow x(t)$. Като илюстрация на $x_N(t)$, когато N нараства, можем да видим следната фигура. Затова броят на коефициентите в редовете на Фурие зависи от точността, която искаме да постигнем. Обикновено, числото N се избира така, че грешката от апроксимацията

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t) - x_N(t)|^2 dt \leq \varepsilon,$$

за някакво зададено ниво на грешката ε .



3.3. Свойства на коефициентите на реда на Фурие

Има редица свойства на редовете на Фурие, които ви препоръчваме да прочетете в учебника (Опенхайм). По-долу е дадено само кратко резюме на тези свойства.

1. **Линейност:** ако $x_1(t) \longleftrightarrow a_k$ и $x_2(t) \longleftrightarrow b_k$ са сигнали в НВ, то

$$Ax_1(t) + Bx_2(t) \longleftrightarrow Aa_k + Bb_k.$$

За случая с ДВ имаме, ако $x_1[n] \longleftrightarrow a_k$ и $x_2[n] \longleftrightarrow b_k$, то

$$Ax_1[n] + Bx_2[n] \longleftrightarrow Aa_k + Bb_k.$$

2. **Отместване във времето:**

$$x(t - t_0) \longleftrightarrow a_k e^{-jk\omega_0 t_0}$$

$$x[n - n_0] \longleftrightarrow a_k e^{-jk\Omega_0 n_0}$$

За да се демонстрираме свойството отместване във времето, нека разгледаме коефициента b_k на РФ за сигнала $y(t) = x(t - t_0)$.

$$b_k = \frac{1}{T} \int_T x(t - t_0) e^{-j\omega_0 t} dt.$$

Замествайки в интеграла $\tau = t - t_0$, получаваме

$$\frac{1}{T} \int_T x(\tau) e^{-jk\omega_0(\tau+t_0)} d\tau = e^{-jk\omega_0 t_0} \frac{1}{T} \int_T x(\tau) e^{-jk\omega_0 \tau} d\tau$$

където $x(t) \leftrightarrow a_k$. Следователно,

$$x(t - t_0) \longleftrightarrow a_k e^{-jk\omega_0 t_0}.$$

3. Обръщане във времето:

$$x(-t) \longleftrightarrow a_{-k}$$

$$x[-n] \longleftrightarrow a_{-k}$$

Доказателство за това е просто. Да разгледаме сигнала $y(t) = x(-t)$. Представянето в РФ на $x(-t)$ е

$$x(-t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{-jk2\pi t/T}.$$

Замествайки $k = -m$, получаваме

$$y(t) = x(-t) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} a_{-m} e^{jm2\pi t/T}.$$

По този начин $x(-t) \longleftrightarrow a_{-k}$.

4. Комплексно спрягане:

$$x^*(t) \longleftrightarrow a_{-k}^*$$

$$x^*[n] \longleftrightarrow a_{-k}^*$$

5. Умножение: Ако $x(t) \leftrightarrow a_k$ и $y(t) \leftrightarrow b_k$, то

$$x(t)y(t) \longleftrightarrow \sum_{l=-\infty}^{\infty} a_k b_{k-l}.$$

6. Уравнение на Парсевал:

$$\frac{1}{T} \int_T |x(t)|^2 dt = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |a_k|^2$$

$$\frac{1}{N} \sum_{n=\langle N \rangle} |x[n]|^2 = \sum_{k=\langle N \rangle} |a_k|^2$$

Погледнете Таблици 3.1 и 3.2.

TABLE 3.1 PROPERTIES OF CONTINUOUS-TIME FOURIER SERIES

Property	Section	Periodic Signal	Fourier Series Coefficients
		$\left. \begin{array}{l} x(t) \\ y(t) \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{Periodic with period } T \text{ and} \\ \text{fundamental frequency } \omega_0 = 2\pi/T \end{array}$	$\begin{array}{l} a_k \\ b_k \end{array}$
Linearity	3.5.1	$Ax(t) + By(t)$	$Aa_k + Bb_k$
Time Shifting	3.5.2	$x(t - t_0)$	$a_k e^{-jk\omega_0 t_0} = a_k e^{-jk(2\pi/T)t_0}$
Frequency Shifting		$e^{jM\omega_0 t} x(t) = e^{jM(2\pi/T)t} x(t)$	a_{k-M}
Conjugation	3.5.6	$x^*(t)$	a_k^*
Time Reversal	3.5.3	$x(-t)$	a_{-k}
Time Scaling	3.5.4	$x(\alpha t), \alpha > 0$ (periodic with period T/α)	a_k
Periodic Convolution		$\int_T x(\tau)y(t-\tau)d\tau$	$Ta_k b_k$
Multiplication	3.5.5	$x(t)y(t)$	$\sum_{l=-\infty}^{\infty} a_l b_{k-l}$
Differentiation		$\frac{dx(t)}{dt}$	$jk\omega_0 a_k = jk \frac{2\pi}{T} a_k$
Integration		$\int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau$ (finite valued and periodic only if $a_0 = 0$)	$\left(\frac{1}{jk\omega_0}\right)a_k = \left(\frac{1}{jk(2\pi/T)}\right)a_k$
Conjugate Symmetry for Real Signals	3.5.6	$x(t)$ real	$\begin{cases} a_k = a_{-k}^* \\ \operatorname{Re}\{a_k\} = \operatorname{Re}\{a_{-k}\} \\ \operatorname{Im}\{a_k\} = -\operatorname{Im}\{a_{-k}\} \\ a_k = a_{-k} \\ \angle a_k = -\angle a_{-k} \end{cases}$
Real and Even Signals	3.5.6	$x(t)$ real and even	a_k real and even
Real and Odd Signals	3.5.6	$x(t)$ real and odd	a_k purely imaginary and odd
Even-Odd Decomposition of Real Signals		$\begin{cases} x_e(t) = \operatorname{Ev}\{x(t)\} & [x(t) \text{ real}] \\ x_o(t) = \operatorname{Od}\{x(t)\} & [x(t) \text{ real}] \end{cases}$	$\begin{array}{l} \operatorname{Re}\{a_k\} \\ j\operatorname{Im}\{a_k\} \end{array}$
Parseval's Relation for Periodic Signals			
$\frac{1}{T} \int_T x(t) ^2 dt = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k ^2$			

TABLE 3.2 PROPERTIES OF DISCRETE-TIME FOURIER SERIES

Property	Periodic Signal	Fourier Series Coefficients
	$\begin{cases} x[n] \\ y[n] \end{cases}$ Periodic with period N and fundamental frequency $\omega_0 = 2\pi/N$	$\begin{cases} a_k \\ b_k \end{cases}$ Periodic with period N
Linearity	$Ax[n] + By[n]$	$Aa_k + Bb_k$
Time Shifting	$x[n - n_0]$	$a_k e^{-jk(2\pi/N)n_0}$
Frequency Shifting	$e^{jM(2\pi/N)n} x[n]$	a_{k-M}
Conjugation	$x^*[n]$	a_{-k}^*
Time Reversal	$x[-n]$	a_{-k}
Time Scaling	$x_m[n] = \begin{cases} x[n/m], & \text{if } n \text{ is a multiple of } m \\ 0, & \text{if } n \text{ is not a multiple of } m \end{cases}$ (periodic with period mN)	$\frac{1}{m} a_k$ (viewed as periodic) (with period mN)
Periodic Convolution	$\sum_{r=-\infty}^{\infty} x[r]y[n-r]$	$Na_k b_k$
Multiplication	$x[n]y[n]$	$\sum_{l=-\infty}^{\infty} a_l b_{k-l}$
First Difference	$x[n] - x[n-1]$	$(1 - e^{-jk(2\pi/N)})a_k$
Running Sum	$\sum_{k=-\infty}^n x[k]$ (finite valued and periodic only) (if $a_0 = 0$)	$\left(\frac{1}{(1 - e^{-jk(2\pi/N)})} \right) a_k$
Conjugate Symmetry for Real Signals	$x[n]$ real	$\begin{cases} a_k = a_{-k}^* \\ \operatorname{Re}\{a_k\} = \operatorname{Re}\{a_{-k}\} \\ \operatorname{Im}\{a_k\} = -\operatorname{Im}\{a_{-k}\} \\ a_k = a_{-k} \\ \angle a_k = -\angle a_{-k} \end{cases}$
Real and Even Signals	$x[n]$ real and even	a_k real and even
Real and Odd Signals	$x[n]$ real and odd	a_k purely imaginary and odd
Even-Odd Decomposition of Real Signals	$\begin{cases} x_e[n] = \operatorname{Ev}\{x[n]\} & [x[n] \text{ real}] \\ x_o[n] = \operatorname{Od}\{x[n]\} & [x[n] \text{ real}] \end{cases}$	$\begin{cases} \operatorname{Re}\{a_k\} \\ j\operatorname{Im}\{a_k\} \end{cases}$

Глава 4

Непрекъснатото преобразуване на Фурие

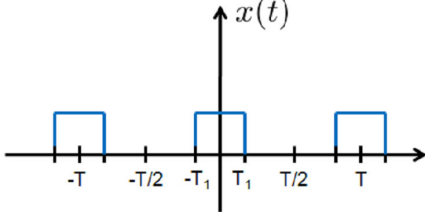
Нека започнем нашата дискусия, като разгледаме някои ограничения на представянето в ред на Фурие. При анализа с редове на Фурие, е необходимо сигналите да удовлетворяват две условия:

1. Сигналът трябва да бъде **периодичен**, т.е., да съществува $T > 0$, така че $x(t + T) = x(t)$.
2. Сигналът трябва да отговаря на **квадратичното интегрално условие**, $\int_T |x(t)|^2 dt < \infty$, или на условията на Дирихле

В тази глава, ние искаме да разширим идеята за представяне в ред на Фурие и на непериодични сигнали. Това налага да се разшири първото условие до непериодични сигнали.

4.1. Какво ни дават редовете на Фурие?

Нека разгледаме следния **периодичен сигнал**

$$x(t) = \begin{cases} 1 & |t| \leq T_1, \\ 0 & T_1 \leq |t| < \frac{T}{2} \end{cases}$$


където $x(t) = x(t + T)$. Коефициентите на РФ за $x(t)$ са (виж §3.2.1, Пример 2)

$$x(t) \xrightarrow{F.S.} a_k = \frac{2 \sin(k\omega_0 T_1)}{k\omega_0 T}.$$

Ако заместим $\omega = k\omega_0$, тогава

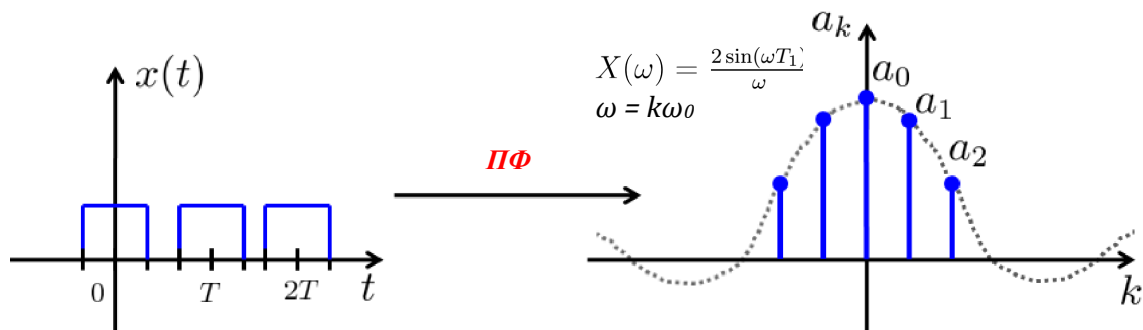
$$a_k = \left. \frac{2 \sin(\omega T_1)}{\omega T} \right|_{\omega=k\omega_0}$$

Умножаването на двете страни с T води до

$$T a_k = \frac{2 \sin(\omega T_1)}{\omega}, \quad (4.1)$$

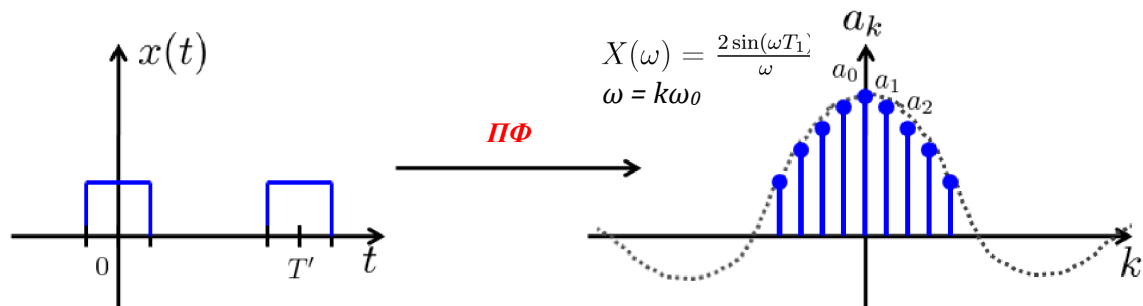
които са нормализираните коефициенти на РФ.

Визуално, уравнение (4.1) показва, че нормализираните коефициенти на РФ $T a_k$ са ограничени в рамката на $X(\omega) = \frac{2 \sin(\omega T_1)}{\omega}$, както е показано на фиг. 4.1.



Фигура 4.1 Коефициенти на ред на Фурие $x(t)$ за дадено T

Когато T нараства, разстоянието между последователните a_k намалява. Въпреки това, формата на рамковата функция $X(\omega) = \frac{2 \sin(\omega T_1)}{\omega}$ се запазва. Това може да се види на фиг. 4.2.



Фигура 4.2 Коефициенти на ред на Фурие $x(t)$ за T' където $T' > T$

В граничния случай, когато $T \rightarrow \infty$, коефициентите на РФ Ta_k се доближават до рамковата функция $X(\omega)$. Това ни подсказва, че ако имаме апериодичен сигнал, ние можем да го разглеждаме като периодичен сигнал с $T \rightarrow \infty$. Тогава съответните коефициенти на реда на Фурие се доближават до рамковата функция $X(\omega)$. Рамковата функция се нарича преобразуване на Фурие на сигнала $x(t)$. Сега, нека да изучим преобразуването на Фурие по-формално.

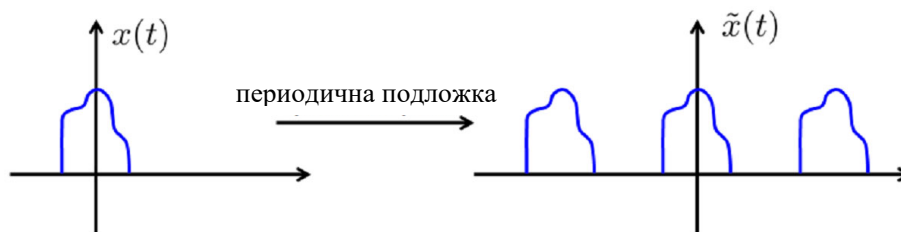
4.2. Преобразуване на Фурие

Извличането на преобразуване на Фурие включва три стъпки.

Стъпка 1.

Предполагаме, че апериодичният сигнал $x(t)$ има ограничена продължителност т.е. $x(t) = 0$ за $|t| > T/2$, за дадено T . Тъй като $x(t)$ е апериодична, ние първо изграждаме периодичен сигнал $\tilde{x}(t) = x(t)$.

За $-T/2 < t < T/2$, и $\tilde{x}(t + T) = \tilde{x}(t)$. Визуално ние получаваме



Стъпка 2.

Тъй като $\tilde{x}(t)$ е периодична, ние можем да разложим $\tilde{x}(t)$ в на ред на Фурие:

$$\tilde{x}(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk\omega_0 t}, \quad (4.2)$$

където

$$a_k = \frac{1}{T} \int_T \tilde{x}(t) e^{-jk\omega_0 t} dt.$$

Коефициентите на реда на Фурие a_k може допълнително да бъдат изчислени като

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \tilde{x}(t) e^{-jk\omega_0 t} dt \\ &= \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t) e^{-jk\omega_0 t} dt, \quad \tilde{x}(t) = x(t), \text{ за } -T/2 < t < T/2 \\ &= \frac{1}{T} \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-jk\omega_0 t} dt, \quad x(t) = 0, \text{ за } |t| > T/2. \end{aligned}$$

Ако дефинираме

$$X(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt, \quad (4.3)$$

тогава

$$a_k = \frac{1}{T} X(jk\omega_0). \quad (4.4)$$

Последователното заместване на (4.4) в (4.2) води до ($1/T = \omega_0/2\pi$)

$$\tilde{x}(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{T} X(jk\omega_0) e^{jk\omega_0 t} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi} X(jk\omega_0) e^{jk\omega_0 t} \omega_0, \quad (4.5)$$

Стъпка 3.

Сега, вземаме предвид, че $\tilde{x}(t)$ е периодична подложка на $x(t)$. Щом периодът $T \rightarrow \infty$, то периодичният сигнал $\tilde{x}(t)$ се доближава до $x(t)$. Следователно,

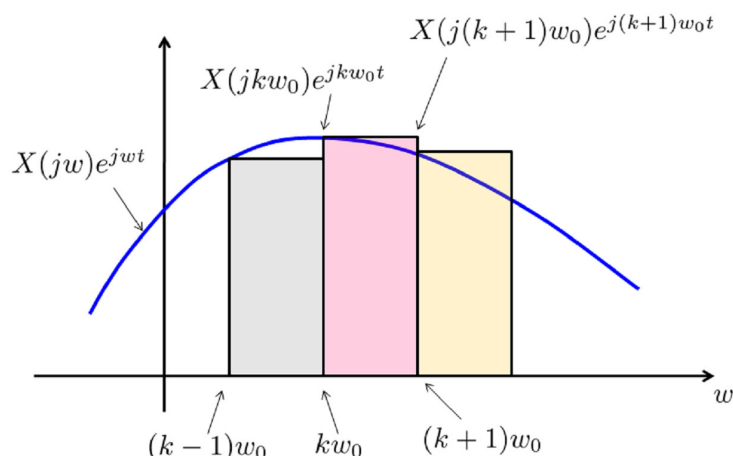
$$\tilde{x}(t) \rightarrow x(t), \quad (4.6)$$

щом $T \rightarrow \infty$.

Освен това, когато $T \rightarrow \infty$, или еквивалентно $\omega_0 \rightarrow 0$, а границата на сумата в (4.5) става интеграл:

$$\lim_{\omega_0 \rightarrow 0} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi} X(jk\omega_0) e^{jk\omega_0 t} \omega_0 = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi} X(j\omega) e^{j\omega t} d\omega. \quad (4.7)$$

Графично, това може да се види на фиг. 4.3.



Фигура 4.3 Илюстрация на уравнение (4.7)

Комбинирайки (4.7) и (4.6), имаме

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega) e^{j\omega t} d\omega \quad (4.8)$$

Двете уравнения (4.3) и (4.8) са известни като уравнения на Преобразуването на Фурие (ПФ). Уравнението (4.3) се нарича уравнение на анализа (защото ние анализираме времевия сигнал в пространството на Фурие – честотната област), а (4.8) се нарича уравнение на синтеза (защото ние събираме информацията от пространството на Фурие и реконструираме времевия сигнал). Обобщавайки ние имаме

Теорема 10. Преобразуването на Фурие $X(j\omega)$ на сигнала $x(t)$ се дава от

$$X(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt,$$

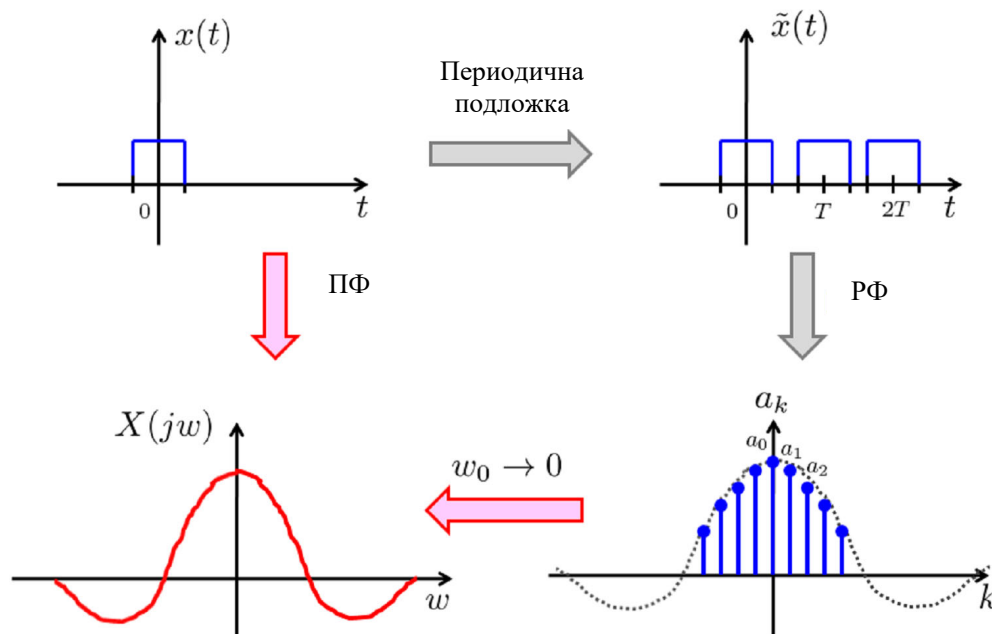
а обратното преобразуване на Фурие от

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega) e^{j\omega t} d\omega.$$

4.3. Връзка на преобразуването на Фурие с редовете на Фурие

На този етап може да се учудите: Каква е разликата между редовете на Фурие и Преобразуването на Фурие? За да отговорим на този въпрос, нека приложим преобразуването на Фурие към следните два вида сигнали.

1. Апериодичен сигнал: Както казахме при извличането на Преобразуване на Фурие, Преобразуването на Фурие на апериодичен сигнал е граничен случай (когато $\omega_0 \rightarrow 0$) на прилагане на анализа с редове на Фурие върху периодичната подложка на апериодичния сигнал. Преобразуването на Фурие може да се прилага както към периодични, така и към апериодични сигнали, докато анализите с РФ могат да се прилагат само към периодични сигнали. Виж Фиг. 4.4.



Фигура 4.4 Преобразуването на Фурие на апериодични сигнали е еквивалентно на прилагане на анализ с редове на Фурие на периодична подложка на сигнала, и задаване на граница за $\omega_0 \rightarrow 0$.

2. Периодичен сигнал: Ако сигнал $x(t)$ е периодичен, тогава не е нужно да се изгражда $\tilde{x}(t)$ и да се установява $\omega_0 \rightarrow 0$. В действителност, ω_0 се определя от периода на сигнала: Ако периодът на $x(t)$ е T_0 , то $\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0}$. Сега, тъй като $x(t)$ е периодичен, можем да приложим анализа с редове на Фурие на $x(t)$ и да получим

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk\omega_0 t}, \quad (4.9)$$

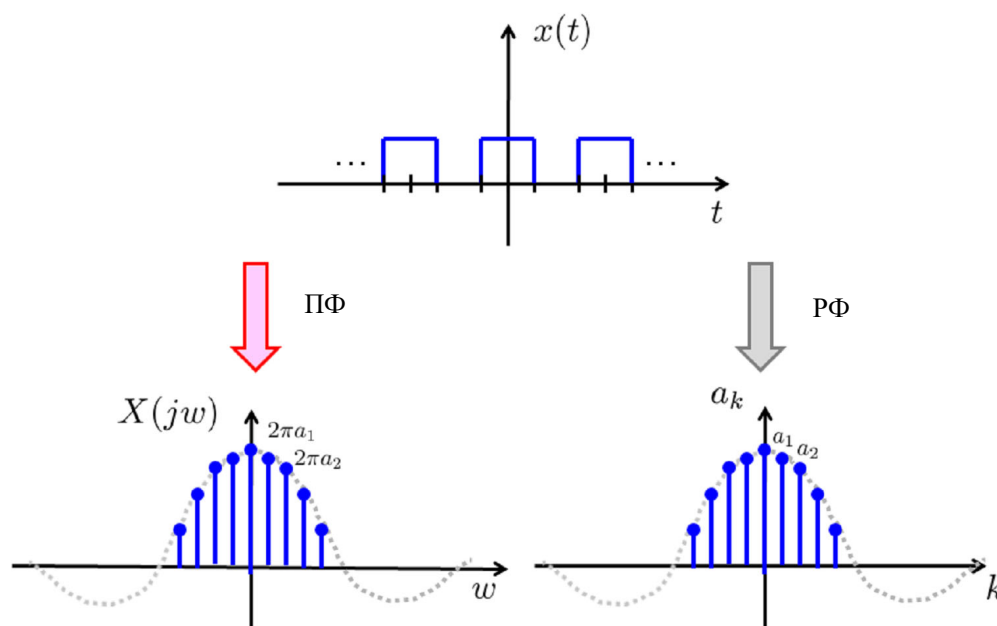
където a_k са коефициентите на РФ. Ако допълнително към (4.9) приложим преобразуване на Фурие, ще имаме

$$\begin{aligned} X(j\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} \left[\sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk\omega_0 t} \right] e^{-j\omega t} dt \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k \left[\int_{-\infty}^{\infty} e^{jk\omega_0 t} e^{-j\omega t} dt \right] \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k 2\pi \delta(\omega - k\omega_0). \end{aligned}$$

Тук, последното равенство се определя от факта, че обратното преобразуване на Фурие на $2\pi\delta(\omega - k\omega_0)$ е $e^{jk\omega_0 t}$. За да покажем това нека видим:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}^{-1}\{2\pi\delta(\omega - k\omega_0)\} &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} 2\pi\delta(\omega - k\omega_0) e^{j\omega t} d\omega \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \delta(\omega - k\omega_0) e^{j\omega t} d\omega = e^{jk\omega_0 t}. \end{aligned}$$

Така, ние показахме, че преобразуването на Фурие на периодичен сигнал е последователност от импулси с амплитуда, определена от коефициентите на РФ (и мащабирана с коефициент 2π).



Фигура 4.5 Преобразуване на Фурие и анализ с РФ на периодичен сигнал:

И в двата случая се получава една и съща последователност от импулси. За преобразуването на Фурие, амплитудата се умножава с коефициент 2π . За коефициентите на РФ, разстоянието между всеки два коефициента е ω_0

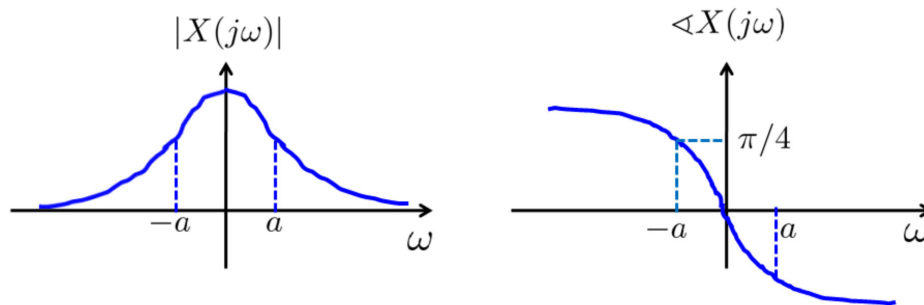
4.4. Примери

Пример 1. Да разгледаме сигнала $x(t) = e^{-at} u(t)$, за $a > 0$. Да се определи преобразуванието на Фурие $X(j\omega)$, неговият модул $|X(j\omega)|$ и фаза $\angle X(j\omega)$.

$$\begin{aligned} X(j\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\omega t} u(t) dt \\ &= \int_0^{\infty} e^{-at} e^{-j\omega t} dt, \quad u(t) = 0, \text{ когато } t < 0 \\ &= \frac{-1}{a + j\omega} [e^{-(a+j\omega)t}]_0^{\infty} \\ &= \frac{1}{a + j\omega}. \end{aligned}$$

Модулът и фазата могат да се изчислят като

$$|X(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{a^2 + \omega^2}} \quad \angle X(j\omega) = -\tan^{-1} \left(\frac{\omega}{a} \right).$$



Пример 2. Да разгледаме сигнала $x(t) = \delta(t)$. Преобразуванието на Фурие е

$$\begin{aligned} X(j\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) e^{-j\omega t} dt = 1. \end{aligned}$$

Пример 3. Да разгледаме сигнала $x(t) = e^{j\omega_0 t}$. Нека покажем, че $X(j\omega) = 2\pi\delta(\omega - \omega_0)$. Затова да вземем обратното преобразувание на Фурие

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega) e^{j\omega t} d\omega \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \delta(\omega - \omega_0) e^{j\omega t} d\omega \\ &= e^{j\omega_0 t} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(\omega - \omega_0) d\omega = e^{j\omega_0 t} \end{aligned}$$

Пример 4. Да разгледаме аperiодичния сигнал

$$x(t) = \begin{cases} 1 & |t| \leq T_1 \\ 0 & |t| > T_1 \end{cases}$$

Преобразуването на Фурие е

$$\begin{aligned} X(j\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\omega t} dt \\ &= \int_{-T_1}^{T_1} e^{-j\omega t} dt = \frac{-1}{j\omega} [e^{-j\omega t}]_{-T_1}^{T_1} = 2 \frac{\sin \omega T_1}{\omega}. \end{aligned}$$

Пример 5. Нека определим непрекъснатото преобразуване на Фурие (НПФ) на единичната стъпаловидна функция $u(t)$. За целта да приложим НПФ

$$U(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} u(t)e^{-j\omega t} dt = \int_0^{\infty} e^{-j\omega t} dt = - \left[\frac{1}{j\omega} e^{-j\omega t} \right]_0^{\infty}$$

Това означава, че трябва да се направи оценка на функцията $\frac{1}{j\omega} e^{-j\omega t}$ при $t = 0$ и $t = \infty$. Обаче, оценката при $t = \infty$ е неопределена. Ето защо, ние изразяваме $u(t)$ като граница на затихващи експоненциали.

$$u(t) = \lim_{a \rightarrow 0} e^{-at} u(t)$$

Сега прилагаме НПФ към двете страни,

$$\begin{aligned} U(j\omega) &= \lim_{a \rightarrow 0} \mathcal{F} \{ e^{-at} u(t) \} = \lim_{a \rightarrow 0} \frac{1}{a + j\omega} \\ &= \lim_{a \rightarrow 0} \frac{a - j\omega}{a^2 + \omega^2} \\ &= \lim_{a \rightarrow 0} \left(\frac{a}{a^2 + \omega^2} - j \frac{\omega}{a^2 + \omega^2} \right). \end{aligned}$$

Тук, вторият член е

$$\lim_{a \rightarrow 0} -j \frac{\omega}{a^2 + \omega^2} = \frac{1}{j\omega}$$

Първият член удовлетворява

$$\lim_{a \rightarrow 0} \frac{a}{a^2 + \omega^2} = 0, \quad \text{за } \omega \neq 0.$$

и

$$\lim_{a \rightarrow 0} \frac{a}{a^2 + \omega^2} = \lim_{a \rightarrow 0} \frac{1}{a} = \infty$$

докато

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{a}{a^2 + \omega^2} d\omega = \tan^{-1} \frac{\omega}{a} \Big|_{-\infty}^{\infty} = \pi, \quad \forall a \in \mathbb{R}.$$

Следователно,

$$\lim_{a \rightarrow 0} \frac{a}{a^2 + \omega^2} = \pi \delta(\omega)$$

и така

$$U(j\omega) = \frac{1}{j\omega} + \pi \delta(\omega)$$

4.5. Свойства на преобразуването на Фурие

Свойствата на преобразуването на Фурие са много подобни на тези на редовете на Фурие.

1. **Линейност** Ако $x_1(t) \longleftrightarrow X_1(j\omega)$ и $x_2(t) \longleftrightarrow X_2(j\omega)$,
 $ax_1(t) + bx_2(t) \longleftrightarrow aX_1(j\omega) + bX_2(j\omega)$.

2. **Отместване във времето**

$$x(t - t_0) \longleftrightarrow e^{-j\omega t_0} X(j\omega)$$

Физическа интерпретация на $e^{-j\omega t_0}$:

$$\begin{aligned} e^{-j\omega t_0} X(j\omega) &= |X(j\omega)| e^{j\angle X(j\omega)} e^{-j\omega t_0} \\ &= |X(j\omega)| e^{j[\angle X(j\omega) - \omega t_0]}. \end{aligned}$$

Така $e^{-j\omega t_0}$ участва като фазово отместване в $X(j\omega)$.

3. **Комплексно спрягане**

$$x^*(t) \longleftrightarrow X^*(-j\omega)$$

Ако $x(t)$ е реално, то $x^*(t) = x(t)$, тогава $X(j\omega) = X^*(-j\omega)$.

4. **Диференциране и интегриране**

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} x(t) &\longleftrightarrow j\omega X(j\omega) \\ \int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau &\longleftrightarrow \frac{1}{j\omega} X(j\omega) + \pi X(0) \delta(\omega) \end{aligned}$$

5. **Мащабиране във времето**

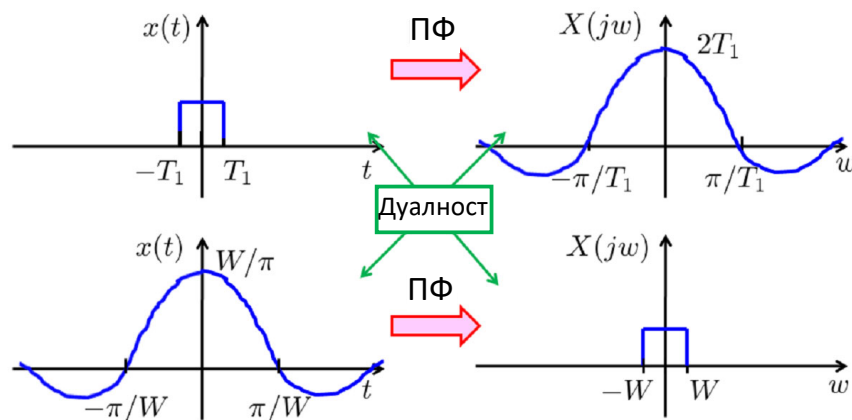
$$x(at) \longleftrightarrow \frac{1}{|a|} X\left(\frac{j\omega}{a}\right)$$

6. **Уравнение на Парсевал**

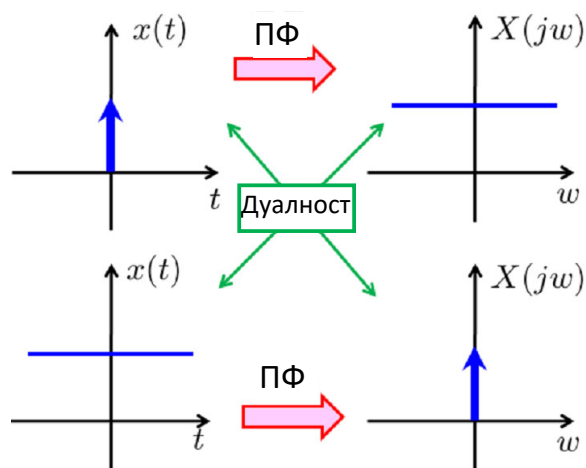
$$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |X(j\omega)|^2 d\omega$$

7. Дуалност

Важно да се запомни тук е, че ако $x(t) \leftrightarrow X(j\omega)$, то ако друг сигнал $y(t)$ има формата на $X(j\omega)$ ние бързо можем да заключим, че $y(t)$ има формата на $x(t)$. Да разгледаме два примера:



Пример 1. Дуалност



Пример 2. Дуалност

8. Свойство на конволюцията

$$h(t) * x(t) \longleftrightarrow H(j\omega)X(j\omega)$$

Доказателство: Нека разгледаме интеграла на конволюцията

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t - \tau)d\tau$$

Прилагаме ПФ към двете страни на уравнението

$$\begin{aligned}
Y(j\omega) &= \mathcal{F} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) h(t - \tau) d\tau \right\} \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) h(t - \tau) d\tau \right] e^{-j\omega t} dt \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) \left[\int_{-\infty}^{\infty} h(t - \tau) e^{-j\omega t} dt \right] d\tau \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) [e^{-j\omega\tau} H(j\omega)] d\tau \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau H(j\omega) \\
&= X(j\omega) H(j\omega)
\end{aligned}$$

1. **Свойство на произведението** (можете да получите това сами)

$$x(t)y(t) \longleftrightarrow \frac{1}{2\pi} X(j\omega) * Y(j\omega)$$

Пример

Да разгледаме сигнала $x(t) = m(t) \cos(\omega_0 t)$, където $m(t)$ е честотно ограничен сигнал. Да предположим, че ПФ на $m(t)$ е $X(j\omega)$. Тогава

$$\cos(\omega_0 t) = \frac{e^{j\omega_0 t} + e^{-j\omega_0 t}}{2} \longleftrightarrow \pi[\delta(\omega - \omega_0) + \delta(\omega + \omega_0)],$$

Вследствие на свойството на конволюцията НПФ на $x(t)$ е

$$\begin{aligned}
m(t) \cos(\omega_0 t) &\longleftrightarrow \frac{1}{2\pi} M(j\omega) * \pi[\delta(\omega - \omega_0) + \delta(\omega + \omega_0)] \\
&= \frac{1}{2} [M(j(\omega - \omega_0)) + M(j(\omega + \omega_0))].
\end{aligned}$$

4.6. Анализ на системи с използването преобразуванието на Фурие

Система от първи ред

Нека разгледаме системата на първи ред

$$\frac{dy(t)}{dt} + ay(t) = x(t), \quad (4.10)$$

за $a > 0$. Като приложим НПФ към двете страни,

$$\mathcal{F} \left\{ \frac{dy(t)}{dt} + ay(t) \right\} = \mathcal{F} \{x(t)\},$$

И като използваме свойствата на НПФ линейност и диференциране ние имаме

$$j\omega Y(j\omega) + aY(j\omega) = X(j\omega).$$

Прегрупирайки членовете ние можем да намерим честотната реакция на системата

$$H(j\omega) = \frac{Y(j\omega)}{X(j\omega)} = \frac{1}{a + j\omega}.$$

Сега, като си припомним двойката (оригинал – образ) НПФ:

$$h(t) = e^{-at}u(t) \iff H(j\omega) = \frac{1}{a + j\omega}, \quad (4.11)$$

може да се извлече $h(t)$. Точно както при бързото извеждане на това уравнение, ние можем да отбележим, че

$$\begin{aligned} H(j\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-at}u(t)e^{-j\omega t}dt = \int_0^{\infty} e^{-(j\omega+a)t}dt \\ &= -\left[\frac{1}{j\omega + a}e^{-(j\omega+a)t}\right]_0^{\infty} = \frac{1}{j\omega + a}. \end{aligned}$$

Система в общ вид

В общия случай, ние искаме да се изследва системата

$$\sum_{k=0}^N a_k \frac{d^k y(t)}{dt^k} = \sum_{k=0}^M b_k \frac{d^k x(t)}{dt^k}. \quad (4.12)$$

Целта ни е да определим $h(t)$ и $H(j\omega)$. Прилагаме НПФ към двете страни:

$$\mathcal{F}\left\{\sum_{k=0}^N a_k \frac{d^k y(t)}{dt^k}\right\} = \mathcal{F}\left\{\sum_{k=0}^M b_k \frac{d^k x(t)}{dt^k}\right\}.$$

Ето защо, от свойствата на НПФ линейност и диференциране ние имаме

$$\sum_{k=0}^N a_k (j\omega)^k Y(j\omega) = \sum_{k=0}^M b_k (j\omega)^k X(j\omega).$$

Свойството конволюция ни дава $Y(j\omega) = X(j\omega)H(j\omega)$, така че

$$H(j\omega) = \frac{Y(j\omega)}{X(j\omega)} = \frac{\sum_{k=0}^M b_k (j\omega)^k}{\sum_{k=0}^N a_k (j\omega)^k}. \quad (4.13)$$

Така, $H(j\omega)$ се изразява като рационална функция, т.е. съотношение на полиноми. Затова може да се приложи техниката на разлагане в частни дроби за да изразим $H(j\omega)$ във форма, която ни позволява да определим $h(t)$ от справката за двойката НПФ

$$h(t) = e^{-at}u(t) \iff H(j\omega) = \frac{1}{a + j\omega},$$

както и свързаната чрез НПФ двойка

$$te^{-at}u(t) \Longleftrightarrow \frac{1}{(a + j\omega)^2}.$$

Пример 1. Нека разгледаме ЛИВ системата, определена чрез диференциалното уравнение

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2} + 4\dot{y}(t) + 3y(t) = \frac{dx(t)}{dt} + 2x(t).$$

Прилагането на НПФ към двете страни води до

$$(j\omega)^2Y(j\omega) + 4j\omega Y(j\omega) + 3Y(j\omega) = j\omega X(j\omega) + 2X(j\omega)$$

и като регрупираме членовете имаме

$$H(j\omega) = \frac{j\omega + 2}{(j\omega)^2 + 4(j\omega) + 3} = \frac{j\omega + 2}{(j\omega + 1)(j\omega + 3)}.$$

Разлагайки на частни дробι получаваме

$$H(j\omega) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{j\omega + 1} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{j\omega + 3} \right).$$

По този начин $h(t)$ е

$$h(t) = \frac{1}{2}e^{-t}u(t) + \frac{1}{2}e^{-3t}u(t).$$

Пример 2. Нека входният сигнал е $x(t) = e^{-t}u(t)$, тогава какъв трябва да бъде изходния сигнал $y(t)$, ако импулсната реакция на системата е $h(t) = \frac{1}{2}e^{-t}u(t) + \frac{1}{2}e^{-3t}u(t)$?

Вземаме НПФ на $x(t)$ и имаме $X(j\omega) = \frac{1}{j\omega + 1}$, отделно $H(j\omega) = \frac{j\omega + 2}{(j\omega + 1)(j\omega + 3)}$. Следователно НПФ на изходния сигнал е

$$Y(j\omega) = H(j\omega)X(j\omega) = \left[\frac{j\omega + 2}{(j\omega + 1)(j\omega + 3)} \right] \left[\frac{1}{j\omega + 1} \right] = \frac{j\omega + 2}{(j\omega + 1)^2(j\omega + 3)}.$$

Разлагайки на частни дробι получаваме

$$Y(j\omega) = \frac{\frac{1}{4}}{j\omega + 1} + \frac{\frac{1}{2}}{(j\omega + 1)^2} - \frac{\frac{1}{4}}{j\omega + 3}.$$

Следователно изходът е

$$y(t) = \left[\frac{1}{4}e^{-t} + \frac{1}{2}te^{-t} - \frac{1}{4}e^{-3t} \right] u(t).$$

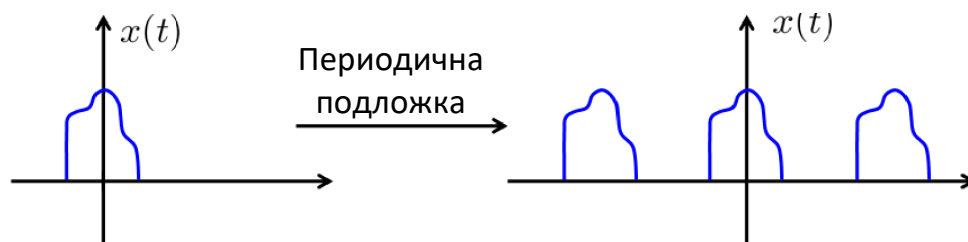
Глава 5

Дискретно преобразуване на Фурие

5.1. Преглед на непрекъснатото преобразуване на Фурие

Преди да разгледаме дискретното преобразуване на Фурие, нека си припомним начина, по който се изгражда непрекъснатото преобразуване на Фурие на базата на непрекъснатия във времето ред на Фурие. При извеждането на НПФ, ние имаме следните три основни стъпки:

Стъпка 1: Създаване на подложка на аperiодичия сигнал¹ $x(t)$ за изграждане на периодичната реплика $\tilde{x}(t)$;



Стъпка 2: Тъй като $\tilde{x}(t)$ е периодична ние намираме коефициентите на РФ a_k и представяме $\tilde{x}(t)$ във вида

$$\tilde{x}(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk\omega_0 t} .$$

Чрез дефиниране на

$$X(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt , \quad (5.1)$$

което е известно като непрекъснатото преобразуване на Фурие, ние показваме, че

$$a_k = \frac{1}{T} X(jk\omega_0)$$

Стъпка 3: Задавайки $T \rightarrow \infty$, ние показваме, че $\tilde{x}(t) \rightarrow x(t)$ и

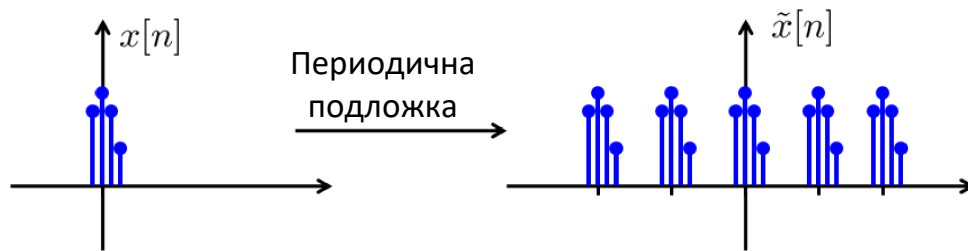
¹ Ние се интересуваме от неperiодични сигнали, защото periодичните сигнали могат да се обработват с помощта на НРФ!

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega) e^{j\omega t} dt \quad (5.2)$$

5.2. Извеждане на дискретното преобразуване на Фурие

Сега, нека да приложим същата концепция и за дискретни сигнали. При извеждането на дискретното преобразуване на Фурие (ДПФ), ние също имаме три основни стъпки.

Стъпка 1: Да разгледаме аperiодичния дискретен сигнал $x[n]$. Създаваме подложка на аperiодичния сигнал и я мултиплицираме за изграждане на периодичната реплика $\tilde{x}[n]$;



Стъпка 2: Тъй като $\tilde{x}[n]$ е периодична, при разлагането и в ДРФ ние имаме

$$\tilde{x}[n] = \sum_{k=\langle N \rangle} a_k e^{jk\omega_0 n}, \quad (5.3)$$

където a_k може да бъде определено от

$$a_k = \frac{1}{N} \sum_{n=\langle N \rangle} \tilde{x}[n] e^{jk\omega_0 n}.$$

Тук честотата ω_0 се дава от

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{N}.$$

Може да се види, че $\tilde{x}[n]$ е периодичен сигнал с период N , и ненулевите отчети на $\tilde{x}[n]$ са същите, като ненулевите отчети на $x[n]$. Затова можем да запишем

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{1}{N} \sum_{n=\langle N \rangle} \tilde{x}[n] e^{jk\omega_0 n} \\ &= \frac{1}{N} \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] e^{jk\omega_0 n}. \end{aligned}$$

Ако дефинираме

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-j\omega n}, \quad (5.4)$$

то

$$a_k = \frac{1}{N} \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{jk\omega_0 n} = \frac{1}{N} X(e^{jk\omega_0}) \quad (5.5)$$

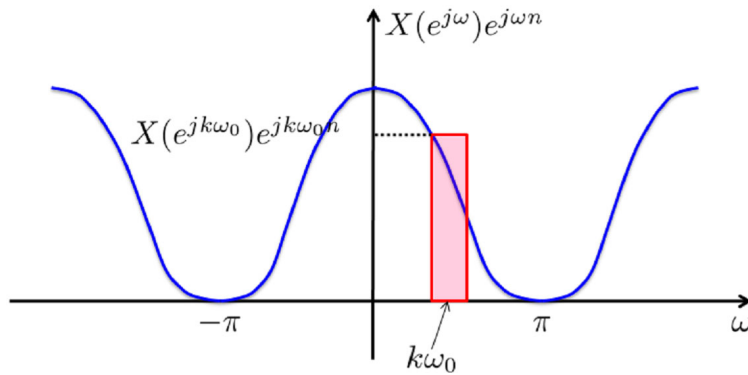
Стъпка 3: Като заместим уравнение (5.5) в (5.3) получаваме

$$\begin{aligned} \tilde{x}[n] &= \sum_{k=\langle N \rangle} a_k e^{jk\omega_0 n} \\ &= \sum_{k=\langle N \rangle} \left[\frac{1}{N} X(e^{jk\omega_0}) \right] e^{jk\omega_0 n} \\ &= \frac{1}{2\pi} \sum_{k=\langle N \rangle} X(e^{jk\omega_0}) e^{jk\omega_0 n} \omega_0, \quad \omega_0 = \frac{2\pi}{N}. \end{aligned} \quad (5.6)$$

Тъй като при $N \rightarrow \infty$, $\omega_0 \rightarrow 0$ и $\tilde{x}[n] \rightarrow x[n]$. Освен това от уравнение (5.6) следва

$$\tilde{x}[n] = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=\langle N \rangle} X(e^{jk\omega_0}) e^{jk\omega_0 n} \omega_0 \rightarrow \frac{1}{2\pi} \int_{2\pi} X(e^{j\omega}) e^{j\omega n} d\omega$$

$$x[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{2\pi} X(e^{j\omega}) e^{j\omega n} d\omega, \quad (5.7)$$



Фигура 5.1 Тъй като $N \rightarrow \infty$ и $\omega_0 \rightarrow 0$. Така площта става безкрайно малка и сумата става интеграл.

5.3. Защо при дискретното преобразуване на Фурие $X(j\omega)$ е периодична?

Интересно е да се отбележи, че при непрекъснатото преобразуване на Фурие $X(j\omega)$ е аperiodична като цяло, но при дискретното преобразуване на Фурие $X(j\omega)$ винаги е периодична. За да видим това, нека разгледаме ДПФ (искаме да проверим дали $X(e^{j\omega}) = X(e^{j(\omega+2\pi)})$!)

$$\begin{aligned} X(e^{j(\omega+2\pi)}) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-j(\omega+2\pi)n} \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-j\omega n}(e^{-j2\pi})^n = X(e^{j\omega}), \end{aligned}$$

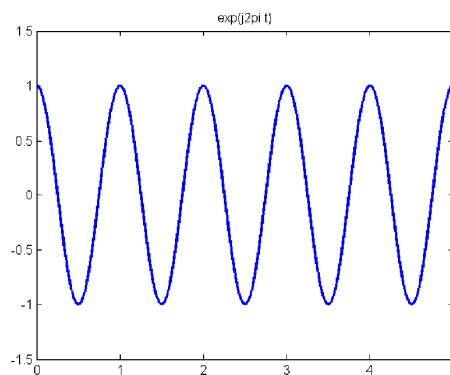
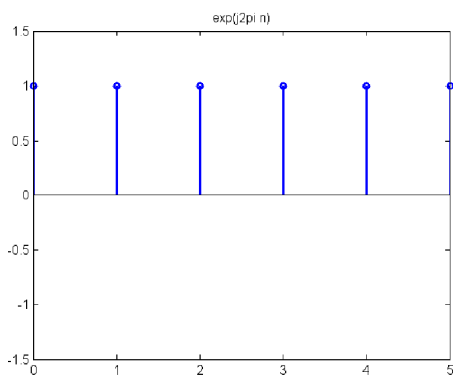
защото $(e^{-j2\pi})^n = (1)^n = 1$, за всяко цяло n . Следователно $X(j\omega)$ е периодична с период 2π .

Сега нека проверим непрекъснатото преобразуване на Фурие (искаме да видим дали $X(e^{j\omega}) = X(e^{j(\omega+2\pi)})$!):

$$X(j(\omega + 2\pi)) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j(\omega+2\pi)t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\omega t}(e^{-j2\pi})^t dt$$

Тук, $t \in \mathbb{R}$ и се изменя в диапазона от $-\infty$ до $+\infty$. Обърнете внимание на това, че $e^{-j2\pi t} \neq 1$, освен когато t е цяло число (което е различно от случая с ДПФ, където n е винаги цяло число!). Следователно,

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\omega t}e^{-j2\pi t} dt \neq \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\omega t} dt$$



а) $(e^{-j2\pi})^n = 1$ за всяко n , защото n е цяло б) $(e^{j2\pi})^t \neq 1$, освен когато t е цяло
и следователно,

$$X(j(\omega + 2\pi)) \neq X(j\omega).$$

5.4. Свойства на дискретното преобразуване на Фурие

Дискретно преобразуване на Фурие:

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-j\omega n}$$

Обратно дискретно преобразуване на Фурие:

$$x[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{2\pi} X(e^{j\omega}) e^{j\omega n} d\omega$$

1. Периодичност

$$X(e^{j(\omega+2\pi)}) = X(e^{j\omega})$$

2. Линейност

$$ax_1[n] + bx_2[n] \longleftrightarrow aX_1(e^{j\omega}) + bX_2(e^{j\omega})$$

3. Отместване във времето

$$x[n - n_0] \longleftrightarrow e^{-j\omega n_0} X(e^{j\omega})$$

4. Фазово отместване

$$e^{j\omega_0 n} x[n] \longleftrightarrow X(e^{j(\omega-\omega_0)})$$

5. Комплексно спрягане

$$x^*[n] \longleftrightarrow X^*(e^{-j\omega})$$

6. Обръщане във времето

$$x[-n] \longleftrightarrow X(e^{-j\omega})$$

7. Диференциране

$$nx[n] \longleftrightarrow j \frac{dX(e^{j\omega})}{d\omega}$$

8. Уравнение на Парсевал

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{2\pi} |X(e^{j\omega})|^2 d\omega$$

9. Конволюция

$$y[n] = x[n] * h[n] \longleftrightarrow Y(e^{j\omega}) = X(e^{j\omega})H(e^{j\omega})$$

10. Умножение

$$y[n] = x_1[n]x_2[n] \longleftrightarrow Y(e^{j\omega}) = \frac{1}{2\pi} \int_{2\pi} X_1(e^{j\omega})X_2(e^{j(\omega-\theta)})d\theta$$

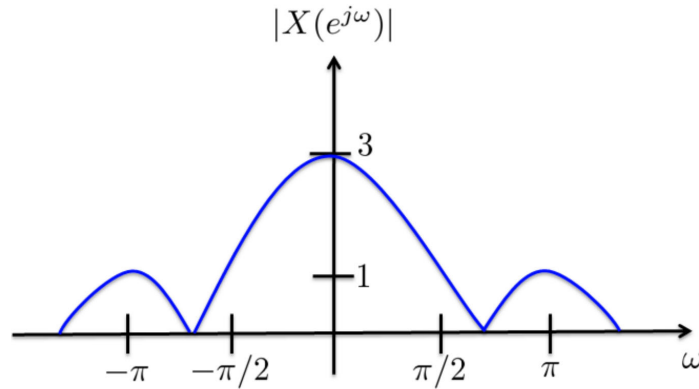
5.5. Примери

Пример 1.

Да разгледаме дискретната функция $x[n] = \delta[n] + \delta[n - 1] + \delta[n + 1]$. Тогава

$$\begin{aligned} X(e^{j\omega}) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-j\omega n} \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} (\delta[n] + \delta[n - 1] + \delta[n + 1])e^{-j\omega n} \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta[n]e^{-j\omega n} + \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta[n - 1]e^{-j\omega n} + \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta[n + 1]e^{-j\omega n} \\ &= 1 + e^{-j\omega} + e^{j\omega} = 1 + 2\cos\omega. \end{aligned}$$

За да изобразим $|X(e^{j\omega})|$ нека отбележим, че $|X(e^{j\omega})| = |1 + 2\cos\omega|$.



Фигура 5.2 Графика на модула на $X(e^{j\omega})$ в Пример 1.

Пример 2.

Нека разгледаме $x[n] = \delta[n] + 2\delta[n - 1] + 4\delta[n - 2]$. Дискретното преобразуване на Фурие е

$$X(e^{j\omega}) = 1 + 2e^{-j\omega} + 4e^{-j2\omega}$$

Импулсната реакция е $h[n] = \delta[n] + \delta[n - 1]$, тогава

$$H(e^{j\omega}) = 1 + e^{-j\omega}$$

Следователно изходът е

$$\begin{aligned} Y(e^{j\omega}) &= H(e^{j\omega})X(e^{j\omega}) \\ &= [1 + e^{-j\omega}] [1 + 2e^{-j\omega} + 4e^{-j2\omega}] \\ &= 1 + 3e^{-j\omega} + 6e^{-j2\omega} + 4e^{-j3\omega}. \end{aligned}$$

Вземайки обратно преобразуване на Фурие, ние имаме

$$y[n] = \delta[n] + 3\delta[n - 1] + 6\delta[n - 2] + 4\delta[n - 3].$$

Пример 3.

Да разгледаме $x[n] = a^n u[n]$, при $|a| < 1$. Дискретното преобразуване на Фурие е

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=0}^{\infty} a^n e^{-j\omega n} = \sum_{n=0}^{\infty} (ae^{-j\omega})^n = \frac{1}{1 - ae^{-j\omega}}.$$

Горният резултат се получава с помощта на формулата за сумата на членовете на геометрична прогресия:

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^N x^n &= 1 + x + x^2 + \dots + x^N = \frac{1 - x^{N+1}}{1 - x} \\ \sum_{n=0}^{\infty} x^n &= 1 + x + x^2 + \dots = \frac{1}{1 - x}, \text{ щом } |x| < 1. \end{aligned}$$

За да изобразим $|X(e^{j\omega})|$ нека отбележим, че

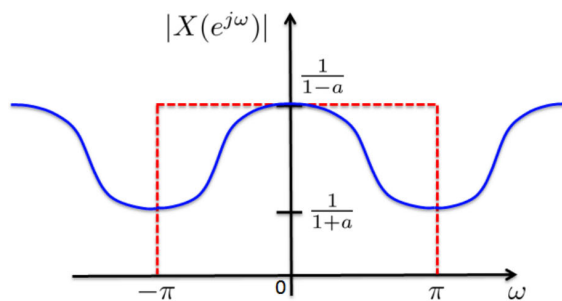
$$\begin{aligned} |X(e^{j\omega})|^2 &= X(e^{j\omega})X^*(e^{j\omega}) = \frac{1}{1 - ae^{-j\omega}} \cdot \frac{1}{1 - ae^{j\omega}} \\ &= \frac{1}{1 - a(e^{-j\omega}e^{j\omega}) + a^2} \\ &= \frac{1}{1 - 2a \cos \omega + a^2} \end{aligned}$$

Случай А. Нека $0 < a < 1$, тогава $|X(e^{j\omega})|^2$ става максимална, когато $\omega = 0$, и $|X(e^{j\omega})|^2$ става минимална, когато $\omega = \pi$. Така

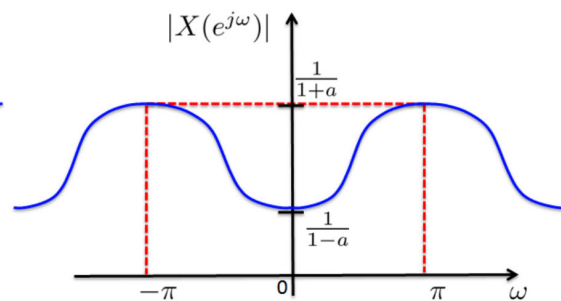
$$\begin{aligned} \max \left\{ |X(e^{j\omega})|^2 \right\} &= \frac{1}{1 - 2a + a^2} = \frac{1}{(1 - a)^2} \\ \min \left\{ |X(e^{j\omega})|^2 \right\} &= \frac{1}{1 + 2a + a^2} = \frac{1}{(1 + a)^2}. \end{aligned}$$

Случай Б. Нека $-1 < a < 0$, тогава $|X(e^{j\omega})|^2$ става максимална, когато $\omega = \pi$, и $|X(e^{j\omega})|^2$ става минимална, когато $\omega = 0$. Така

$$\begin{aligned} \max \left\{ |X(e^{j\omega})|^2 \right\} &= \frac{1}{1 + 2a + a^2} = \frac{1}{(1 + a)^2} \\ \min \left\{ |X(e^{j\omega})|^2 \right\} &= \frac{1}{1 - 2a + a^2} = \frac{1}{(1 - a)^2}. \end{aligned}$$



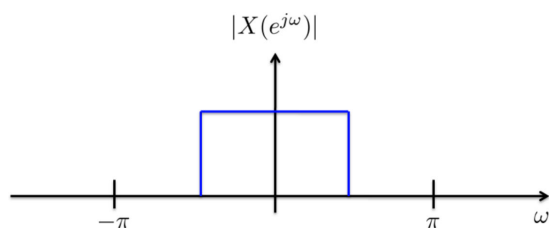
а) $0 < a < 1$



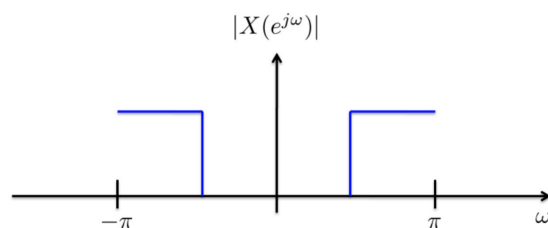
б) $-1 < a < 0$

5.6. Дискретни филтри

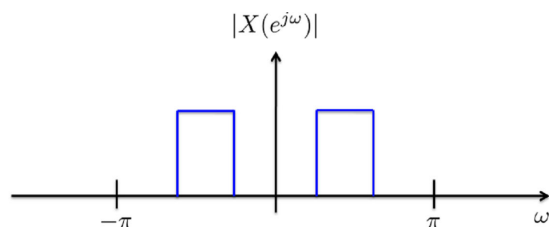
В цифрова обработка на сигнали, има общо четири вида често използвани филтри, а именно: нискочестотни филтри, високочестотни филтри, лентови филтри и режекторни филтри. Не съществува точно определение за това какво е "ниско" или "високо". Въпреки това, обикновено е лесно да се направи извод за типа на филтъра, гледайки тяхната амплитудна реакция (отклик).



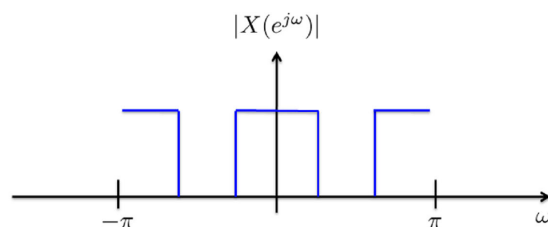
а) Идеален нискочестотен филтър



б) Идеален високочестотен филтър



в) Идеален лентов филтър



г) Идеален режекторен филтър

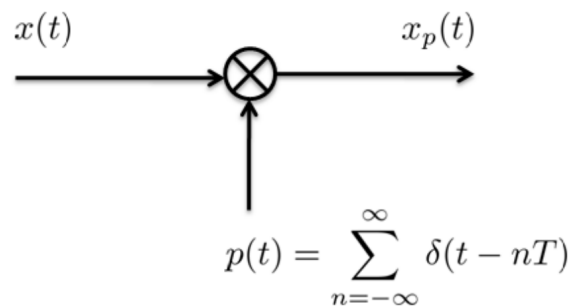
Глава 6

Теорема на Шенън за честотата на дискретизация

Теоремата за вземане на отчети играе ключова роля в съвременната цифрова обработка на сигнали. Теоремата се отнася за минималната честота на дискретизация, необходима за превръщане на непрекъснат във времето сигнал в цифров сигнал, без загуба на информация.

6.1. Аналогово цифрово преобразуване

Да разгледаме системата, показана на фиг. 6.1. Тази система се нарича аналогово-цифров преобразувател (АЦП). Основната идея на АЦП е да се вземе непрекъснат във времето сигнал, който да се конвертира в дискретен сигнал.



Фигура 6.1 Система за аналогово-цифрово преобразуване

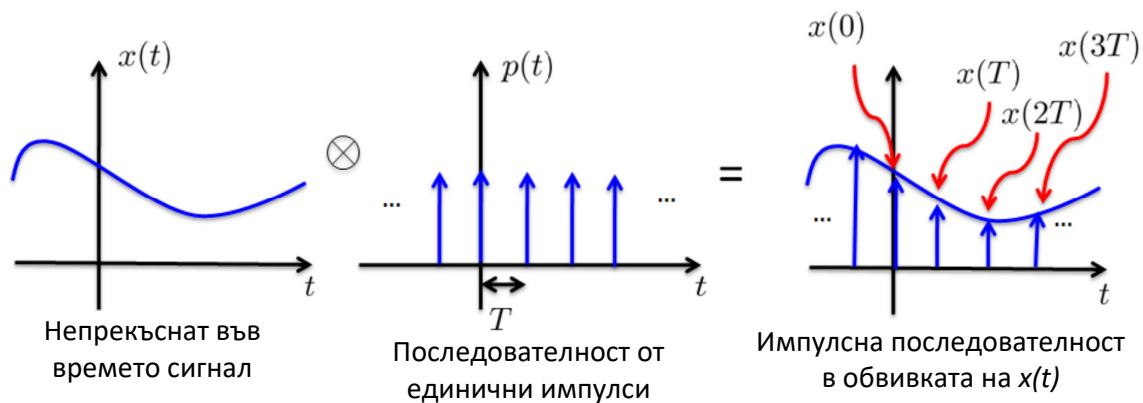
Математически, ако непрекъснатия във времето сигнал е $x(t)$, ние можем да съберем набор от отчети, като умножим $x(t)$ с импулсната последователност $p(t)$:

$$p(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT),$$

където T е периодът на импулсната последователност. Умножаването $x(t)$ с $p(t)$ дава

$$\begin{aligned}
 x_p(t) &= x(t)p(t) \\
 &= x(t) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT) \\
 &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(t)\delta(t - nT) \\
 &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT)\delta(t - nT).
 \end{aligned}$$

Визуално, $x_p(t)$ е набор от импулси, ограничени от обвивката $x(t)$, както е показано на Фиг. 6.2.



Фигура 6.2 Пример за аналогово-цифрово преобразуване. Изходният сигнал $x_p(t)$ представлява набор от отчети на сигнала $x(t)$

Можем да считаме $x_p(t)$ за отчети на $x(t)$. Забележете, че $x_p(t)$ е все още непрекъснат във времето сигнал – стойността му между отделните отчети е нула! (Можем да разглеждаме сигналът $x_p(t)$ като дискретен, ако дефинираме $x_p[n] = x(nT)$, което засега не е важно).

6.2. Честотен анализ на аналогово-цифровото преобразуване

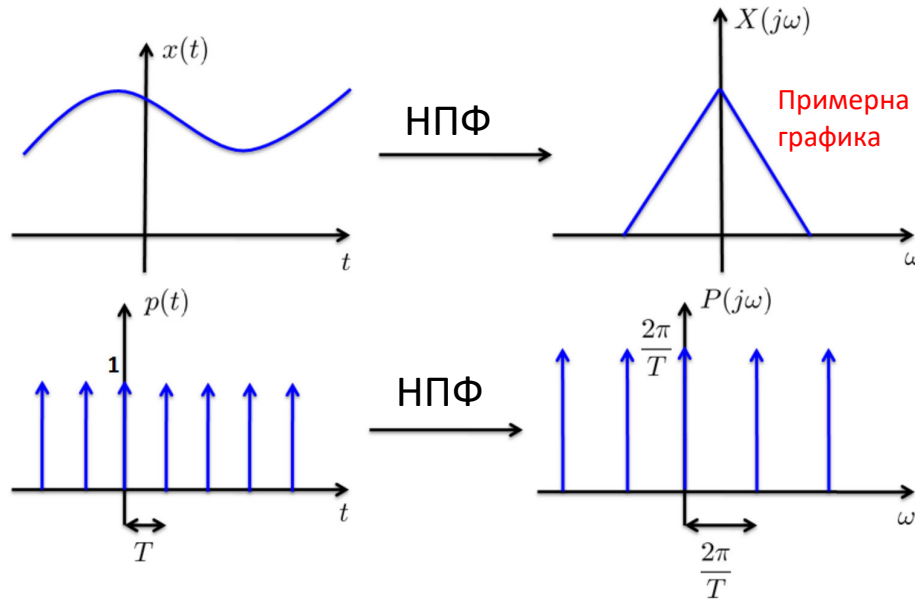
Имайки представа за аналогово-цифровото преобразуване във времевата област, нека изучим аналогово-цифровото преобразуване в честотната област. (Защо? За да достигнем до теоремата на Шенън за честотата на дискретизация) Как да построим честотните характеристики на $X(j\omega)$, $P(j\omega)$ и $X_p(j\omega)$?

6.2.1 Как изглежда $P(j\omega)$?

Нека да започнем с $P(j\omega)$. От таблица A1 от приложението, ние можем да видим, че преобразуването на Фурие на $p(t)$ е

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT) \xleftrightarrow{\text{ПФ}} \frac{2\pi}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - \frac{2\pi k}{T}) = P(j\omega) \quad (6.1)$$

Това означава, че честотната характеристика на импулсната поредица $p(t)$ е също импулсна поредица. Единствената разлика е, че периодът на $p(t)$ е T , докато периодът на $P(j\omega)$ е $2\pi/T$.



Фигура 6.3. Илюстрация на $X(j\omega)$ и $P(j\omega)$

6.2.1 Как изглежда $X_p(j\omega)$?

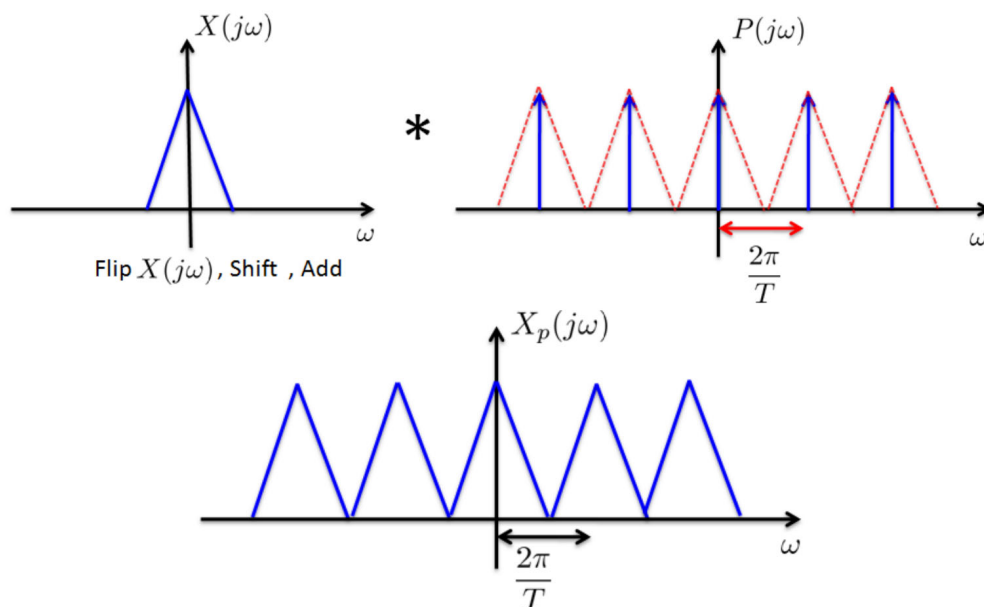
По-нататък предполагаме, че сигналът $x(t)$ има честотна реакция $X(j\omega)$. Искаме да узнаем честотната реакция на изходния сигнал $x_p(t)$. От определението за $x_p(t)$, ние знаем, че

$$x_p(t) = x(t)p(t).$$

Затоа, от свойството умножение на преобразованието на Фурие, имаме

$$X_p(j\omega) = \frac{1}{2\pi} X(j\omega) * P(j\omega).$$

На фиг. 6.3 са показани съответно честотната реакция $X(j\omega)$ и $P(j\omega)$. За да извършим конволюция в честотната област, ние първо трябва да вземем предвид, че $P(j\omega)$ е импулсна последователност. Затоа конволирането на $X(j\omega)$ с $P(j\omega)$ основно представлява създаване на повторения на всеки $2\pi/T$. Резултатът е показан на Фиг. 6.4.

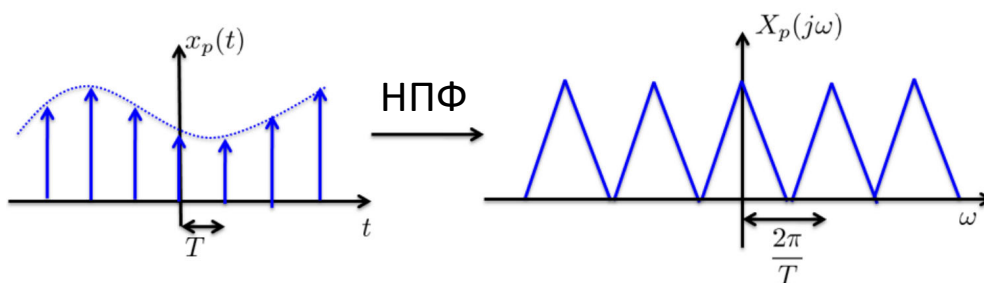


Фигура 6.4 Конволюцията между $X(j\omega)$ и $P(j\omega)$ води до получаване на периодични реплики на $X(j\omega)$

Математически, изходът $X_p(j\omega)$ се дава от

$$\begin{aligned}
 X_p(j\omega) &= \frac{1}{2\pi} X(j\omega) * P(j\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(j\theta) P(j(\omega - \theta)) d\theta \\
 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(j\theta) \left[\frac{2\pi}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta\left(\omega - \theta - \frac{2\pi k}{T}\right) \right] d\theta \\
 &= \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} X(j\theta) \delta\left(\omega - \theta - \frac{2\pi k}{T}\right) d\theta \right] \\
 &= \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X\left(j\left(\omega - \frac{2\pi k}{T}\right)\right).
 \end{aligned}$$

Резултатът е показан на Фиг. 6.5.



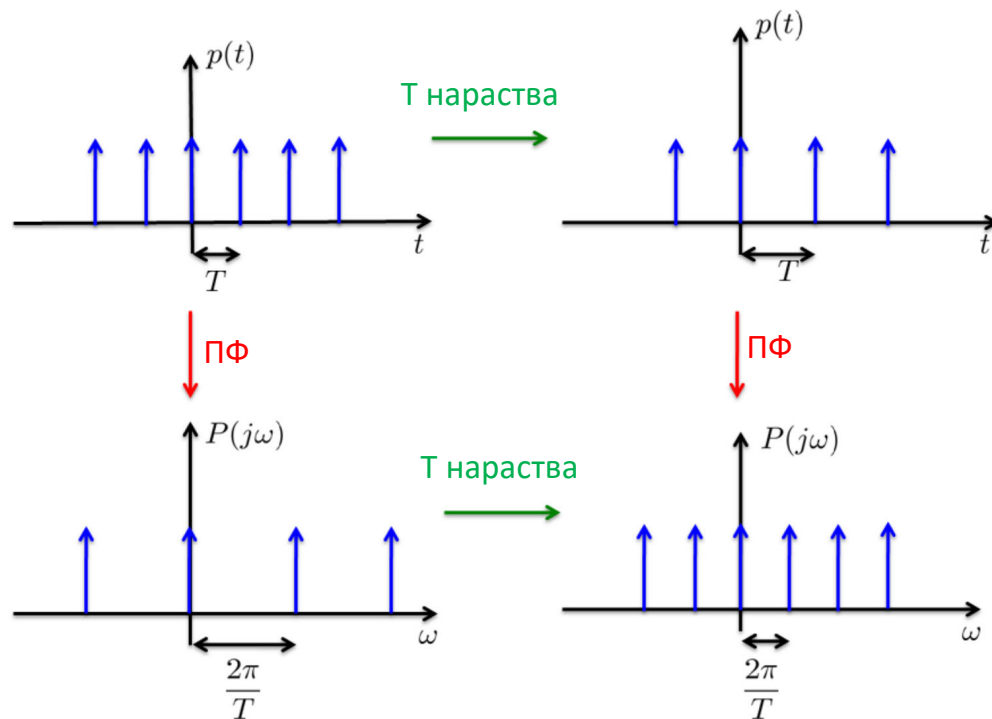
Фигура 6.5 Илюстрация на $x_p(t)$ и $X_p(j\omega)$

6.2.3 Какво става, ако T нараства?

Ако периодът T става все по-голям и по-голям (т.е., ние вземаме все по-малко и по-малко отчети), ние знаем, от определението на $p(t)$, че периодът (във времевата област) между два последователни импулса нараства (т.е., стават по-далеч един от друг). В честотна област, тъй като

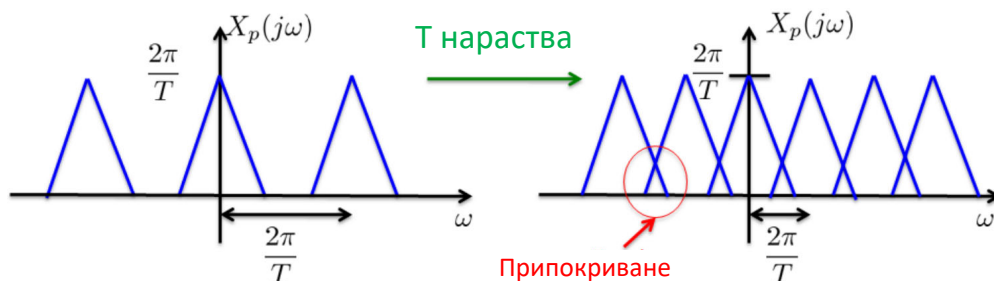
$$P(j\omega) = \frac{2\pi}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta\left(\omega - \frac{2\pi k}{T}\right),$$

периодът $2\pi/T$ намалява! С други думи, импулсите са разположени поплътнo в честотата област, когато T се увеличава. Фиг. 6.6 илюстрира този факт.



Фигура 6.6 Когато T нараства, периодът в честотна област намалява

Ако разгледаме $X_p(j\omega)$, която е периодично копие на $X(j\omega)$ към позицията на импулсите, дадени от $P(j\omega)$, виждаме, че разстоянието между копията намалява. Когато T достига определена граница, разстоянието става нула и отвъд тази граница, репликите започват да се припокриват! Когато честотните реплики се припокриват, ние казваме, че има копиране (припокриване) на спектъра.

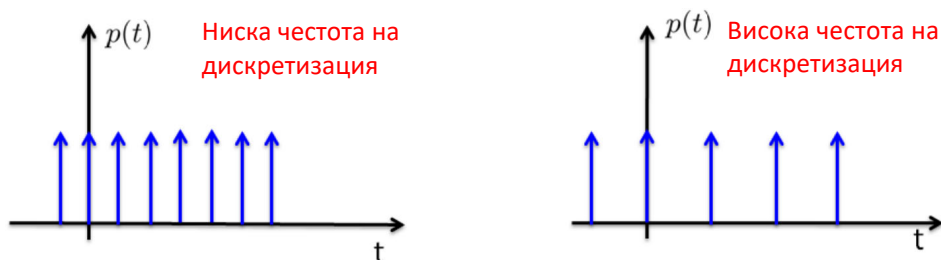


Фигура 6.7 Когато T е достатъчно голямо, ще има припокриване между последователните копия на $X(j\omega)$

Следователно, за да се избегне припокриването на спектъра, периодът T не бива да бъде твърде голям. Ако зададем честотата на дискретизация да бъде

$$\omega_s = \frac{2\pi}{T},$$

тогава по-малко T предполага по-висока ω_s . С други думи, съществува минимална честота на дискретизация ω_s , такава че да не възникне припокриване на спектъра.

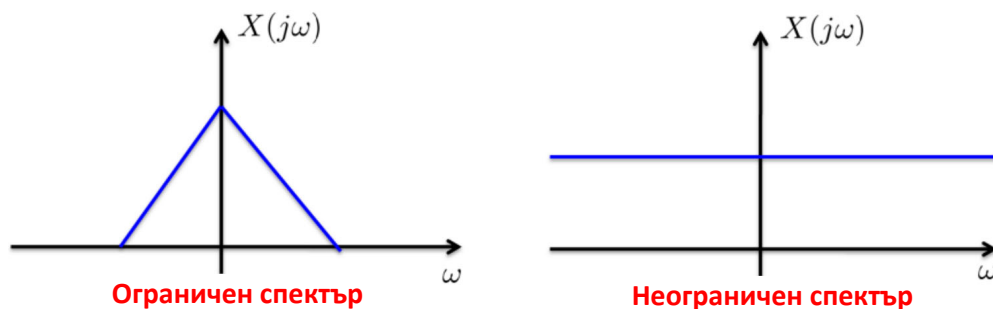


Фигура 6.8 Смисъл на висока честота на дискретизация в сравнение с ниска честота на дискретизация

6.2.4 Каква е минималната честота на дискретизация, така че да не възникне припокриване на спектъра?

Нека приемем, че сигнал $x(t)$ е с ограничена честотна лента. Затова ние приемаме, $X(j\omega) = 0$ за всички $|\omega| > W$, където W е известна като ширина на лентата.

За да отговорим на този въпрос, ние се нуждаем от теоремата за честотата на дискретизация.



Фигура 6.9 Ляво: Честотно ограничен сигнал (тъй като $X(j\omega) = 0$ за всички $|\omega| > W$); Дясно: Честотно неограничен сигнал.

6.3. Теорема за честотата на дискретизация

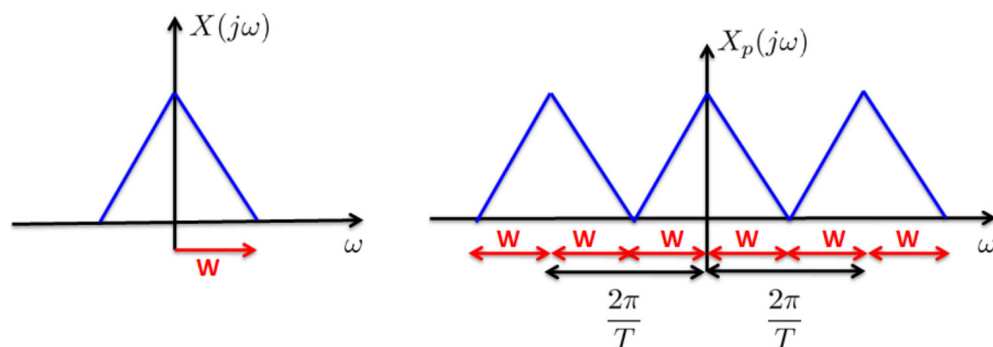
Теорема 11 (теорема за честотата на дискретизация). Нека $x(t)$ е честотно ограничен сигнал с $X(j\omega) = 0$ за всички $|\omega| > W$. Тогава минималната честота на дискретизация, такава че да няма припокриване на спектъра в $X_p(j\omega)$ е

$$\omega_s > 2W,$$

където $\omega_s = 2\pi/T$.

6.3.1 Пояснение

Да предположим, че $x(t)$ има честотна лента W . Граничният режим, при който не възниква припокриване на спектъра е показан на Фиг. 6.10.



Фигура 6.10 Минимална честота на дискретизация, при която няма припокриване на спектъра

В този случай, ние виждаме, че честотата на дискретизация $\omega_s (= 2\pi/T)$ е

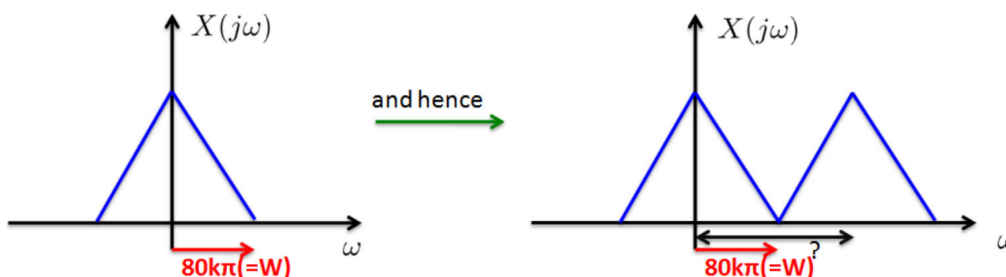
$$\omega_s = 2W.$$

Ако периодът T е по-голям (или ω_s е по-малък), то $2\pi/T$ става по-малко от $2W$, и има припокриване на спектъра. Следователно, минималната честота на дискретизация, която гарантира, че няма припокриване на спектъра е

$$\omega_s > 2W.$$

6.3.2 Пример

Да предположим, че имаме сигнал с максимална честота 40kHz. Каква е минималната честота на дискретизация?



Фигура 6.11: Пример: Минимална честота на дискретизация

Отговор :

От $\omega = 2\pi f$, ние определяме, че максималната честота (в радиани за секунда) е $\omega = 2\pi(40 \times 10^3) = 80 \times 10^3 \pi$ (rad). Следователно, минималната честота на дискретизация е: $2 \times (80 \times 10^3 \pi)$, което е $160 \times 10^3 \pi$ (радиана за секунда) = 80kHz.

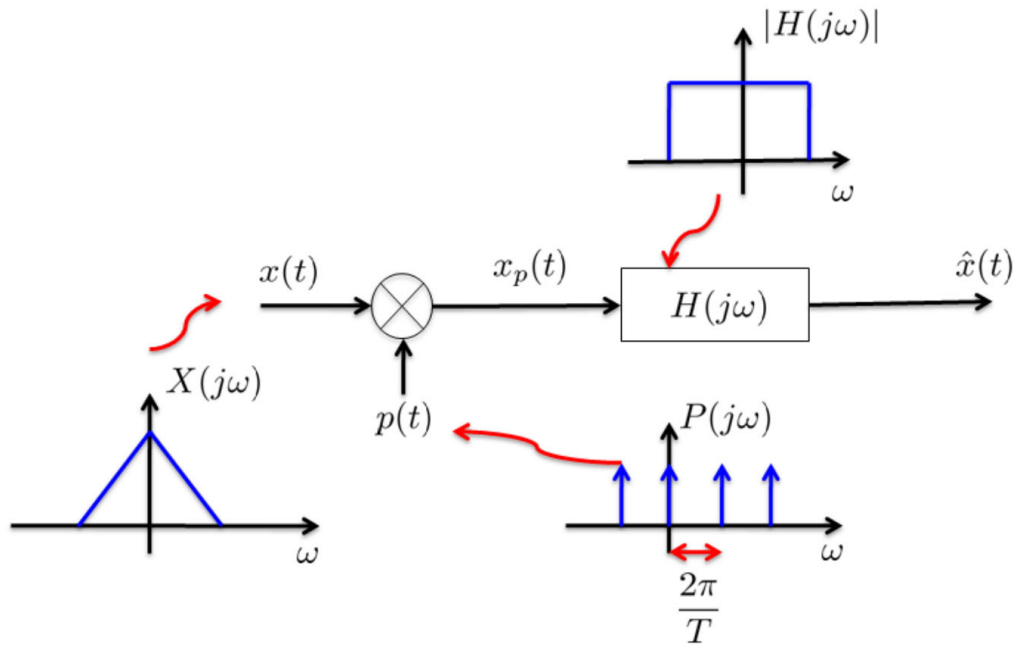
6.4. Цифрово аналогово преобразуване

В предишния параграф разгледахме аналогово-цифровото преобразуване. Сега искаме да вземем дискретен сигнал и от него да създадем непрекъснат във времето сигнал.

6.4.1 Дадена е $x_p(t)$ (няма припокриване на спектъра), как да възстановим $x(t)$?

Ако няма припокриване на спектъра при вземането на отчетите (т.е. при умножаването на $x(t)$ с $p(t)$), то можем да приложим идеален нискочестотен филтър $H(j\omega)$ за да извлечем $x(t)$ от $x_p(t)$. Фигура. 6.12 показва схематично как се извършва това.

За да видим как идеален нискочестотен филтър извлича $x(t)$ от $x_p(t)$, нека първо погледнем честотната характеристика $X_p(j\omega)$.



Фигура 6.12: Схема за възстановяване на $x(t)$ от $x_p(t)$. Предполага се, че филтърът $H(j\omega)$ е идеален нискочестотен филтър.

Тогава

$$X_p(j\omega) = \frac{1}{T} \sum_{-\infty}^{\infty} X(j(\omega - k\omega_s)).$$

Както е показано на фиг. 6.13 $X_p(j\omega)$ е периодична реплика на $X(j\omega)$. Като се приеме, че няма припокриване на спектъра, оста у на репликата е идентична на $X(j\omega)$. Така например за $|\omega| < \frac{\omega_s}{2}$,

$$X_p(j\omega) = X(j\omega).$$

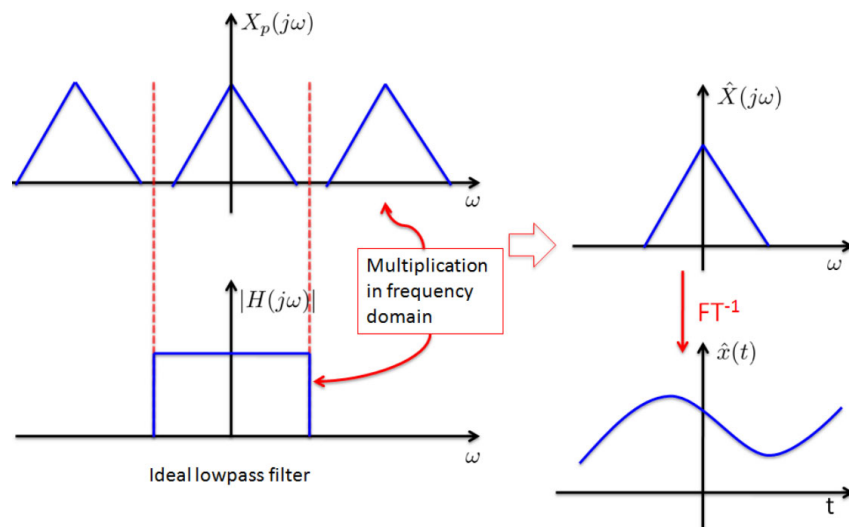
Сега, ако приложим идеален нискочестотен филтър (показано в долния ляв край на фигура 6.13.):

$$H(j\omega) = \begin{cases} 1, & |\omega| < \frac{\omega_s}{2}, \\ 0, & \text{в противен случай,} \end{cases}$$

тогава

$$X_p(j\omega)H(j\omega) = X(j\omega),$$

за всяко ω . Вземайки обратно непрекъснато преобразуване на Фурие, ние можем да получим $x(t)$.



Фигура 6.13 Ляво: Умножение между $X_p(j\omega)$ и нискочестотен филтър $H(j\omega)$.

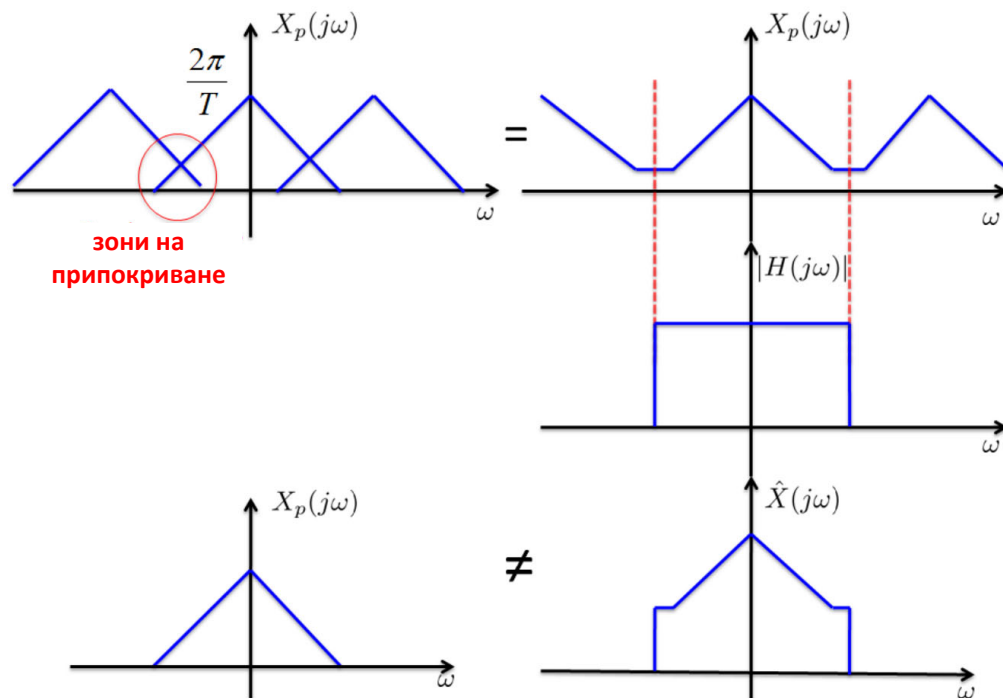
Ако не възниква припокриване, извлеченият изходен сигнал $\hat{X}(j\omega)$ е идентичен с $X_p(j\omega)$. Чрез прилагането на обратно преобразуване на Фурие към $\hat{X}(j\omega)$, можем да получим $x(t)$.

6.4.2 Ако $x_p(t)$ има припокриване на спектъра, може ли все още се възстанови $x(t)$ от $x_p(t)$?

Отговорът е НЕ. Ако има припокриване на спектъра, тогава условието

$$X_p(j\omega) = X(j\omega)$$

не се изпълнява за всички $|\omega| < \frac{\omega_s}{2}$. Следователно, дори ако да приложим нискочестотен филтър $H(j\omega)$ към $X_p(j\omega)$, Резултатът няма да е $X(j\omega)$. Това може да се види на фиг. 6.14.

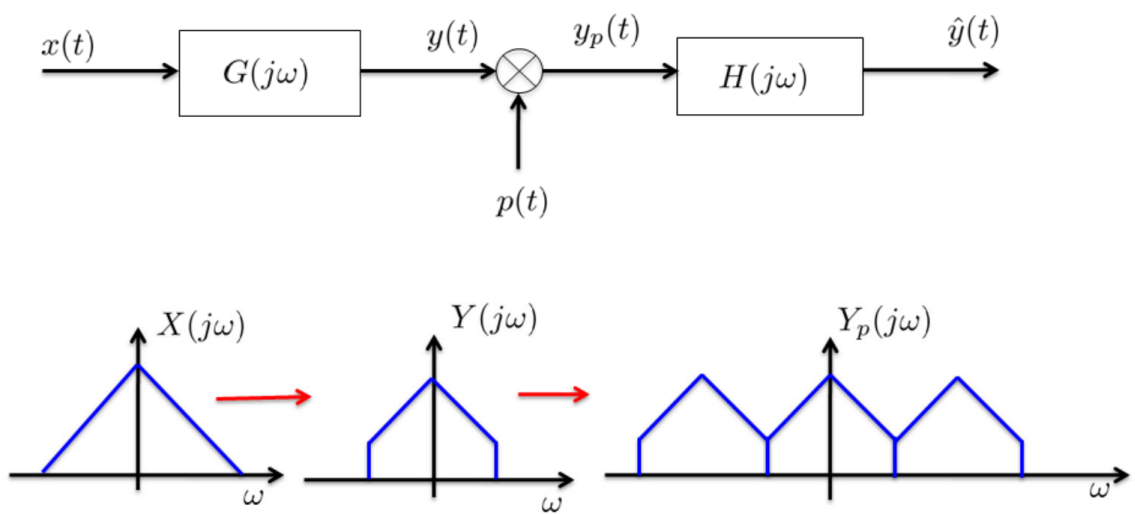


Фигура 6.14 Ако се появи припокриване, не сме в състояние да се възстановим $x(t)$ от $x_p(t)$ чрез използване на идеален нискочестотен филтър.

6.4.3 Какво може да се направи, ако нашето устройство за вземане на отчети (АЦП) не поддържа достатъчно висока честота на дискретизация?

Метод 1: Да се закупи по-добро (по-бързо) устройство за вземане на отчети (АЦП)!

Метод 2: Подаваме на входа сигнали с по-тясна честотна лента или ограничаваме на честотната лента на сигналите, устройството за вземане на отчети (АЦП):



Глава 7

Z - Преобразувание

Z - преобразуванието по същество е обобщение на дискретното преобразувание на Фурие, което разгледахме в Глава 5. Както ще видим, Z - преобразуванието ни позволява да изучаваме някои системни свойства, които не могат да се изследват с ДПФ.

7.1. Определение на Z - преобразуванието

Определение 21. Z - Преобразуванието на дискретния във времето сигнал $x[n]$ се дава от

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]z^{-n}. \quad (7.1)$$

Ние ще обозначаваме вземането на Z- преобразувание с

$$x[n] \longleftrightarrow X(z).$$

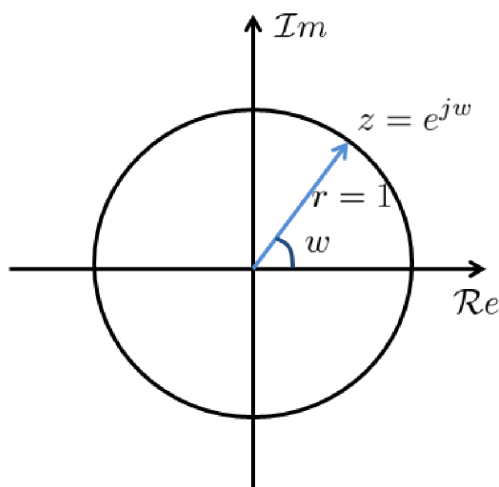
В общия случай, числото z в (7.1) е комплексно число. Ето защо, ние можем да запишем z като

$$z = re^{j\omega},$$

където $r \in \mathbb{R}$ и $\omega \in \mathbb{R}$. При $r = 1$ уравнение (7.1) става:

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-j\omega n},$$

което е ДПФ на $x[n]$. Следователно ДПФ представлява частен случай на Z-преобразуванието! Визуално, ние можем да изобразим ДПФ като Z-преобразувание изчислено върху кръг с единичен радиус:



Фигура 7.1 Комплексна Z -равнина. Z - преобразуванието преминава в ДПФ за стойности на z върху единичната окръжност

Когато $r \neq 1$ Z- преобразуванието е еквивалентно на

$$\begin{aligned} X(re^{jw}) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] (re^{jw})^{-n} \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} (r^{-n}x[n]) e^{-jwn} \\ &= \mathcal{F} [r^{-n}x[n]] , \end{aligned}$$

което е ДПФ на сигнала $r^{-n} x[n]$. Въпреки това, от разглеждането на ДПФ ние знаем, че ДПФ не винаги съществува. То съществува само когато сигналът е квадратично сумируем или удовлетворява условията на Дирихле. Следователно, $X(z)$ не винаги се сходя. Той се сходя само за някои стойности на r . Този набор от r се нарича област на сходимост (ОС).

Определение 22. Областта на сходимост (ОС) на Z – преобразуванието представлява набор от z , таъв че $X(z)$ да е сходима, т.е.

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]|r^{-n} < \infty.$$

7.2. Таблици и примери на Z- преобразувание

Пример 1. Да разгледаме сигнала $x[n] = a^n u[n]$, като $0 < a < 1$. Z- преобразуванието на $x[n]$ е

$$\begin{aligned}
 X(z) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} a^n u[n] z^{-n} \\
 &= \sum_{n=0}^{\infty} (az^{-1})^n.
 \end{aligned}$$

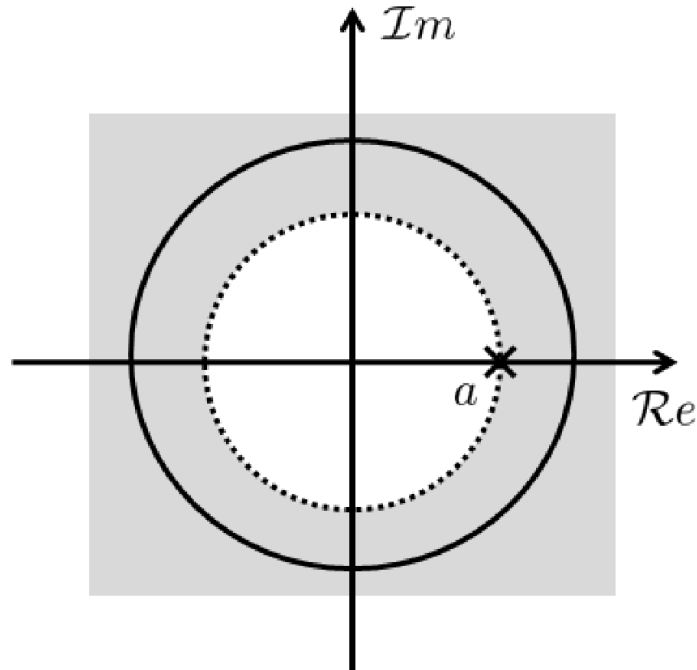
Следователно $X(z)$ е сходим, когато $\sum_{n=0}^{\infty} (az^{-1})^n < \infty$. От геометричните прогресии ние знаем, че

$$\sum_{n=0}^{\infty} (r z^{-1})^n = \frac{1}{1 - az^{-1}},$$

когато $|az^{-1}| < 1$, или еквивалентно $|z| > |a|$. Така

$$X(z) = \frac{1}{1 - az^{-1}},$$

със област на сходимост, такава че $|z| > |a|$.



Фигура 7.2 Диаграма на полюсите и нулите и ОС от Пример 1.

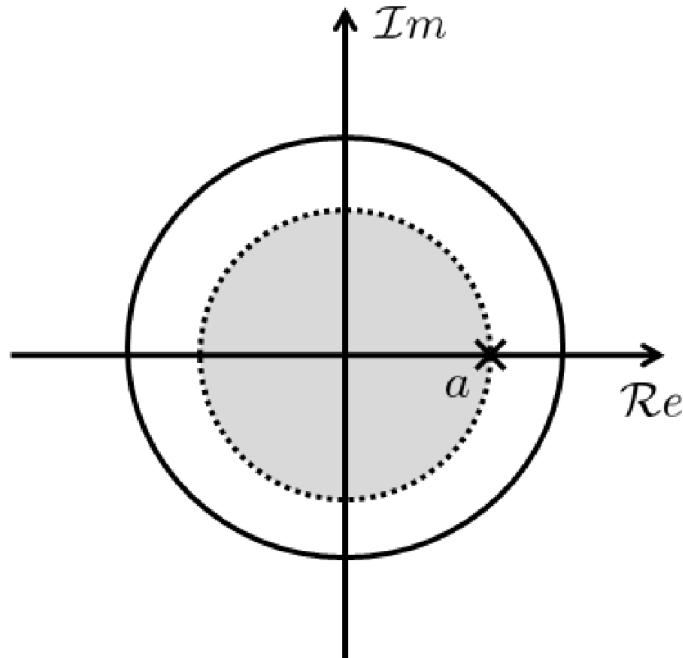
Пример 2. Да разгледаме сигнала $x[n] = -a^n u[-n - 1]$, при $0 < a < 1$. Z-преобразуването на $x[n]$ е

$$\begin{aligned}
X(z) &= - \sum_{n=-\infty}^{\infty} a^n u[-n-1] z^{-n} \\
&= - \sum_{n=-\infty}^{-1} a^n z^{-n} \\
&= - \sum_{n=1}^{\infty} a^{-n} z^n \\
&= 1 - \sum_{n=0}^{\infty} (a^{-1} z)^n.
\end{aligned}$$

Следователно $X(z)$ е сходим, когато $|a^{-1}z| < 1$, или еквивалентно $|z| < |a|$. В такъв случай,

$$X(z) = 1 - \frac{1}{1 - a^{-1}z} = \frac{1}{1 - az^{-1}},$$

с ГС за стойности на z , такива, че $|z| < |a|$. Имайте предвид, че Z -преобразуването е същото като това от Пример 1. само разликата е ОС. В действителност, Пример 2 е само левостранна версия на Пример 1!



Фигура 7.3 Диаграма на полюсите и нулите и ОС от Пример 2

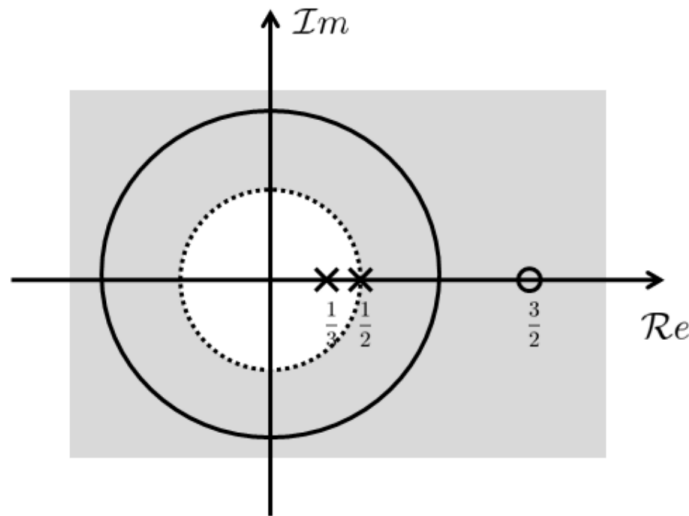
Пример 3. Да разгледаме сигнала

$$x[n] = 7 \left(\frac{1}{3}\right)^n u[n] - 6 \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n].$$

Z- преобразуванието е

$$\begin{aligned}
 X(z) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[7 \left(\frac{1}{3} \right)^n - 6 \left(\frac{1}{2} \right)^n \right] u[n] z^{-n} \\
 &= 7 \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{3} \right)^n u[n] z^{-n} - 6 \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{2} \right)^n u[n] z^{-n} \\
 &= 7 \left(\frac{1}{1 - \frac{1}{3} z^{-1}} \right) - 6 \left(\frac{1}{1 - \frac{1}{2} z^{-1}} \right) \\
 &= \frac{1 - \frac{3}{2} z^{-1}}{\left(1 - \frac{1}{3} z^{-1} \right) \left(1 - \frac{1}{2} z^{-1} \right)}.
 \end{aligned}$$

За да се схожда $X(z)$, трябва и двете суми в $X(z)$ да се схождат. Следователно трябва да се изпълнят и двете условия $|z| > \frac{1}{3}$ и $|z| > \frac{1}{2}$. Тогава ОС са стойностите на z , за които $|z| > \frac{1}{2}$.



Фигура 7.4 Диаграма на полюсите и нулите и ОС от Пример 3

7.2.1 А. Таблица 7.1 (Опенхайм – Табл .10.2)

1. $\delta[n] \longleftrightarrow 1$ за всяко z ;
2. $\delta[n - m] \longleftrightarrow z^{-m}$ за всяко z с изключение 0, при $m > 0$ и ∞ при $m < 0$;
3. $u[n] \longleftrightarrow \frac{1}{1 - z^{-1}}, |z| > 1$;
4. $a^n u[n] \longleftrightarrow \frac{1}{1 - az^{-1}}, |z| > a$;
5. $-a^n u[-n - 1] \longleftrightarrow \frac{1}{1 - az^{-1}}, |z| < |a|$.

Пример 4. Да покажем, че $\delta[n] \longleftrightarrow 1$ за всяко z .

$$\begin{aligned}
X(z) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta[n]z^{-n} \\
&= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta[n] = 1.
\end{aligned}$$

Пример 5. Да покажем, че $\delta[n - m] \longleftrightarrow z^{-m}$:

$$\begin{aligned}
X(z) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta[n - m]z^{-n} \\
&= z^{-m} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta[n - m] = z^{-m}.
\end{aligned}$$

7.2.2 Таблица 7.2 (Опенхайм Табл. 10.1)

1. $ax_1[n] + bx_2[n] \longleftrightarrow aX_1(z) + bX_2(z)$;
2. $x[n - n_0] \longleftrightarrow X(z)z^{-n_0}$;
3. $z_0^n x[n] \longleftrightarrow X(\frac{z}{z_0})$;
4. $e^{j\omega_0 n} x[n] \longleftrightarrow X(e^{-j\omega_0} z)$;
5. $x[-n] \longleftrightarrow X(\frac{1}{z})$;
6. $x^*[n] \longleftrightarrow X^*(z^*)$;
7. $x_1[n] * x_2[n] \longleftrightarrow X_1(z)X_2(z)$;
8. Ако $y[n] = \begin{cases} x[n/L], & \text{при } n \text{ кратно на } L \\ 0, & \text{в противен случай,} \end{cases}$ то $Y(z) = X(z^L)$.

Пример 6. Да разгледаме сигнала $h[n] = \delta[n] + \delta[n - 1] + 2\delta[n - 2]$. Z-преобразуването на $h[n]$ е

$$H(z) = 1 + z^{-1} + 2z^{-2}.$$

Пример 7. Нека докажем, че $x[-n] \longleftrightarrow X(z^{-1})$. Замествайки $y[n] = x[-n]$ ние имаме:

$$\begin{aligned}
Y(z) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} y[n]z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[-n]z^{-n} \\
&= \sum_{m=-\infty}^{\infty} x[m]z^m = X(1/z).
\end{aligned}$$

Пример 8. Да разгледаме сигнала $x[n] = (\frac{1}{3}) \sin(\frac{\pi}{4}n) u[n]$. За да намерим Z-преобразуването, нека първо отбележим, че

$$x[n] = \frac{1}{2j} \left(\frac{1}{3} e^{j\frac{\pi}{4}} \right)^n u[n] - \frac{1}{2j} \left(\frac{1}{3} e^{-j\frac{\pi}{4}} \right)^n u[n].$$

Z- преобразуването е

$$\begin{aligned} X(z) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] z^{-n} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2j} \left(\frac{1}{3} e^{j\frac{\pi}{4}} z^{-1} \right)^n - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2j} \left(\frac{1}{3} e^{-j\frac{\pi}{4}} z^{-1} \right)^n \\ &= \frac{1}{2j} \frac{1}{1 - \frac{1}{3} e^{j\frac{\pi}{4}} z^{-1}} - \frac{1}{2j} \frac{1}{1 - \frac{1}{3} e^{-j\frac{\pi}{4}} z^{-1}} \\ &= \frac{\frac{1}{3\sqrt{2}} z^{-1}}{\left(1 - \frac{1}{3} e^{j\frac{\pi}{4}} z^{-1}\right) \left(1 - \frac{1}{3} e^{-j\frac{\pi}{4}} z^{-1}\right)}. \end{aligned}$$

7.3. Свойства на областта на сходимост

Свойство 1. Областта на сходимост в комплексната равнина z представлява кръг или пръстен с център началото на координатите.

Свойство 2. ДПФ на $x[n]$ съществува тогава и само тогава, когато ОС включва единичния кръг.

Доказателство. По определение ОС е такъв набор от z , за който $X(z)$ е сходим. ДПФ представлява Z- преобразуване, извършено върху единична окръжност. Следователно ОС включва единичната окръжност и $X(z)$ е сходим за всяка стойност на z върху единичната окръжност. Затова ДПФ е сходимо.

Свойство 3. Областта на сходимост не съдържа полюси.

Свойство 4. Ако $x[n]$ има крайна импулсна реакция (КИР), то ОС е цялата z – равнина.

Свойство 5. Ако $x[n]$ е десностранна последователност, тогава ОС се простира навън от най-външния полюс.

Свойство 6. Ако $x[n]$ е левостранна последователност, тогава ОС се простира навтре от най-вътрешния полюс.

Доказателство. Нека да разгледаме десностранния случай. Забележете, че е достатъчно да се покаже, че ако комплексното число z с модул $|z| = r_0$ е вътре в ОС, тогава всяко друго с комплексно число z' с модул $|z'| = r_1 > r_0$ също ще бъде разположено в ОС.

Сега да предположим, че $x[n]$ е десностранна последователност. Така че, $x[n]$ е нула преди някъква стойност на n , отбелязана с N_1 . Това означава

$$x[n] = 0, \quad n \leq N_1.$$

Да разгледаме точка z с $|z| = r_0$, и $r_0 < 1$. Тогава

$$\begin{aligned} X(z) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]z^{-n} \\ &= \sum_{n=N_1}^{\infty} x[n]r_0^{-n} < \infty, \end{aligned}$$

тъй като $r_0 < 1$ гарантира, че сумата е крайна.

Съществува и друга точка z' с модул $|z'| = r_1 > r_0$, за която можем да напишем $r_1 = ar_0$ при някое $a > 1$. Тогава редът

$$\begin{aligned} \sum_{n=N_1}^{\infty} x[n]r_1^{-n} &= \sum_{n=N_1}^{\infty} x[n]a^{-n}r_0^{-n} \\ &\leq a^{N_1} \sum_{n=N_1}^{\infty} x[n]r_0^{-n} < \infty. \end{aligned}$$

Така z' също е в ОС.

Свойство 7. Ако $X(z)$ е рационално, т.е., $X(z) = A(z)/B(z)$, където $A(z)$ и $B(z)$ са полиноми и ако $x[n]$ е десностранна последователност, тогава ГС е районът извън най-външния полюс.

Доказателство. Ако $X(z)$ е рационално, тогава от (приложение, А.57 на учебника)

$$X(z) = \frac{A(z)}{B(z)} = \frac{\sum_{k=0}^{n-1} a_k z^k}{\prod_{k=1}^r (1 - p_k^{-1} z)^{\sigma_k}},$$

където p_k е k -тия полюс на системата. Използвайки частична дроб, ние имаме

$$X(z) = \sum_{i=1}^r \sum_{k=1}^{\sigma_i} \frac{C_{ik}}{(1 - p_i^{-1}z)^k}.$$

Всеки компонент в частичната дроб има за ОС набор от z , така че $|z| > |p_i|$ (защото $x[n]$ е десностранна). За да се сходя $X(z)$, ОС трябва да е пресечната област на всички индивидуални ОС. Ето защо, ОС е областта извън най-външния полюс.

Например, ако

$$X(z) = \frac{1}{(1 - \frac{1}{3}z^{-1})(1 - \frac{1}{2}z^{-1})},$$

тогава ОС е $|z| > \frac{1}{2}$.

7.4. Свойства на системите при използване на Z- преобразуването

7.4.1 Обусловеност

Свойство 8. Една ЛИВ система е обусловена тогава и само тогава, когато ОС е външната част на кръг, включително ∞ .

Доказателство. Една система е обусловена тогава и само тогава, когато

$$h[n] = 0, \quad n < 0.$$

Следователно $h[n]$ трябва да бъде десностранна. Свойство 5 предполага, че ОС е разположена отвън на кръг.

Също така, от определението, че

$$H(z) = \sum_{n=0}^{\infty} h[n]z^{-n}$$

където няма положителни степенни показатели на z , $H[z]$ се сходя и когато $z \rightarrow \infty$ (Разбира се, $|z| > 1$, когато $z \rightarrow \infty$!).

7.4.2 Устойчивост

Свойство 9. Една дискретна ЛИВ система е устойчива тогава и само тогава, когато ОС на $H(z)$ включва единичната окръжност.

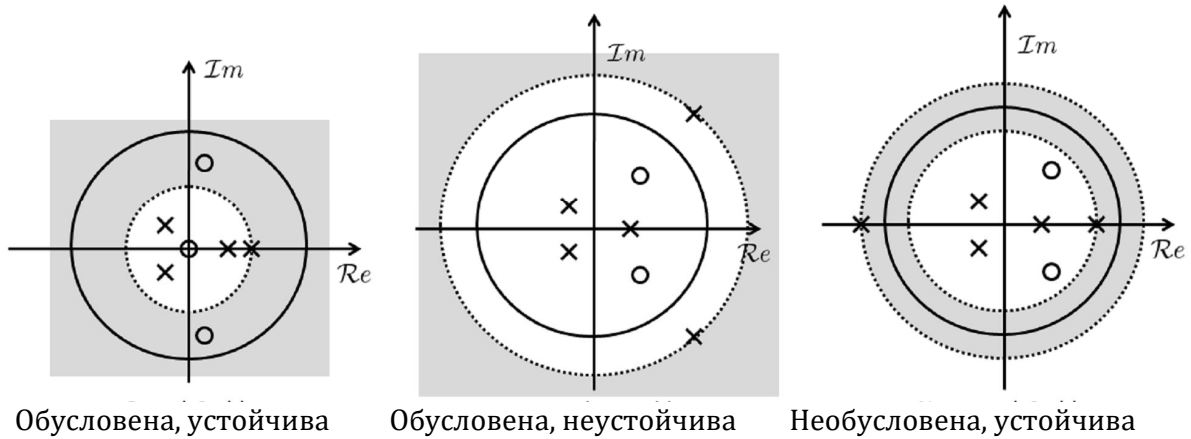
Доказателство. Една система е устойчива тогава и само тогава, когато $h[n]$ е абсолютно сумируема, тогава и само тогава, когато съществува ДПФ на

$h[n]$. Следователно от Свойство 2, ОС на $H(z)$ трябва да включва единичната окръжност.

Свойство 10. Една обусловена, дискретна ЛИВ система е устойчива тогава и само тогава, когато полюсите и са разположени в единичната окръжност.

Доказателство. Доказателството следва от Свойства 8 и 9 директно.

Примери.



Глава 8

Системи, описани с диференчни уравнения. Филтри

8.1. Диференчни уравнения

В предишните части, ние изчислявахме конволюцията на две крайни импулсни последователности. Да предположим сега, че импулсната последователност отклик $h[n]$ на система се състои от безкраен брой ненулеви съставки. В този случай, изходът на системата не може да бъде изчислен с използването на командата на Матлаб `conv`. За да се справим с този случай е намерен различен начин за описване на ЛИВ системата. Една дискретна във времето ЛИВ система може да бъде напълно описана от диференчно уравнение (уравнение в крайни разлики). Диференчните уравнения са уравнения имащи формата

$$\sum_{k=0}^N a_k y[n-k] = \sum_{k=0}^M b_k x[n-k]. \quad (8.1)$$

Системната информация, която присъства в евентуално безкрайната ненулева импулсна последователност отклик $h[n]$ на системата се описва от краен брой коефициенти на a_k и b_k на диференчните уравнения.

Да предположим, че $a_0 = 1$. Тогава изходът на системата се дава от

$$y[n] = - \sum_{k=1}^N a_k y[n-k] + \sum_{k=0}^M b_k x[n-k]. \quad (8.2)$$

Стойността на $y[n]$ за $n = 0$, т.е., $y[0]$, се определя директно от (8.2) и е

$$y[0] = - \sum_{k=1}^N a_k y[-k] + \sum_{k=0}^M b_k x[-k]. \quad (8.3)$$

По този начин, за да се изчисли $y[0]$, с изключение на стойността на входния сигнал $x[0]$ при $n = 0$, ние също така трябва да знаем началните условия $x[-1], \dots, x[-M]$ и $y[-1], \dots, y[-N]$.

8.2. Филтри

Една ЛИВ система се нарича също така филтър, което се дължи на факта, че входният сигнал се променя или филтрира според някои правила, които характеризират системата. Дискретният във времето филтър се описва от линейно диференчно уравнение с постоянни коефициенти, имащо вида

$$y[n] = \sum_{k=0}^M b[k]x[n-k] - \sum_{k=1}^N a[k]y[n-k]. \quad (8.4)$$

Импулсната реакция (отклик) $h[n]$ на филтъра е решение на диференчното уравнение, ако входният сигнал е импулсна делта функция, а именно, $x[n] = \delta[n]$. ЛИВ филтрите са класифицирани в две категории на базата на продължителността на техния импулсен отклик. Тези две категории са филтри с краен импулсен отклик (finite impulse response - FIR) и филтри с безкраен импулсен отклик (infinite impulse response IIR). FIR филтърът има импулсен отклик с крайна продължителност и се описва с диференчно уравнение от вида

$$y[n] = \sum_{k=0}^M b[k]x[n-k], \quad (8.5)$$

докато импулсна реакция на FIR филтър се дава от

$$h[n] = \sum_{k=0}^M b[k]\delta[n-k] \quad (8.6)$$

Както се вижда от сравнението на уравнения (8.4) и (8.5) в дясната част на второто уравнение, при филтрите с краен импулсен отклик отсъстват компонентите, зависещи от предишните състояния $y[n-k]$ на изхода на системата. Това означава, че в този тип филтри отсъства обратна връзка или с други думи казано коефициентите на (4) $a_k = 0$, при $k \neq 0$.

При филтрите с безкраен импулсен отклик поне един от коефициентите на (4) a_k е различен от 0, при $k \neq 0$.

8.3. Матлб команда `filter`

Откликът на един филтър (или система), описан с линейно диференчно уравнение с постоянни коефициенти се изчислява в MATLAB с помощта на командата `filter`. Да предположим, че системата се описва с диференчното уравнение (1). Следователно, входният вектор $x = [x[0], x[1], \dots, x[n]]$ и векторите на коефициентите $a = [a[0], a[1], \dots, a[N]]$ и $b = [b[0], b[1], \dots, b[M]]$ са дадени. Командата `y=filter(b,a,x)` връща дискретния отклик $y = [y[0], y[1], \dots, y[n]]$ на системата, на чийто вход е подадена последователността $x = [x[0], x[1], \dots, x[n]]$.

Забележка

Изходният сигнал $y[n]$ има същия брой отчета (или елементи), като входния сигнал $x[n]$.

Пример

Да разгледаме система, описана от диференчното уравнение

$$y[n] = 0.5y[n-1] - 0.1y[n-2] + 0.1x[n] - 0.5x[n-1] + x[n-2]$$

и да приемем, че началните условия са нулеви.

Да се изчислят в интервала от време $0 \leq n \leq 9$:

а) Откликът на на системата $y[n]$ на входния сигнал $x[n] = [1, 2, -1]$, $0 \leq n \leq 2$

б) Импулсният отклик $h[n]$ на системата

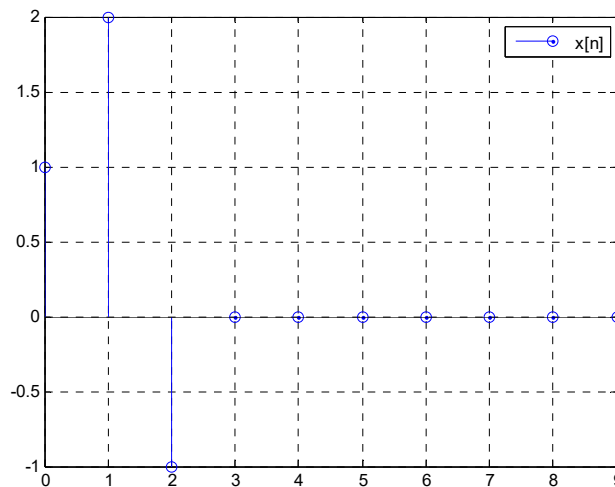
Решение

а) Диференчното уравнение се записва като

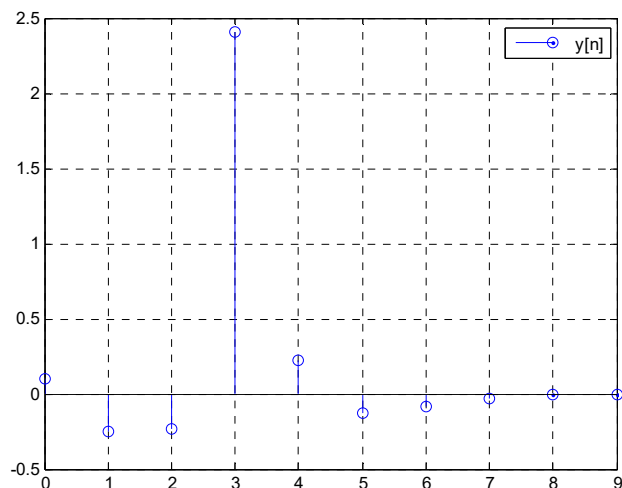
$$y[n] - 0.5y[n-1] + 0.1y[n-2] = 0.1x[n] - 0.5x[n-1] + x[n-2]$$

Оттук ние пишем в МАТЛАБ:

```
N=10;  
a=[1 -0.5 0.1];  
b=[0.1 -0.5 1];  
x=[1 2 -1 zeros(1,7)];  
stem(0:N-1,x);  
legend('x[n]'); grid  
y=filter(b,a,x);  
figure(2)  
stem(0:N-1,y);  
legend('y[n]'); grid
```



Фиг. 8.1 Входен сигнал $x[n] = [1, 2, -1, 0, \dots, 0]$, $0 \leq n \leq 10$

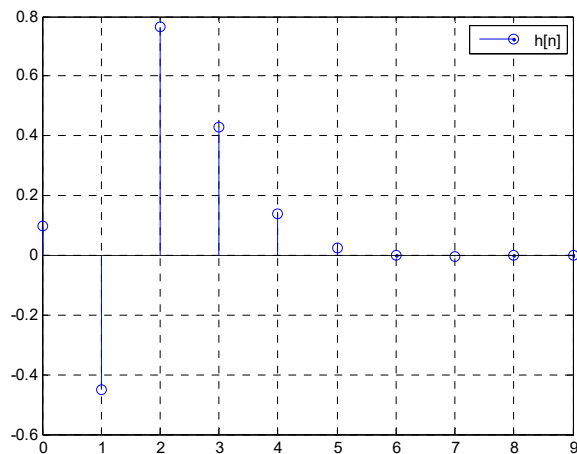


Фиг. 8.2 Изходен сигнал

б) Заменяме входния сигнал $x[n]$ с $\delta[n]$ в диапазона $0 \leq n \leq 9$.

Примерен резултат:

```
d=[1 zeros(1,N-1)];
y=filter(b,a,d);
figure(3)
stem(0:N-1,y);
legend('h[n] ');grid
```



Фиг. 8.3 Импулсен отклик на системата

Забележете, че импулсния отклик на системата, с краен импулсен отклик съвпада със стойностите на коефициентите b_k при $n = k$.

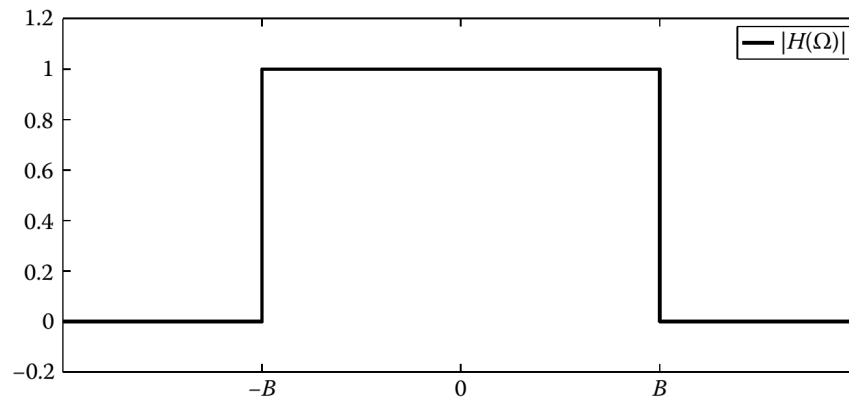
Решаване на диференчни уравнения с използването на Z-преобразуването

8.4. Идеален нискочестотен филтър

Идеалният нискочестотен филтър (НЧФ) трябва да пропуска без изменение (по амплитуда) честотите в диапазона честоти от $-B$ до B . При

това фазовата му характеристика не може да е константна и се изменя линейно в границите на лентата на пропускане.

$$|H(\Omega)| = \begin{cases} 1, & -B \leq \Omega \leq B \\ 0, & |\Omega| > B \end{cases}$$



Честотната реакция $H(\Omega)$ на този филтър се определя с помощта на непрекъснатото преобразуване на Фурие на изходния сигнал при подаване на импулсна делта функция на входа и е:

$$H(\Omega) = \begin{cases} e^{-j\Omega t_d}, & -B \leq \Omega \leq B \\ 0, & \Omega < -B \text{ and } \Omega > B, \end{cases} \quad (8.7)$$

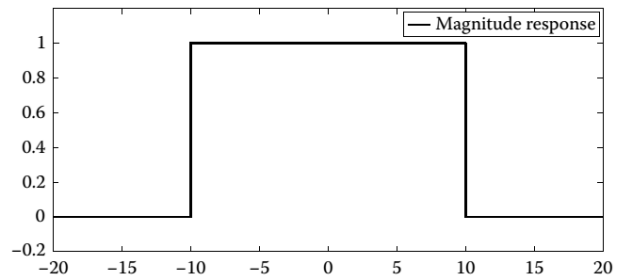
където B се нарича честота на среза, а t_d – времезакъснение (групово) $t_d = 1/2B$.

Пример: Да се определи честотната реакция (модул и фазов ъгъл) на идеален НЧФ с честота на среза $B=10$. Решение в Матлаб:

```

B= 10;
td=.05;
w1=-20:-B;
H1=zeros(size(w1));
w2=-B:B;
H2=exp(-j*w2*td);
w3=B:20;
H3=zeros(size(w3));
w=[w1 w2 w3];
H=[H1 H2 H3];
plot(w,abs(H));
ylim([-0.2 1.2]);
legend('Magnitude response');

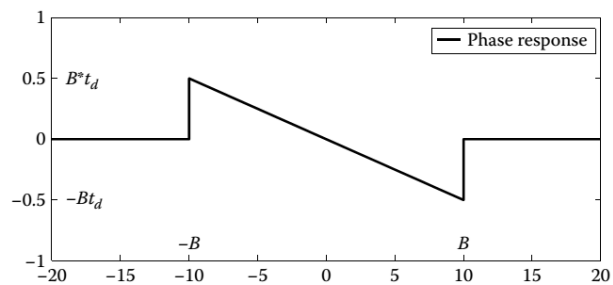
```



```

plot(w,angle(H));
ylim([-2*B*td 2*B*td]);
gtext('B*td')
gtext('-B*td')
gtext('B')
gtext('-B')
legend('Phase response');

```



```

syms t w
H=exp(-j*w*td)*(heaviside(w+B)-heaviside(w-B));

```

```

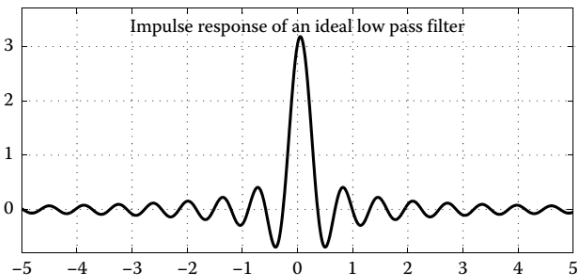
h=ifourier(H,t);
ezplot(h, [-5 5]);
ylim([-0.8 3.5]);

```

```

title('Impulse response of
an ideal low pass filter')
grid;

```



8.1 Честотен отклик при непрекъснато време

Системата е напълно определена от своя импулсен отклик $h(t)$. Откликът на системата $y(t)$ при входен сигнал $x(t)$ се изчислява чрез конволирането на импулсния отклик с входния сигнал; тоест, откликът на системата се дава от

$$y(t) = h(t) * x(t). \quad (8.1)$$

Прилагането на преобразуване на Фурие към двете страни води до

$$Y(\Omega) = H(\Omega)X(\Omega), \quad (8.2)$$

където

$X(\Omega)$ и $Y(\Omega)$ са Фурие преобразуванията съответно на входния и изходния сигнали;

$H(\Omega)$ се нарича честотен отклик и представлява Фурие преобразуването на импулсния отклик на системата.

Честотният отклик е пълно описание на система в честотната (периодичната) област. Математическият израз на честотния отклик пряко се изчислява от уравнение (8.2) като

$$H(\Omega) = F\{h(t)\} = \frac{Y(\Omega)}{X(\Omega)}. \quad (8.3)$$

Уравнение (8.3) ни дава прекрасна възможност за експериментално изследване на $H(\Omega)$ чрез измерване на амплитудно-фазовия спектър на изхода и входа.

Честотният отклик $H(\Omega)$ обикновено е комплексна функция, и затова понякога тя се обозначава като $H(j\Omega)$. Както всяка комплексна функция, $H(\Omega)$ може да бъде записана във вида

$$H(\Omega) = |H(\Omega)|e^{j\angle H(\Omega)}, \quad (8.4)$$

където

$|H(\Omega)|$ е модула на $H(\Omega)$ – амплитудно честотна характеристика (АЧХ);

$\angle H(\Omega)$ е фазата на $H(\Omega)$ – фазово честотна характеристика (ФЧХ).

Амплитудно честотната характеристика и фазово честотната характеристика показват зависимостта на амплитудата (модула) и фазата на честотния отклик $H(\Omega)$ на системата от честотата и често се изобразяват в логаритмичен мащаб на честотите. Понякога се използва и логаритмичен мащаб за амплитудата на $H(\Omega)$.

Фазови диаграми

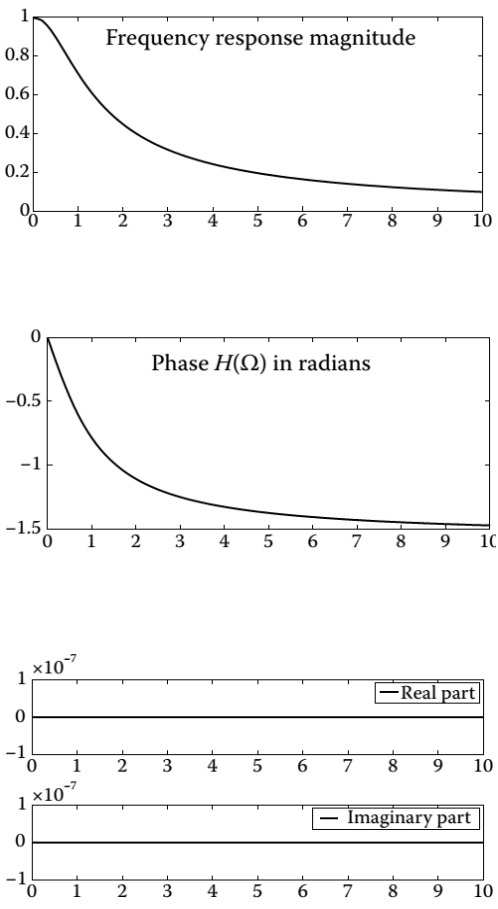
Диаграми на Смит

Боде диаграми

Диаграми нула-полюс

Пример 1

Да се определи честотния отклик $H(\Omega)$ на система, описана чрез импулсния си отклик $h(t) = e^{-2t}u(t)$. Да се изобразят модула и фазата на честотния отклик на системата за $0 \leq \Omega \leq 10$ rad/s. Да се провери уравнение (8.4).

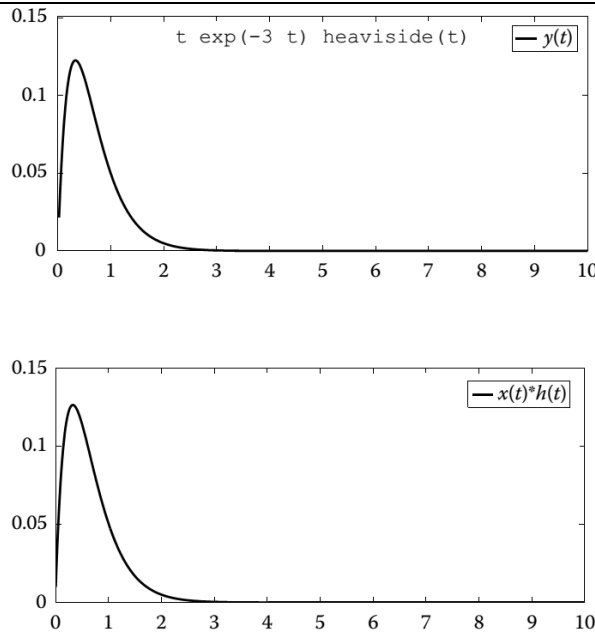
Матлаб код	Резултат
<pre> syms t w h=exp(-t)*heaviside(t) H=fourier(h,w) w1=0:.1:10; HH=subs(H,w,w1); plot(w1,abs(HH)); title('Frequency response magnitude') plot(w1,angle(HH)) title('phase H(\Omega) in radians') dif=HH-abs(HH).*exp(j*angle(HH)); subplot(211) plot(w1,real(dif)); ylim([-1e-7 1e-7]) legend('real part') subplot(212) plot(w1,imag(dif)); ylim([-1e-7 1e-7]) legend('imaginary part') </pre>	$h = \exp(-t) * \text{heaviside}(t)$ $H = 1 / (1 + i * w)$  Frequency response magnitude Phase $H(\Omega)$ in radians Real part Imaginary part

Пример 2

Откликът на системата при входен сигнал $x(t) = e^{-3t}u(t)$ е $y(t) = te^{-3t}u(t)$. Да се определят:

- Честотния отклик $H(j\Omega)$ на системата;
- Импульсния отклик $h(t)$ на системата. Да се провери резултата чрез изчисляване на конволюцията между $x(t)$ и $h(t)$.

Матлаб код	Резултат
<pre>syms t w x=exp(-3*t)*heaviside(t); y=t*exp(-3*t)*heaviside(t); X=fourier(x,w); Y=fourier(y,w); H=Y/X h=ifourier(H,t)</pre>	$H = 1/(3+i*w)$ $h = \exp(-3*t)*\text{heaviside}(t)$

Матлаб код	Резултат
<pre>syms t y=t*exp(-3*t)*heaviside(t); ezplot(y,[0 10]) legend('y(t)') ylim([0 0.15]) t=0:.01:5; x=exp(-3*t); h=x; y=conv(x,h)*.01; figure(2) plot(0:.01:10,y); legend('x(t)*h(t)') ylim([0 0.15])</pre>	

От уравнения (8.2) и (8.4), могат лесно да се извлекат следните две важни съотношения:

$$|Y(\Omega)| = |H(\Omega)||X(\Omega)| \quad (8.5)$$

и

$$\angle Y(\Omega) = \angle H(\Omega) + \angle X(\Omega). \quad (8.6)$$

На последно място, трябва да отбележим, че има книги, където честотния отклик се нарича предавателна функция. В тази книга, терминът предавателна функция се отнася единствено до преобразуването на Лаплас на импулсия отклик и е определена в пространството на s (комплексната честота), а термина честотен отклик се използва изключително когато говорим за преобразуване на Фурие на импулсия отклик на дадена система.

8.2 Матлаб команда freqs

Честотният отклик на система обикновено се изразява в рационална форма, т.е., се дава под формата

$$H(j\Omega) = \frac{B(j\Omega)}{A(j\Omega)} = \frac{b_n(j\Omega)^n + b_{n-1}(j\Omega)^{n-1} + \dots + b_1(j\Omega) + b_0}{a_m(j\Omega)^m + a_{m-1}(j\Omega)^{m-1} + \dots + a_1(j\Omega) + a_0}. \quad (8.7)$$

В този случай в MATLAB 1 има много лесен начин да се изчисли и се построи честотния отклик $H(\Omega)$ (означаван също като $H(j\Omega)$). Командата която изчислява и построява $H(j\Omega)$ е `freqs`. Синтаксисът и е `H=freqs(num,den,w)`, където `num` е вектора на коефициентите на полинома в числителя, `den` е съответния вектор за знаменателя, и `w` е вектора на честотите при които се оценява честотния отклик H .

Пример 1:

Да се изчертаят модула и фазата на честотния отклик

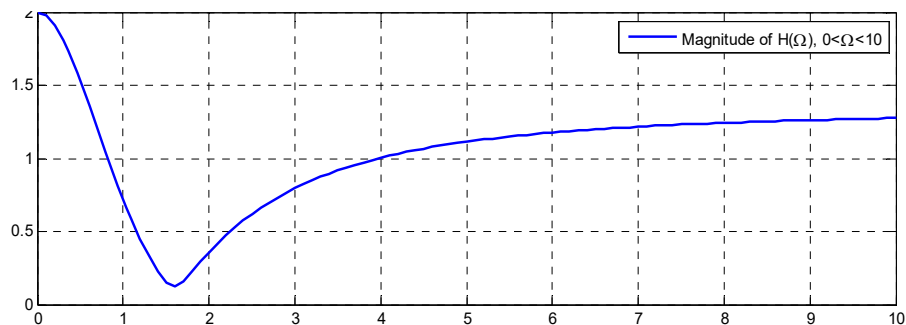
$$H(j\Omega) = \frac{B(j\Omega)}{A(j\Omega)} = \frac{8(j\Omega)^2 + 2(j\Omega) + 20}{6(j\Omega)^2 - 5(j\Omega) - 10}$$

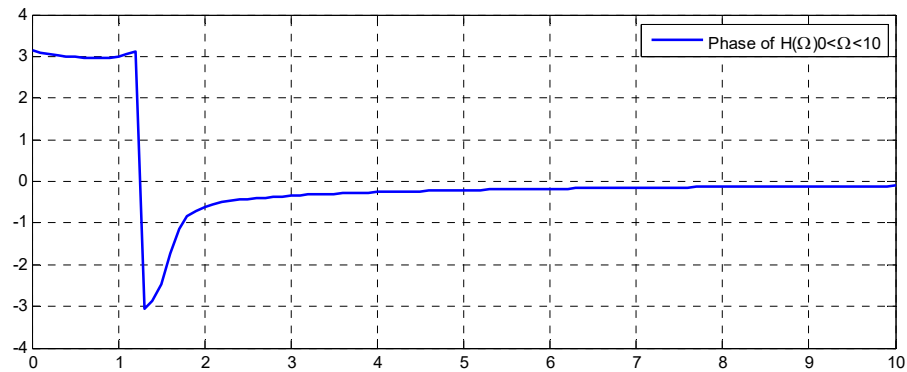
в честотния интервал $0 \leq \Omega \leq 10$ rad/s.

Матлаб код:

```
num=[8 2 20];  
den=[6 -5 -10];  
w=0:.1:10;  
H=freqs(num,den,w);  
plot(w,abs(H));  
legend('Magnitude of H(\Omega), 0<\Omega<10')  
grid  
  
plot(w,angle(H));  
legend('Phase of H(\Omega) 0<\Omega<10')  
grid
```

Резултат:



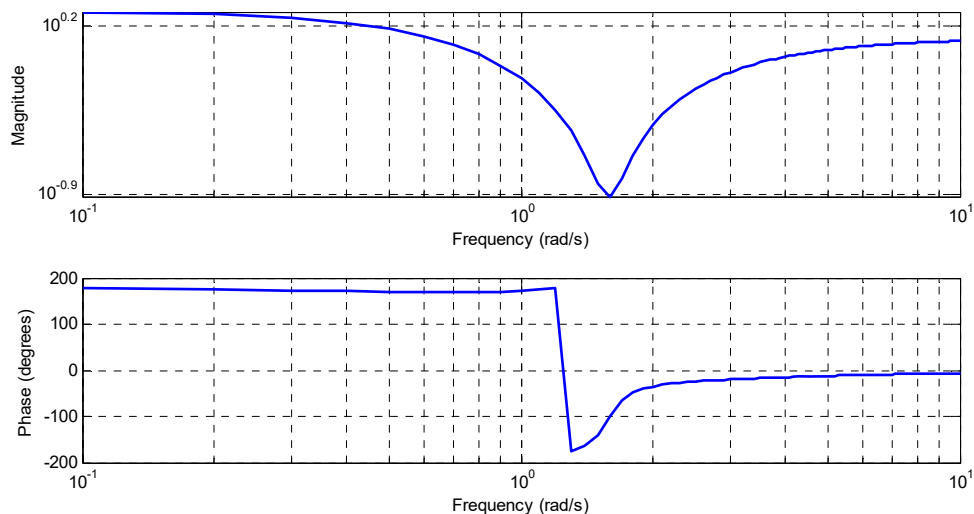


Съществува алтернативен синтаксис за `freqs` командата даден по-долу. Ако не е посочена изходна променлива, модула и фазата на $H(j\Omega)$ се построяват директно в една и съща фигура. Модулът се построява в dB, докато фазата се построява в градуси. Освен това, оста на честота е логаритмично мащабирана.

Матлаб код:

```
freqs(num,den,w);
```

Резултат:



Ако числителя и знаменателя на $H(j\Omega)$ не са зададени във формата на (8.7), то те трябва да се преобразуват.

Пример 2:

Да се изчертаят модула и фазата на честотния отклик

$$H(j\Omega) = \frac{\Omega^3 + \Omega^2 - 5\Omega + 1}{3\Omega^2 - 1}.$$

в честотния интервал $0 \leq \Omega \leq 20$ rad/s.

Решение: Първо преобразуваме $H(j\Omega)$ в съответната форма на (8.7) -

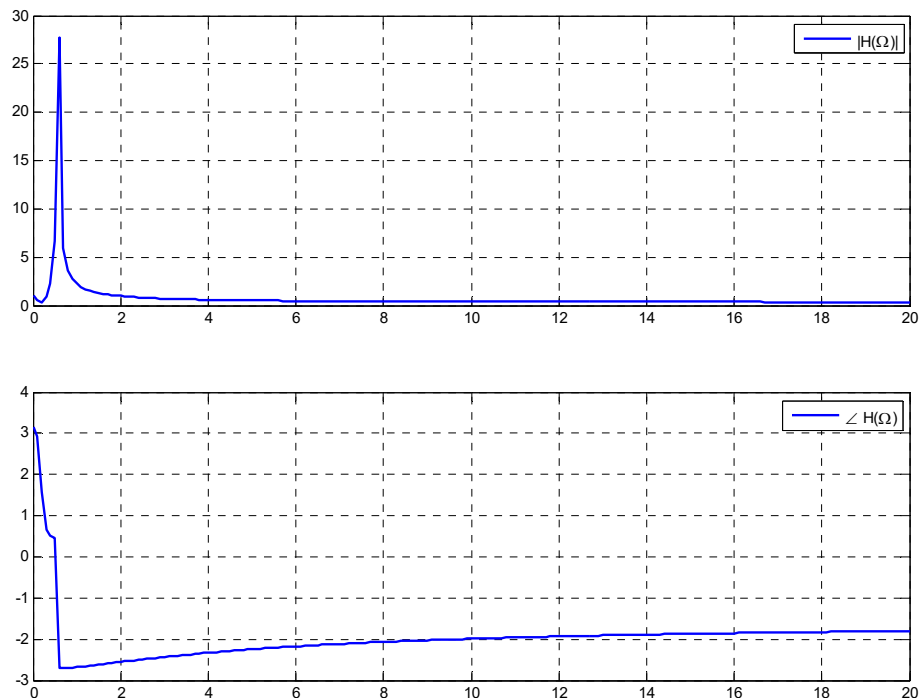
$$H(j\Omega) = \frac{\Omega^3 + \Omega^2 - 5\Omega + 1}{3\Omega^2 - 1} = \frac{1/j^3(j\Omega)^3 + 1/j^2(j\Omega)^2 - 5/j(j\Omega) + 1}{3/j^2(j\Omega)^2 + 0j\Omega - 1}.$$

Матлаб код:

```
num=[1/(1j^3) 1/(1j^2)-5/1j 1];
den=[3/(1j^2) 0 -1];
w=0:.1:20;
H=freqs(num,den,w);
plot(w,abs(H));
legend('jH(\Omega)j')
plot(w,angle(H));
legend('\angle H(\Omega)')
```

Резултат:

```
num=0+1.00i -1.00 0+5.00i 1.00
den=-3 0 -1
```



8.3 Команда invfreqs

Очевидно е, от името на командата, че `invfreqs` се използва за обратната операция на командата `freqs`. По-конкретно, векторът на честотния отклик H и съответния вектор на честотите ω сега са известни (т.е. са входните аргументи), а векторите на коефициентите на числителя и знаменателя на честотния отклик се изчисляват чрез командата `invfreqs`. Синтаксисът на командата е `[num,den]=invfreqs(H,w,N,M)`, където H е вектора честотния отклик, w е вектора на съответните честоти, а N и M задават реда на полиномите на числителя и знаменателя на честотния отклик $H(j\Omega)$. Изходни

аргументи `num` и `den` са изчислените коефициенти на полиномиите на честотния отклик $B(j\Omega)$ и $A(j\Omega)$ (числител и знаменател, съответно).

Пример 3

Система се описва от честотния си отклик

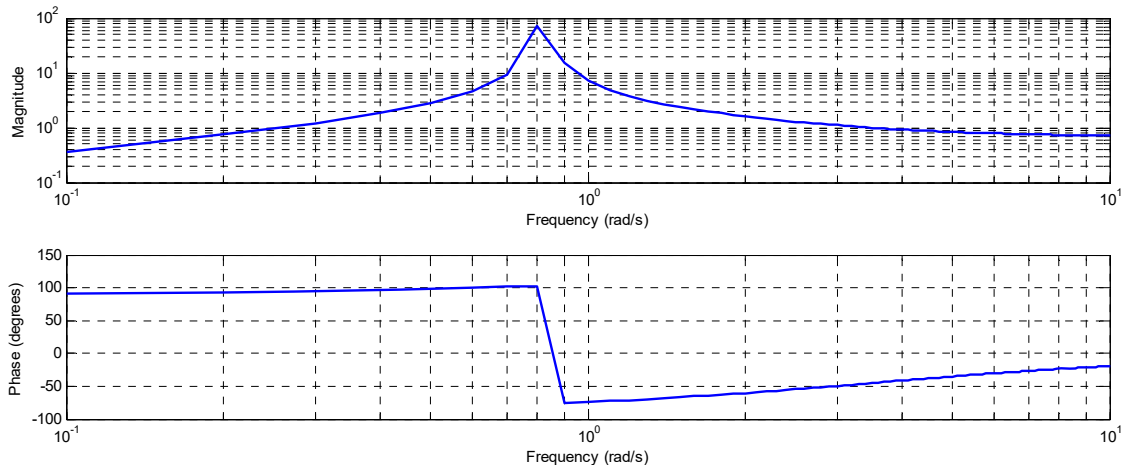
$$H(j\Omega) = \frac{-2\Omega^2 + 7j\Omega}{3(j\Omega)^2 + 2}.$$

Да се изчислят и се построят модула и фазата на $H(j\Omega)$, и да се потвърди резултата, като се използва командата `invfreqs`.

Матлаб код:

```
num=[-2/1j^2 7 0];
den=[3 0 2];
w=0:.1:10;
H=freqs(num,den,w);
freqs(num,den,w)
[num1,den1]=invfreqs(H,w,2,2)
```

Резултат:



```
num1=0.6667 2.3333 0.0000
den1=1.0000 -0.0000 0.6667
```

8.4 Времеви отклик на ЛИВ система при известен входен сигнал и честотен отклик. Команда `lsim`

Да се запознаем с един лесен начин за изчисляване на отклика на системата $y(t)$ при произволен входния сигнал $x(t)$, ако е известен честотния отклик на системата $H(j\Omega)$. За целта в Матлаб се използва командата `lsim`. Синтаксисът и е `y=lsim(num,den,x,t)`, където `num` е вектора на коефициентите на полинома на числителя на честотния отклик $H(j\Omega)$, `den` е съответния вектор за знаменателя на $H(j\Omega)$, `x` е входния сигнал, и `t` е времето, на прилагане на входния сигнал и изчисляване на изходния сигнал. Има три проблема, които биха могли да

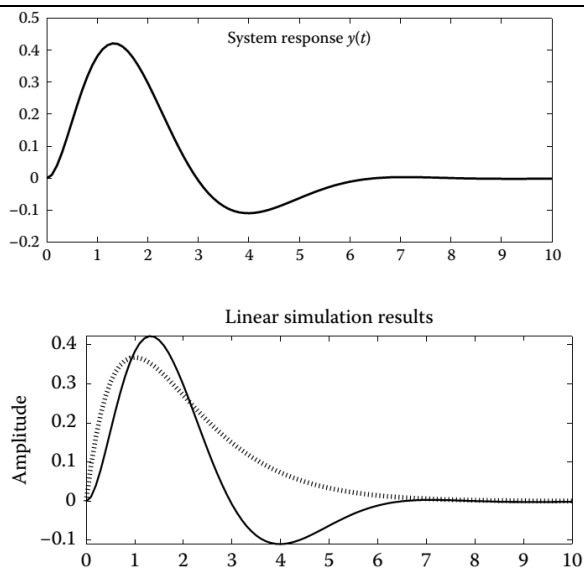
възникнат при използване на командата `lsim`. Първият е, че за разлика от командата `freqs` входните вектори `num` и `den` не могат да съдържат комплексни коефициенти. Решението е да се замени j^2 с -1 , когато е възможно. Вторият е, че реда на полинома на числителя трябва да бъде по-малък или равен на реда на полинома на знаменателя, а третия е, че при изчисляването на изходния сигнал възникват първоначални вариации за кратък период от време. И накрая, трябва да отбележим, че ако не се уточни изходния аргумент, например, ако използваме синтаксиса `lsim(num,den,x,t)` изхода на командата е графика на изходния сигнал $y(t)$ заедно с входния сигнал $x(t)$ в зададеното време t .

Пример

Системата се описва от честотния си отклик

$$H(j\Omega) = \frac{5j\Omega + 2}{2(j\Omega)^2 + 3j\Omega + 4}.$$

Да се изчисли и изобрази отклика $y(t)$ на системата при входен сигнал $x(t) = t e^{-t}$, $0 \leq t \leq 10$.

Матлаб код	Резултат
<pre>num = [5 2]; den = [2 3 4]; t = 0:0.1:10; x = t.*exp(-t); y = lsim(num,den,x,t); plot(t,y); title('System response y(t)') lsim(num,den,x,t);</pre>	

8.5. Реакция на филтър при синусоиден входен сигнал

Ще разгледаме този въпрос на базата на пример, като използваме НЧФ от предишния параграф 8.4. Да предположим, че системата (филтъра) се описва от честотния си отклик $H(\Omega)$. Реакцията на системата при входен сигнал $x(t) = A \cos(\Omega_0 t + \varphi)$ се дава от

$$y(t) = A|H(\Omega_0)| \cos(\Omega_0 t + \varphi + \angle H(\Omega_0)), \quad (8.8)$$

където:

$H(\Omega_0)$ е стойността на $H(\Omega)$ при честота $\Omega = \Omega_0$;

$|H(\Omega_0)|$, $\angle H(\Omega_0)$ са съответно модула и фазата на $H(\Omega_0)$.

Аналогично реакцията на системата при входен сигнал $x(t) = A \sin(\Omega_0 t + \varphi)$ се дава от

$$y(t) = A|H(\Omega_0)| \sin(\Omega_0 t + \varphi + \angle H(\Omega_0)) \quad (8.9)$$

Пример: Да се изчисли отклика $y(t)$ на идеален нискочестотен филтър с честотна лента на пропускане $B = 10 \text{ rad/s}$ при входен сигнал $x(t) = 3 \cos(4t + \pi/3) + 5 \sin(15t + \pi/4)$.

Честотата на съставката $5 \sin(15t + \pi/4)$ is $\Omega_0 = 15 \text{ rad/s}$, по този начин тази съставка ще бъдат отрязана от нискочестотния филтър с честотна лента $B = 10 \text{ rad/s}$. От друга страна, съставката $3 \cos(4t + \pi/3)$ се очаква да премине непроменена, тъй като нейната честота е $\Omega_0 = 4 \text{ rad/s}$. Следователно очакваният изходен сигнал е $y(t) = 3 \cos(4t + (\pi/3) + \theta)$. Да разгледаме два метода за определяне на изходния сигнал.

Първи метод: Първият подход е да се разгледа връзката, която определя реакцията на системата при синусоидален сигнал. Ето защо, след комбинирането на уравнения (8.8) и (8.9), реакцията $y(t)$ при синусоидален входен сигнал $x(t)$ се изчислява по формулата

$$y(t) = 3|H(4)| \cos\left(4t + \frac{\pi}{3} + \angle H(4)\right) + 5|H(15)| \sin\left(15t + \frac{\pi}{4} + \angle H(15)\right)$$

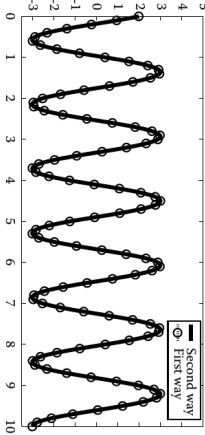
Изчисляваме в Матлаб:

Матлаб код	Резултат
<pre> B= 10; td= .05; syms w t H=exp(-j*w*td)*(heaviside(w+B)-heaviside(w-B)); w= 4; Hw0_1=eval(H) w=15; Hw0_2=eval(H) mag1=abs(Hw0_1) phas1=angle(Hw0_1) mag2=abs(Hw0_2) phas2=angle(Hw0_2) y=3*mag1*cos(4*t+pi/3+phas1)+5*mag2*sin(15*t+pi/4+phas2) </pre>	Определяме честотната реакция $H(\Omega)$ на идеален НЧФ с лента $B = 10 \text{ rad/s}$. Пресмятаме $H(\Omega)$ за честоти $\Omega_0 = 4$ и $\Omega_0 = 15$, получаваме: Hw0_1 = 0.9801 - 0.1987i Hw0_2 = 0 Изчисляваме $H(4)$, $\angle H(4)$, $H(15)$ и $\angle H(15)$. mag1 = 1 phas1 = -0.2000 mag2 = 0 phas2 = 0 Изчисляваме изходния сигнал по връзката на реакцията на системата на синусоидален сигнал, и получаваме очаквания резултат: $y = 3 \cos(4t + 1/3\pi - 1/5)$

Съставката $5 \sin(15t + \pi/4)$ е напълно елиминирана в изходния сигнал, а съставката $3 \cos(4t + \pi/3)$ преминава през филтъра почти непроменена, с изключение на добавения фазов ъгъл (времезакъснение). Тази $\theta = -\Omega_0 t_d = -4 \cdot 0.05 = -1/5 \text{ rad}$ промяна на фазата показва известно време-закъснение. В частност, изразът, който описва отклика (в лентата на пропускане) на идеалния филтър при синусоиден входен сигнал $x(t) = A \cos(\Omega_0 t)$ е

$$y(t) = A|H(\Omega_0)| \cos(\Omega_0(t - t_d))$$

Втори метод: Вторият подход се базира на уравнение (8.2), а именно, се основава на съотношението $Y(\Omega) = H(\Omega)X(\Omega)$. Следователно, процедурата е да се пресметне преобразуването на Фурие $X(\Omega)$ на входния сигнал $x(t)$, да се умножи с честотната характеристика $H(\Omega)$ за изчисляване на спектъра $Y(\Omega)$ на изходния сигнал и след това да се приложи обратно преобразуване на Фурие за получаване на отклика $y(t)$ на системата във времевата област.

Матлаб код	Резултат
<pre> B= 10; td=0.05; syms t w H=exp(-j*w*td)*(heaviside(w+B)-heaviside(w-B)); </pre>	
<pre> x=3*cos(4*t+pi/3)+5*sin(15*t+pi/4); X=fourier(x,w); Y=H*X; Y=simplify(Y); y=ifourier(Y,t) ezplot(y,[0 10]) t=0:.1:10 ya=3*cos(4*t+1/3*pi-1/5); hold on plot(t,ya,'o') legend('2nd way','1st way') ylim([-3.5 5]); hold off </pre>	 $y = \frac{3}{4} i \exp(4 i t) * (-1)^{(1/5/p1)} * 3^{(1/2)+3/4} * \exp(4 i t) * (-1)^{(-1/5/p1)} + \frac{3}{4} \exp(-4 i t) * (-1)^{(1/5/p1)} - \frac{3}{4} i \exp(-4 i t) * (-1)^{(1/5/p1)} * 3^{(1/2)}$

Глава 9

Преобразуване на Лаплас

Преобразуването на Лаплас е операция, която "преобразува" непрекъснат във времето сигнал от времевата област t в комплексната честотна област s , и е ценен инструмент в областта на обработката на сигнали.

9.1. Математично определение

Непрекъснатият във времето сигнал, описан във времевата област t е сигнал, зададен от функцията $f(t)$. Както вече бе споменато, преобразуването на Лаплас (ПЛ) описва сигнала в комплексната честотна област s (или s -област); т.е. сигналът се описва от функцията $F(s)$. Преобразуването на Лаплас се обозначава със символа $L\{. \}$; тоест, може да се напише

$$F(s) = L\{f(t)\}. \quad (9.1)$$

С други думи, ПЛ на функцията $f(t)$ е функция $F(s)$. Алтернативен начин за изписване на (9.1) е

$$f(t) \xrightarrow{L} F(s). \quad (9.2)$$

Съществуват две форми на ПЛ. Първата е двупосочно (или двустранно) ПЛ, където ПЛ $F(s)$ на функцията $f(t)$ се изчислява по формулата

$$F(s) = L\{f(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-st} dt. \quad (9.3)$$

Променливата s е комплексно число, и по този начин може да бъде записано като $s = \sigma + j\Omega$. Това съотношение разкрива връзката между ПЛ и ПФ. По-специално, заместването на s с $j\Omega$ в (9.3) дава преобразуването на Фурие $X(j\Omega)$ на $x(t)$. Задаването на долната граница на интеграла, равна на нула води до едностранно (или едностранно) ПЛ, което се описва от съотношението

$$F(s) = L\{f(t)\} = \int_0^{\infty} f(t)e^{-st} dt. \quad (9.4)$$

Използването на едностранно ПЛ е по-подходящо тогава, когато се разглеждат обусловени сигнали. За да се върнем от s -областта обратно към t -областта, се прилага обратното преобразуване на Лаплас (ОПЛ). Обратното преобразуване на Лаплас се означава със символа $L^{-1}\{. \}$; тоест, можем да запишем

$$f(t) = L^{-1}\{F(s)\}, \quad (9.5)$$

или алтернативно

$$F(s) \xrightarrow{L^{-1}} f(t). \quad (9.6)$$

Математическият израз, който описва ОПЛ на функцията $F(s)$ е

$$f(t) = L^{-1}\{F(s)\} = \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} F(s)e^{st} dt. \quad (9.7)$$

9.2. Матлаб команди `laplas` и `ilaplas`

Изчисляването на интегралите, дадени в (9.3), (9.4) и (9.7) може понякога да бъде доста трудно. Това е причината, за изчисляването на ПЛ и ОПЛ на функция (или сигнал) да се използват предварително определени двойки ПЛ-ОПЛ. Въпреки това, в Матлаб ПЛ $F(s)$ на функцията $f(t)$ се изчислява лесно чрез изпълнението на командата `laplas`. Нещо повече, ОПЛ на функцията $F(s)$ се получава чрез изпълнението на командата `ilaplas`. Преди да се използват тези две команди, е необходима декларацията на комплексната честота s и времето t , както символни променливи. Припомнете си, че за да се декларира символна променлива се използва командата `sims`. Накрая, трябва да се има предвид, че командата `laplas` изчислява едностранното ПЛ на функция.

Пример

- а) Да се изчисли (едностранно) ПЛ на функцията $f(t) = e^{-t}$
- б) Да се изчисли ОПЛ на функцията $F(s) = 1/(1 + s)$

Матлаб код	Резултат
<pre>syms t s t s f=exp(-t); laplace(f) %***** syms t s F=1/(1+s); ilaplace(F)</pre>	<pre>t=t s=s ans=1/(1+s) ans=exp(-t)</pre>

Освен това, има възможност за изразяване на функцията $F(s)$ на ОПЛ с различна променлива (например, n) като независима променлива. Освен това, опитът да се изрази ОПЛ на функцията $F(s)$ с помощта на променливата s , както независима променлива трябва да се избягва. И накрая, (а дори и да няма специална причина затова) променливата " s " може да се използва като независима променлива на функцията на ОПЛ, ако функцията се определи по отношение на друга променлива.

Пример

Да се изчисли ОПЛ на функцията $F(s) = 1/(s + 2)$, като функция на променливите n и s .

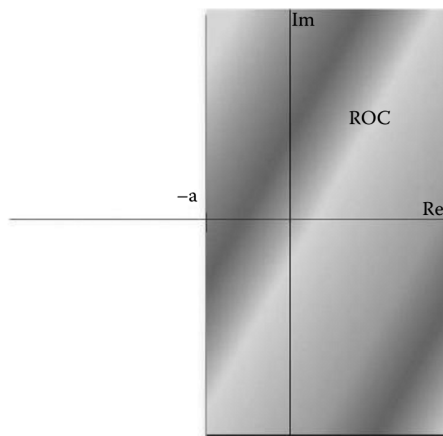
Матлаб код	Резултат
<pre>syms n F=1/(s+2) F=ilaplace(F,n) F=ilaplace(F,s) syms w F=1/(w+2); ilaplace(F,s)</pre>	<pre>F=exp(-2*n) ??? Error using ==> sym.maple.Error, (in invlaplace) Third parameter s must be free of second parameter s ans=exp(-2*s)</pre>

9.3. Област на сходимост на преобразуванието на Лаплас

ПЛ на функция не винаги съществува, тъй като интегралът от (9.3), не винаги се сходя. Да разгледаме, например, сигнала $x(t) = e^{-at}u(t)$, $a \in \mathbb{R}$. ПЛ $X(s)$ на сигнала $x(t)$ се дава от

$$X(s) = L\{x(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-st}dt = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-at}u(t)e^{-st}dt = \int_0^{\infty} e^{-(a+s)t}dt = -\frac{1}{s+a}(e^{-(a+s)t}|_{t \rightarrow \infty} - 1).$$

Припомнете си, че s е комплексна променлива, следователно съставката $e^{-(a+s)t}|_{t \rightarrow \infty}$ не става безкрайност, докато не стане $\operatorname{Re}\{s+a\} > 0$. Следователно, ПЛ на $x(t) = e^{-at}u(t)$, $a \in \mathbb{R}$ се сходя, докато $\operatorname{Re}\{s\} > -a$. Областта, която съответства на стойностите на $\operatorname{Re}\{s\} > -a$ се нарича **област на сходимост (ОС)**. ОС на ПЛ на функцията $x(t) = e^{-at}u(t)$, $a \in \mathbb{R}$ е изобразена на Фиг. 9.1.



Фигура 9.1 Област на сходимост на ПЛ на функцията $x(t) = e^{-at}u(t)$, $a \in \mathbb{R}$.

9.4. Двойки преобразувания на Лаплас

Както беше отбелязано по-рано изчисляването на интегралите, дадени в (9.3), (9.4) и (9.7) може понякога да бъде доста трудно. Това е причината, за изчисляването на ПЛ и ОПЛ на функция (или сигнал) да се използват предварително определени двойки ПЛ. По този начин, изчислителната процедура е да се изрази интересуващата на сложна функция по отношение на функции с

известни ПЛ (или ОПЛ), и след това на базата на свойствата на ПЛ (или ОПЛ) да се изчисли ПЛ (ОПЛ) на сложната функция. В таблицата по-долу, са дадени най-често срещаните двойки ПЛ. Изобразените двойки са потвърдени с помощта на команди `laplace` и `ilaplace`. Припомнете си, че командата `laplace` изчислява едностранното ПЛ ($t \geq 0$). По този начин, функцията за единично стъпаловидно въздействие (приложена в MATLAB с командата `heaviside`) може да се пропусне.

Таблица 9.1 Двойки преобразувания на Лаплас

Област-t	Област-s	Команди	Резултат
$x(t)$	$X(s)$	<code>syms s t a w</code>	—
$\delta(t)$	1	<code>laplace(dirac(t),s)</code>	<code>ans = 1</code>
$u(t)$	$1/s$	<code>u=heaviside(t); laplace(u,s)</code>	<code>ans = 1/s</code>
$\frac{d^n \delta(t)}{dt^n}$	s^n	<code>n=4 x=diff(dirac(t),n); X=laplace(x,s)</code>	<code>X = s^4</code>
$e^{-at}u(t)$	$1/(s+a)$	<code>u=heaviside(t); x=exp(-a*t)*u; laplace(x,s)</code>	<code>ans = 1/(s+a)</code>
$e^{+at}u(t)$	$1/(s-a)$	<code>ilaplace(1/(s-a),t)</code>	<code>ans = exp(a*t)</code>
$e^{j\omega_0 t}u(t)$	$1/(s-j\omega_0)$	<code>laplace(exp(j*w*t),s)</code>	<code>ans = 1/(s-i*w)</code>
$\cos(\omega_0 t)u(t)$	$s/(s^2 + \omega_0^2)$	<code>X = s/(s^2+w^2); x=ilaplace(X)</code>	<code>x = cos(w*t)</code>
$\sin(\omega_0 t)u(t)$	$\omega_0/(s^2 + \omega_0^2)$	<code>x=sin(w*t); X=laplace(x)</code>	<code>X = w/(s^2+w^2)</code>
$e^{-at} \cos(\omega_0 t)u(t)$	$(s+a)/((s+a)^2 + \omega_0^2)$	<code>x=exp(-a*t)*cos(w*t); laplace(x,s)</code>	<code>ans = (s+a)/((s+a)^2+w^2)</code>
$e^{-at} \sin(\omega_0 t)u(t)$	$\omega_0/((s+a)^2 + \omega_0^2)$	<code>X=w/((s+a)^2+w^2); x=ilaplace(X,t)</code>	<code>x = exp(-a*t)*sin(w*t)</code>
$t^n u(t)$	$n!/s^{n+1}$	<code>x=(t^5)*heaviside(t); laplace(x,t,s)</code>	<code>ans = 120/s^6 % n = 5</code>
$e^{-at} t^n u(t)$	$n!/(s+a)^{n+1}$	<code>X=factorial(10)/ (s+a)^11; ilaplace(X,t)</code>	<code>ans = t^10 *exp(-a*t) % n = 10</code>
$t \cos(\omega_0 t)u(t)$	$(s^2 - \omega_0^2)/(s^2 + \omega_0^2)^2$	<code>x=t*cos(w*t); laplace(x,t,s)</code>	<code>ans = 1/(s^2+w^2) ^2*(s^2-w^2)</code>
$(t^{n-1}/(n-1))e^{-at}u(t)$	$1/(s+a)^n$	<code>X=1/(s+a)^6; x=ilaplace(X,t)</code>	<code>x = 1/120*t^5 *exp(-a*t) % n = 6</code>

9.5. Свойства на преобразуването на Лаплас

В този раздел ще разгледаме основните свойства на ПЛ. Всяко свойство се проверява с помощта на подходящ пример.

9.5.1. Линеиност Нека $X_1(s)=L\{x_1(t)\}$ и $X_2(s)=L\{x_2(t)\}$. Тогава за всяка скаларна величина a_1, a_2 важи следното свойство:

$$L\{a_1x_1(t) + a_2x_2(t)\} = a_1X_1(s) + a_2X_2(s). \quad (9.8)$$

Проверка:

Матлаб код	Резултат
<pre>syms t s x1=exp(-t); x2=cos(t); a1=3; a2=4; Le=a1*x1+a2*x2; Left=laplace(Le,s) X1=laplace(x1); X2=laplace(x2); Right=a1*X1+a2*X2</pre>	<pre>Left=3/(1+s)+4*s/(s^2+1) Right=3/(1+s)+4*s/(s^2+1)</pre>

9.5.2. Отместване във времето Нека $X(s)=L\{x(t) u(t)\}$. Тогава за всяко $t_0 > 0$ важи следното свойство:

$$L\{x(t - t_0)u(t - t_0)\} = e^{-st_0} X(s). \quad (9.9)$$

Проверка:

Матлаб код	Резултат
<pre>syms t s t0=2; Le=cos(t-t0)*heaviside(t-t0); Left= simplify(laplace(Le)) X=laplace(cos(t),s); Right=exp(-s*t0)*X</pre>	<pre>Left= (s*exp(-2*s))/(s^2+1) Right= (s*exp(-2*s))/(s^2+1)</pre>

9.5.3. Отместване на комплексната честота Нека $X(s)=L\{x(t) u(t)\}$. Тогава за всяко $s_0 > 0$ важи следното свойство:

$$L\{x(t)e^{s_0t}\} = X(s - s_0). \quad (9.10)$$

Проверка:

Матлаб код	Резултат
<pre>x=t^3; s0=2; f=x*exp(s0*t); L=laplace(f,s) X=laplace(x,s); R=subs(X,s,s-2)</pre>	<pre>L=6/(s-2)^4 R=6/(s-2)^4</pre>

9.5.4. Мащабиране във времето Нека $X1(s)=L\{x(t)\}$. Тогава за всяко $b > 0$ важи следното свойство:

$$L\{x(bt)\} = \frac{1}{b} X\left(\frac{s}{b}\right). \quad (9.11)$$

Проверка:

Матлаб код	Резултат
<pre>syms b le=exp(-b*2*t); L=laplace(le,s) x=exp(-2*t); X=laplace(x,s) R=(1/b)*subs(X,s,s/b) simplify(R)</pre>	<pre>L=1/(s+2*b) X=1/(s+2) R=1/b/(s/b+2) ans=1/(s+2*b)</pre>

9.5.5. Диференциране в честотната област Нека $X(s)=L\{x(t)\}$. Тогава за всяко цяло число $n > 0$ ($n = 1,2,\dots$) важи следното свойство:

$$L\{(-t)^n x(t)\} = \frac{d^n X(s)}{ds^n}. \quad (9.12)$$

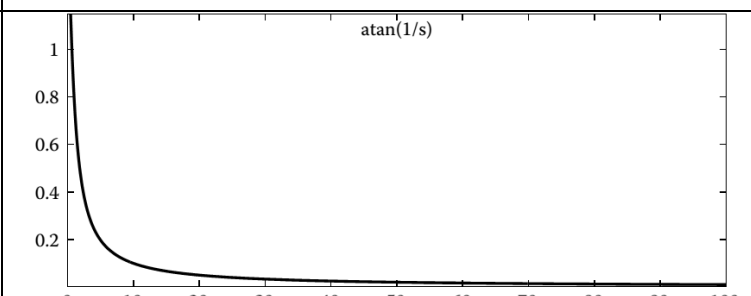
Проверка:

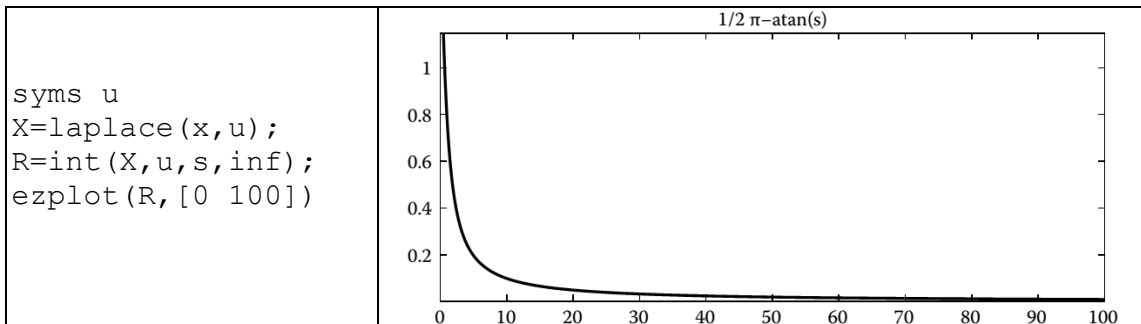
Матлаб код	Резултат
<pre>x=exp(t); f=(-t)^5*x; L=laplace(f,s) X=laplace(x,s); R=diff(X,5)</pre>	<pre>L=-120/(s-1)^6 R=-120/(s-1)^6</pre>

9.5.6. Интегриране в честотната област Нека $X1(s)=L\{x(t)\}$. Тогава важи следното свойство:

$$L\left\{\frac{x(t)}{t}\right\} = \int_s^{\infty} X(u)du. \quad (9.13)$$

Проверка:

Матлаб код	Резултат
<pre>x=sin(t); L=laplace(x/t,s); ezplot(L,[0 100])</pre>	



9.5.7. Диференциране във времевата област Нека $X(s)=L\{x(t)\}$. Тогава важи следното свойство:

$$L\left\{\frac{dx(t)}{dt}\right\} = sX(s) - x(0). \quad (9.14)$$

За по-висок порядък диференциация важи следната зависимост:

$$L\left\{\frac{d^n x(t)}{dt^n}\right\} = sL\left\{\frac{d^{n-1}x(t)}{dt^{n-1}}\right\} - x^{(n)}(0). \quad (9.15)$$

Проверка с използване на сигнала $x(t)=\cos(t)u(t)$:

Матлаб код	Резултат
<pre>x=cos(t); L=diff(x,t); laplace(L,s); X=laplace(x,s); x0=1; R=s*X-x0; simplify(R)</pre>	<pre>ans=-1/(s^2+1) ans=-1/(s^2+1)</pre>

9.5.8. Интегриране във времевата област Нека $X(s)=L\{x(t)\}$. Тогава важи следното свойство:

$$L\left\{\int_{-\infty}^t x(r)dr\right\} = \frac{X(s)}{s} + \frac{\int_{-\infty}^0 x(r)dr}{s}. \quad (9.16)$$

Проверка чрез разглеждане на сигнала $x(t)=e^{3t}u(t)$:

Матлаб код	Резултат
<pre>syms r x=exp(3*r); le=int(x,r,-inf,t); L=laplace(le,s); X=laplace(x,s); xr=int(x,r,-inf,0) R=X/s+xr/s simplify(R)</pre>	<pre>L=1/3/(s-3) ans=1/3/(s-3)</pre>

9.5.9. Теорема за началното условие Нека $X(s)=L\{x(t)\}$. Тогава важи следната теорема:

$$\lim_{s \rightarrow \infty} sX(s) = x(0). \quad (9.17)$$

Проверка чрез разглеждане на сигнала $x(t)=\sin(t)u(t)$:

Матлаб код	Резултат
<pre>x=sin(t); X=laplace(x,s); limit(s*X,s,inf)</pre>	ans=0

9.5.10. Теорема за крайното условие Нека $X(s)=L\{x(t)\}$. Тогава важи следната теорема:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sX(s). \quad (9.18)$$

Проверка при сигнал $x(t)=(1 - e^{-t})u(t)$:

Матлаб код	Резултат
<pre>x=1-exp(-t); limit(x,t,inf) X=laplace(x,s); limit(s*X,s,0)</pre>	ans=1 ans=1

1. Разлагане в елементарни дроби
2. Приложение на преобразуване на Лаплас за решаване на диференциални уравнения
3. Преобразуване на описанията
4. Пространство на Състоянието
5. Преобразуване на Хависайд
6. Уейвлет преобразуване
7. Корелация Автокорелация
8. Резидиуми
9. Енергиен спектър; Предаване на данни и видове модуляции (амплитудна, честотна, амплитудно-импулсна, фазо-импулсна);

ШУМЕНСКИ УНИВЕРСИТЕТ "ЕПИСКОП КОНСТАНТИН ПРЕСЛАВСКИ"

К О Н С П Е К Т

за формиране на текуща оценка по "Теория на сигналите и системите" за специалност
"РАДИОКОМУНИКАЦИОННА ТЕХНИКА И ТЕХНОЛОГИИ"

1. Класификация на сигналите. Математически модели на сигналите.
2. Понятие за ортогонални функции. Апроксимация на сигналите с ортогонални функции.

3. Основни понятия и свойства на системите. Методи за анализ и синтез.
4. Системи, които се описват с линейни диференциални уравнения с постоянни коефициенти.
5. Системи, които се описват с диференчни уравнения с постоянни коефициенти. Представяне на системи чрез блокови схеми.
6. Хармоничен анализ на периодичен сигнал. Основни количествени съотношения.
7. Комплексна форма на реда на Фурие. Апроксимация на непериодичен сигнал с ред на Фурие.
8. Общи сведения за сигналите и спектрите. Видове спектри. Ширина на честотния спектър.
9. Свойства на спектрите. Методи за определяне на спектрите.
10. Същност на преобразуването на Лаплас. Свойства на преобразуването.
11. Приложение на преобразуването на Лаплас за намиране на изходната реакция на линейни инвариантни във времето системи.
12. Автокорелационна функция на детерминирани сигнали. Основни количествени съотношения.
13. Автокорелационна функция на периодична поредица с кратна продължителност. Автокорелационна функция на периодичен сигнал. Взаимно-корелационна функция на детерминирани сигнали.
14. Общи сведения и основни зависимости при амплитудно модулираните сигнали.
15. Мощност на амплитудно модулираните сигнали (АМС). Спектър на АМС.
16. Основни зависимости при честотно модулирани сигнали.
17. Основни зависимости при фазово модулирани сигнали. Спектър на ъглово модулирани сигнали.
18. Теорема на Котелников. Основни количествени съотношения.
19. Импулсно кодова модулация. Делта модулация.
20. Структурна схема за цифрова обработка на сигнали. Преобразуване на непрекъснати сигнали в дискретни. Основни сведения.
21. Общи сведения за импулсната модулация на сигналите (ИМС). Амплитудно ИМС. Широчинно ИМС. Време ИМС.
22. Описание на случайните сигнали. Основни сведения от теорията на едномерните случайни сигнали.
23. Критерии за оптимално откриване и различаване на сигналите. Постановка на задачата. Критерий на Нейман-Пирсън. Критерий на идеалния и последователен наблюдател.
24. Основни зависимости при съгласуваната филтрация. Схеми на съгласувани филтри за различни видове сигнали.

Таблица-А1- Преобразување-на-Фурие-на-някои-функции

$x(t)$	$X(f)$	$X(\omega)$
$\delta(t)$	1	1
1	$\delta(f)$	$2\pi\delta(\omega)$
$\delta(t - t_0)$	$e^{-j2\pi ft_0}$	$e^{-j\omega t_0}$
$e^{j2\pi f_0 t}$	$\delta(f - f_0)$	$2\pi\delta(\omega - \omega_0)$
$\cos(2\pi f_0 t)$	$\frac{1}{2}[\delta(f - f_0) + \delta(f + f_0)]$	$\pi[\delta(\omega - \omega_0) + \delta(\omega + \omega_0)]$
$\sin(2\pi f_0 t)$	$\frac{1}{2j}[\delta(f - f_0) - \delta(f + f_0)]$	$-j\pi[\delta(\omega - \omega_0) - \delta(\omega + \omega_0)]$
$rect(t)$	$\text{sinc}(f)$	$\text{sinc}\left(\frac{\omega}{2\pi}\right)$
$\text{sinc}(t)$	$rect(f)$	$rect\left(\frac{\omega}{2\pi}\right)$
$\Lambda(t)$	$\text{sinc}^2(f)$	$\text{sinc}^2\left(\frac{\omega}{2\pi}\right)$
$\text{sinc}^2(t)$	$\Lambda(f)$	$\Lambda\left(\frac{\omega}{2\pi}\right)$
$e^{-\alpha t}u(t), \alpha > 0$	$\frac{1}{\alpha + j2\pi f}$	$\frac{1}{\alpha + j\omega}$
$te^{-\alpha t}u(t), \alpha > 0$	$\frac{1}{(\alpha + j2\pi f)^2}$	$\frac{1}{(\alpha + j\omega)^2}$
$e^{-\alpha t }, \alpha > 0$	$\frac{2\alpha}{(\alpha^2 + (2\pi f)^2)}$	$\frac{2\alpha}{(\alpha^2 + \omega^2)}$
$e^{-\pi t^2}$	$e^{-\alpha f^2}$	$e^{-\alpha f^2}$
$\text{sgn}(t)$	$\frac{1}{j\pi f}$	$\frac{2}{j\omega}$
$u(t)$	$\frac{1}{2}\delta(f) + \frac{1}{j2\pi f}$	$\pi\delta(\omega) + \frac{1}{j\omega}$
$\frac{d}{dt}\delta(t)$	$j2\pi f$	$j\omega$
$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT_0)$	$\frac{1}{T_0} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta\left(f - \frac{n}{T_0}\right)$	$\frac{1}{T_0} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta\left(\omega - \frac{2\pi n}{T_0}\right)$

Table 3.1

Short Table of Fourier Transforms

	$g(t)$	$G(\omega)$	
1	$e^{-at}u(t)$	$\frac{1}{a + j\omega}$	$a > 0$
2	$e^{at}u(-t)$	$\frac{1}{a - j\omega}$	$a > 0$
3	$e^{-a t }$	$\frac{2a}{a^2 + \omega^2}$	$a > 0$
4	$te^{-at}u(t)$	$\frac{1}{(a + j\omega)^2}$	$a > 0$
5	$t^n e^{-at}u(t)$	$\frac{n!}{(a + j\omega)^{n+1}}$	$a > 0$
6	$\delta(t)$	1	
7	1	$2\pi\delta(\omega)$	
8	$e^{j\omega_0 t}$	$2\pi\delta(\omega - \omega_0)$	
9	$\cos \omega_0 t$	$\pi[\delta(\omega - \omega_0) + \delta(\omega + \omega_0)]$	
10	$\sin \omega_0 t$	$j\pi[\delta(\omega + \omega_0) - \delta(\omega - \omega_0)]$	
11	$u(t)$	$\pi\delta(\omega) + \frac{1}{j\omega}$	
12	$\text{sgn } t$	$\frac{2}{j\omega}$	
13	$\cos \omega_0 t u(t)$	$\frac{\pi}{2}[\delta(\omega - \omega_0) + \delta(\omega + \omega_0)] + \frac{j\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}$	
14	$\sin \omega_0 t u(t)$	$\frac{\pi}{2j}[\delta(\omega - \omega_0) - \delta(\omega + \omega_0)] + \frac{\omega_0}{\omega_0^2 - \omega^2}$	
15	$e^{-at} \sin \omega_0 t u(t)$	$\frac{\omega_0}{(a + j\omega)^2 + \omega_0^2}$	$a > 0$
16	$e^{-at} \cos \omega_0 t u(t)$	$\frac{a + j\omega}{(a + j\omega)^2 + \omega_0^2}$	$a > 0$
17	$\text{rect}\left(\frac{t}{\tau}\right)$	$\tau \text{sinc}\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)$	
18	$\frac{W}{\pi} \text{sinc}(Wt)$	$\text{rect}\left(\frac{\omega}{2W}\right)$	
19	$\Delta\left(\frac{t}{\tau}\right)$	$\frac{\tau}{2} \text{sinc}^2\left(\frac{\omega\tau}{4}\right)$	
20	$\frac{W}{2\pi} \text{sinc}^2\left(\frac{Wt}{2}\right)$	$\Delta\left(\frac{\omega}{2W}\right)$	
21	$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT)$	$\omega_0 \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - n\omega_0)$	$\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$
22	$e^{-t^2/2\sigma^2}$	$\sigma\sqrt{2\pi}e^{-\sigma^2\omega^2/2}$	

Table-of-Laplace-and-Z-transforms

	$X(s)$	$x(t)$	$x(kT)$ or $x(k)$	$X(z)$
1.	—	—	Kronecker delta $\delta_0(k)$ 1 $k = 0$ 0 $k \neq 0$	1
2.	—	—	$\delta_0(n-k)$ 1 $n = k$ 0 $n \neq k$	z^{-k}
3.	$\frac{1}{s}$	$1(t)$	$1(k)$	$\frac{1}{1-z^{-1}}$
4.	$\frac{1}{s+a}$	e^{-at}	e^{-akT}	$\frac{1}{1-e^{-aT}z^{-1}}$
5.	$\frac{1}{s^2}$	t	kT	$\frac{Tz^{-1}}{(1-z^{-1})^2}$
6.	$\frac{2}{s^3}$	t^2	$(kT)^2$	$\frac{T^2 z^{-1}(1+z^{-1})}{(1-z^{-1})^3}$
7.	$\frac{6}{s^4}$	t^3	$(kT)^3$	$\frac{T^3 z^{-1}(1+4z^{-1}+z^{-2})}{(1-z^{-1})^4}$
8.	$\frac{a}{s(s+a)}$	$1 - e^{-at}$	$1 - e^{-akT}$	$\frac{(1-e^{-aT})z^{-1}}{(1-z^{-1})(1-e^{-aT}z^{-1})}$
9.	$\frac{b-a}{(s+a)(s+b)}$	$e^{-at} - e^{-bt}$	$e^{-akT} - e^{-bkT}$	$\frac{(e^{-aT} - e^{-bT})z^{-1}}{(1-e^{-aT}z^{-1})(1-e^{-bT}z^{-1})}$
10.	$\frac{1}{(s+a)^2}$	te^{-at}	kTe^{-akT}	$\frac{Te^{-aT}z^{-1}}{(1-e^{-aT}z^{-1})^2}$
11.	$\frac{s}{(s+a)^2}$	$(1-at)e^{-at}$	$(1-akT)e^{-akT}$	$\frac{1-(1+aT)e^{-aT}z^{-1}}{(1-e^{-aT}z^{-1})^2}$
12.	$\frac{2}{(s+a)^3}$	$t^2 e^{-at}$	$(kT)^2 e^{-akT}$	$\frac{T^2 e^{-aT}(1+e^{-aT}z^{-1})z^{-1}}{(1-e^{-aT}z^{-1})^3}$
13.	$\frac{a^2}{s^2(s+a)}$	$at - 1 + e^{-at}$	$akT - 1 + e^{-akT}$	$\frac{[(aT-1+e^{-aT})+(1-e^{-aT}-aTe^{-aT})z^{-1}]z^{-1}}{(1-z^{-1})^2(1-e^{-aT}z^{-1})}$
14.	$\frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$	$\sin \omega t$	$\sin \omega kT$	$\frac{z^{-1} \sin \omega T}{1-2z^{-1} \cos \omega T + z^{-2}}$
15.	$\frac{s}{s^2 + \omega^2}$	$\cos \omega t$	$\cos \omega kT$	$\frac{1-z^{-1} \cos \omega T}{1-2z^{-1} \cos \omega T + z^{-2}}$
16.	$\frac{\omega}{(s+a)^2 + \omega^2}$	$e^{-at} \sin \omega t$	$e^{-akT} \sin \omega kT$	$\frac{e^{-aT} z^{-1} \sin \omega T}{1-2e^{-aT} z^{-1} \cos \omega T + e^{-2aT} z^{-2}}$
17.	$\frac{s+a}{(s+a)^2 + \omega^2}$	$e^{-at} \cos \omega t$	$e^{-akT} \cos \omega kT$	$\frac{1-e^{-aT} z^{-1} \cos \omega T}{1-2e^{-aT} z^{-1} \cos \omega T + e^{-2aT} z^{-2}}$
18.	—	—	a^k	$\frac{1}{1-az^{-1}}$
19.	—	—	a^{k-l} $k = 1, 2, 3, \dots$	$\frac{z^{-1}}{1-az^{-1}}$
20.	—	—	ka^{k-l}	$\frac{z^{-1}}{(1-az^{-1})^2}$
21.	—	—	$k^2 a^{k-l}$	$\frac{z^{-1}(1+az^{-1})}{(1-az^{-1})^3}$
22.	—	—	$k^3 a^{k-l}$	$\frac{z^{-1}(1+4az^{-1}+a^2 z^{-2})}{(1-az^{-1})^4}$
23.	—	—	$k^4 a^{k-l}$	$\frac{z^{-1}(1+11az^{-1}+11a^2 z^{-2}+a^3 z^{-3})}{(1-az^{-1})^5}$
24.	—	—	$a^k \cos k\pi$	$\frac{1}{1+az^{-1}}$

$$x(t) = 0 \quad \text{for } t < 0$$

$$x(kT) = x(k) = 0 \quad \text{for } k < 0$$

Unless otherwise noted, $k = 0, 1, 2, 3, \dots$

Important-properties-and-theorems-of-theZ-transform-

	$x(t)$ or $x(k)$	$Z\{x(t)\}$ or $Z\{x(k)\}$
1.	$ax(t)$	$aX(z)$
2.	$ax_1(t) + bx_2(t)$	$aX_1(z) + bX_2(z)$
3.	$x(t+T)$ or $x(k+1)$	$zX(z) - zx(0)$
4.	$x(t+2T)$	$z^2X(z) - z^2x(0) - zx(T)$
5.	$x(k+2)$	$z^2X(z) - z^2x(0) - zx(1)$
6.	$x(t+kT)$	$z^kX(z) - z^kx(0) - z^{k-1}x(T) - \dots - zx(kT-T)$
7.	$x(t-kT)$	$z^{-k}X(z)$
8.	$x(n+k)$	$z^kX(z) - z^kx(0) - z^{k-1}x(1) - \dots - zx(k-1)$
9.	$x(n-k)$	$z^{-k}X(z)$
10.	$tx(t)$	$-Tz \frac{d}{dz} X(z)$
11.	$kx(k)$	$-z \frac{d}{dz} X(z)$
12.	$e^{-at}x(t)$	$X(ze^{aT})$
13.	$e^{-ak}x(k)$	$X(ze^a)$
14.	$a^kx(k)$	$X\left(\frac{z}{a}\right)$
15.	$ka^kx(k)$	$-z \frac{d}{dz} X\left(\frac{z}{a}\right)$
16.	$x(0)$	$\lim_{z \rightarrow \infty} X(z)$ if the limit exists
17.	$x(\infty)$	$\lim_{z \rightarrow 1} \left[(1-z^{-1})X(z) \right]$ if $(1-z^{-1})X(z)$ is analytic on and outside the unit circle
18.	$\nabla x(k) = x(k) - x(k-1)$	$(1-z^{-1})X(z)$
19.	$\Delta x(k) = x(k+1) - x(k)$	$(z-1)X(z) - zx(0)$
20.	$\sum_{k=0}^n x(k)$	$\frac{1}{1-z^{-1}} X(z)$
21.	$\frac{\partial}{\partial a} x(t, a)$	$\frac{\partial}{\partial a} X(z, a)$
22.	$k^m x(k)$	$\left(-z \frac{d}{dz} \right)^m X(z)$
23.	$\sum_{k=0}^n x(kT)y(nT-kT)$	$X(z)Y(z)$
24.	$\sum_{k=0}^{\infty} x(k)$	$X(1)$

Съкращения:

ЛИВ---линейна,-инвариантна-във-времето-(линейна-стационарна);

РФ---ред-на-Фурие;

ДВ---дискретно-време;

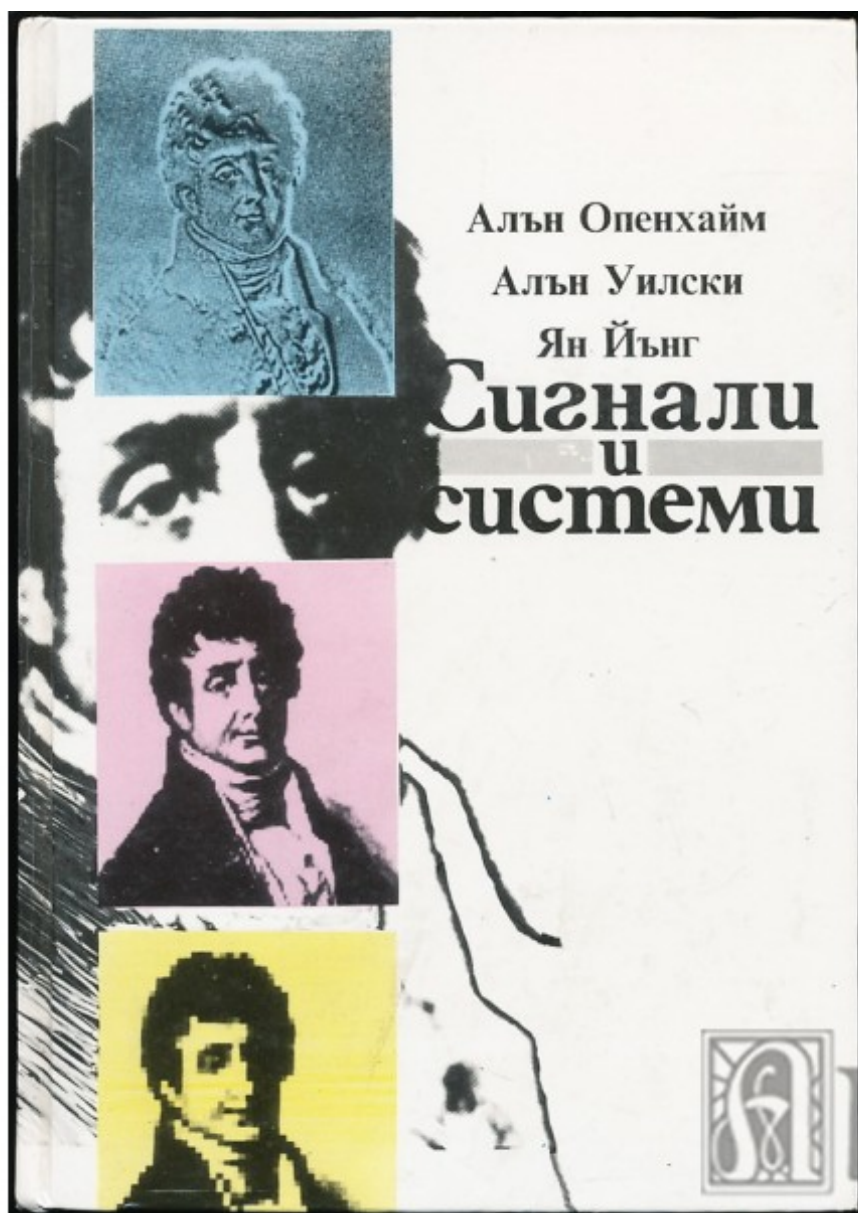
НВ---непрекъснато-време;

НПФ---непрекъснато--преобразуване-на-Фурие;

ДПФ---дискретно--преобразуване-на-Фурие;

-

ИЗПОЛЗВАНА-ЛИТЕРАТУРА



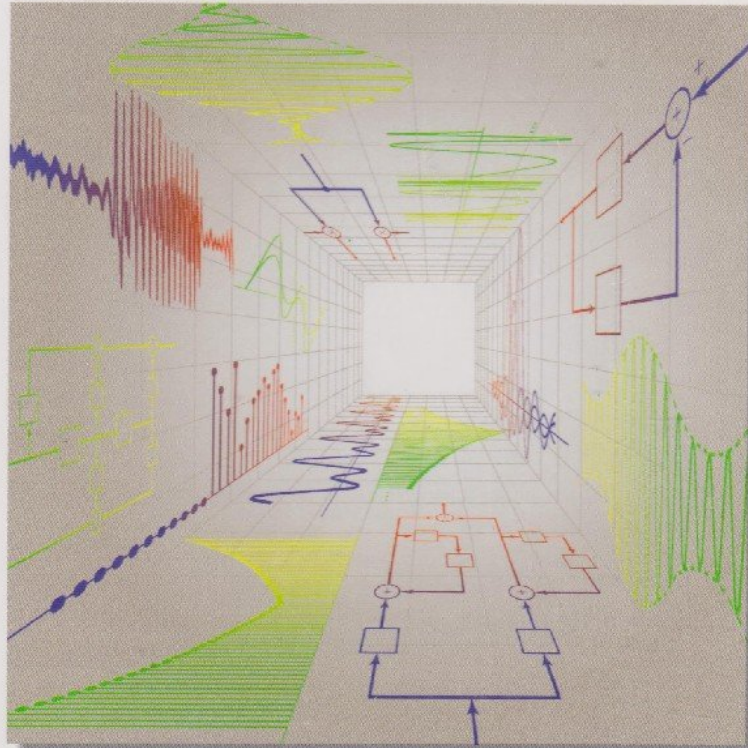
Алън-Опенхайм,-Алън-Уилски,-Ян-Йънг
Сигнали-и-системи
662-стр.,формат:-170x240,-твърди-корици
ИК-"Техника"-1993г.



DUTY_C~1.GIF

SIGNALS & SYSTEMS

SECOND EDITION



ALAN V. OPPENHEIM
ALAN S. WILLSKY
WITH S. HAMID NAWAB

PRENTICE HALL SIGNAL PROCESSING SERIES
ALAN V. OPPENHEIM, SERIES EDITOR



Author:- Alan-V.-Oppenheim,-Alan-V.-Willsky,-S.Hamid-Nawab-
Title:- Signals-and-Systems-
Publisher:- Prentice-Hall-India-
Edition:- Second-
Year:- 1992-
Place:- New-Delhi-
ISBN:- 978-81-203-1246-3