Приближаване на функции. Интерполиране с полином на Лагранж

Постановка на задачата

Нека са дадени две множества M и P от функции, дефинирани в една и съща ДО (дефиниционна област), за които е изпълнено $P \subset M$. Множеството M съдържа и функции, с които се работи "трудно" (намиране на стойност, диференциране, интегриране и т.н.), докато P съдържа "лесни" за работа функции (непрекъснати, полиноми). За всяка функция $f(x)$ от множеството M търсим онази функция $p(x)$ от множеството P, която е "най-близка" до $f(x)$. След като $p(x)$ е "близка" до $f(x)$, може да се надяваме, че резултатите от действията с $p(x)$ ще бъдат "близки" до резултатите от същите действия с $f(x)$ и могат да ги заместват. Като прецизираме понятието "близост", получаваме различните начини за приближаване (апроксимиране) на функции.

Интерполация

Разглеждаме функции $f(x)$, зададени таблично:

x_i	x_0	x_1	$\dots$	x_n
$y_i = f(x_i)$	y_0	y_1	$\dots$	y_n

и множеството $P \equiv \prod_n(x)$ - полиномите от $\boldsymbol{n}$ -та степен на променливата x.

Ако $x_i \neq x_j$ за $i \neq j$, съществува единствен полином от $\boldsymbol{n}$ -та степен, който приема в x_i стойност y_i. Този полином се нарича **интерполационен полином на Лагранж** и има вида:

$$L_n(x) = \sum_{i=0}^{n} y_i \prod_{j \neq i} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}.$$

В този случай под близост между $f(x)$ и $L_n(x)$ ще разбираме:

$L_n(x_i) = f(x_i) = y_i, \quad i = 0,...,n$ - съвпадане на стойностите в $(n+1)$ различни точки.

Ако: $x_0 < x_1 <...< x_n$ и $x \in [x_0, x_n]$ процесът е **интерполация** на $f(x)$ с $L_n(x)$ и ако $x \notin [x_0, x_n]$ процесът е **екстраполация** на $f(x)$ с $L_n(x)$. Ако $f(x)$ има непрекъсната $(n+1)$ - ва производна, грешката се оценява така:

$$\left|R_n(x)\right| = \left|f(x) - L_n(x)\right| \le \frac{M_{n+1}}{(n+1)!}\left|(x - x_0)...(x - x_n)\right|,$$

където $M_{n+1} = \max\limits_{[p,q]}\left|f^{(n+1)}(x)\right|$ и $[p,q] \equiv [x_0, x_n]$ при интерполация;

$[p,q] \equiv [\min(x, x_0),\ \max(x, x_n)]$ при екстраполация.

Пример 1. Като се използват стойностите на $f(x) = \sqrt{x}$ за стойностите на аргумента 100, 121, 144 да се намери приближената стойност на $\sqrt{115}$ (без да се използва операцията коренуване) и се оцени грешката.

Решение:

По таблицата

x	100	121	144
$y = \sqrt{x}$	10	11	12

построяваме интерполационния полином от втора степен:

$$L_2(x) = 10\frac{(x-121)(x-144)}{(100-121)(100-144)} + 11\frac{(x-100)(x-144)}{(121-100)(121-144)} + 12\frac{(x-100)(x-121)}{(144-100)(144-121)} =$$

$$= \frac{10}{21.44}(x-121)(x-144) - \frac{11}{21.23}(x-100)(x-144) + \frac{12}{44.23}(x-100)(x-121)$$

Тогава за $x = 115$ получаваме:

$$L_2(115) = 10\frac{(115-121)(115-144)}{21.144} + 11\frac{(115-100)(115-144)}{21.23} + 12\frac{(115-100)(115-121)}{44.23}$$

или $L_2(115) = 10{,}7227555...$

За да оценим грешката (точността) на получения резултат, намираме последователно: $y = \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$; $y' = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}$; $y'' = -\frac{1}{4}x^{-\frac{3}{2}}$; $y''' = \frac{3}{8}x^{-\frac{5}{2}}$;

$$M_3 = \max_{[100,144]}\left|\frac{3}{8}x^{-\frac{5}{2}}\right| = \frac{3}{8\sqrt{100^5}} = \frac{3}{8.10^5};$$

$$\left|R_2(115)\right| \le \tfrac{1}{3!}\left(\frac{3}{8.10^5}\right).\left|(115-100)(115-121)(115-144)\right| = 0{,}00163125...$$

т.е грешката не надвишава 0,002.

Забележка. Ако искаме (или се налага) да извършваме междинните изчисления като закръгляме получените резултати, най-добре е да започнем с оценка на грешката и след това да закръгляме така, че грешката от закръгляне да не влияе върху точността на получения резултат. В горния пример е достатъчно да работим с точност 10^{-4}, т.е. закръгляйки до четвъртия знак след десетичната запетая, тъй като грешката на метода е в третия знак.

Пример 2. С каква точност трябва да се табулират (пресметнат) стойностите $\ln(100)$, $\ln(101)$, $\ln(102)$ и $\ln(103)$, че тя да не влияе върху грешката при интерполация на $\ln(100{,}5)$?

Решение:

По четирите стойности $\ln(100)$, $\ln(101)$, $\ln(102)$ и $\ln(103)$ можем да построим интерполационен полином от трета степен. Тогава грешката при интерполация на $\ln(100{,}5)$ може да се оцени така:

$$\left|R_3(100{,}5)\right| \le \frac{M_4}{4!}\left|(100{,}5-100).(100{,}5-101).(100{,}5-102).(100{,}5-103)\right|.$$

За да определим M_4 намираме последователно:

$$y = \ln x, \quad y' = \frac{1}{x} = x^{-1}, \quad y'' = -x^{-2},$$

$$y''' = 2x^{-3}, \quad y^{IV} = -6x^{-4}, \quad M_4 = \max_{[100,144]}\left|\frac{-6}{x^4}\right| = \frac{6}{100^4} = 6.10^{-8}.$$

След заместване в R_3 получаваме: $R_3(100{,}5) \le 2{,}3.10^{-9}$ т.е. стойностите на $\ln(100)$, $\ln(101)$, $\ln(102)$ и $\ln(103)$ трябва да се табулират поне до деветия знак след десетичната запетая.

Пример 3. Дадена е таблицата:

x	10	15	17	20
$y = f(x)$	3	7	11	17

Като се използва интерполационния полином на Лагранж, да се намери приближено решение на уравнението $y = f(x) = 10$.

Решение:

При решаване на задачата може да постъпим по два начина.

I: Да построим $L_3(x)$ по горната таблица и след това да решаваме (точно или приближено) уравнението $L_3(x) = 10$.

II: Да "обърнем" таблицата и да вземем втория ред за първи, а първия за втори. По такъв начин ще получим таблица от стойностите на обратната функция $x = x(y)$. По тази таблица построяваме интерполационен полином и стойността му при $y = 10$ е решението на задачата. Този метод може да се използва само, ако $y_i \ne y_j$ за $i \ne j$ (Защо?) и се нарича обратно интерполиране. Ще решим задачата така, т.к. в този случай не се решава полиномно уравнение.

Построяваме интерполационния полином на Лагранж по таблицата:

y	3	7	11	17
$x = x(y)$	10	15	17	20

$$L_3(x) = 10\frac{(y-7)(y-11)(y-17)}{(3-7)(3-11)(3-17)} + 15\frac{(y-3)(y-11)(y-17)}{(7-3)(7-11)(7-17)} +$$

$$+17\frac{(y-3)(y-7)(y-17)}{(11-3)(11-7)(11-17)} + 20\frac{(y-3)(y-7)(y-11)}{(17-3)(17-7)(17-11)} =$$

$$= -\frac{5}{224}(y-7)(y-11)(y-17) + \frac{3}{32}(y-3)(y-11)(y-17) -$$

$$= -\frac{17}{192}(y-3)(y-7)(y-17) + \frac{1}{42}(y-3)(y-7)(y-11)\,.$$

Стойността му при $y = 10$ е $L_3(10) = 16{,}640625$, която приемаме за решение на задачата.

Пример 4. Функцията $y = \sin(x)$ се табулира със стъпка 1^0 в интервала $[0, \pi]$ ($1^0 = \pi/180$). Да се оцени грешката при линейната интерполация на тази функция за $\forall x \in [0, \pi]$.

Решение:

Нека $x \in [x_k, x_{k+1}]$ - k -тия интервал от делението на $[0, \pi]$ със стъпка $h = 1^0 = 0{,}01745329\ldots$Тогава за грешката при линейна интерполация ще имаме

$$|R_1(x)| \le \frac{M_2}{2!}|(x - x_k)(x - x_{k+1})|\,.$$

За функцията $y = \sin(x)$ имаме $y'' = -\sin x \Rightarrow M_2 = 1$, $\forall x \in [0, \pi]$. Ако положим $t = x - x_k$, $x - x_{k+1} = x - (x_k + h) = x - x_k - h = t - h$, имаме $|R_1(x)| \le \frac{1}{2}|t(t-h)|$. Ще намерим най-голямата абсолютна стойност на функцията $\varphi(t) = t(t-h)$, когато $t \in [0, h]$ (тъй като при интерполация $x \in [x_k, x_{k+1}]$).

$$\varphi'(t) = 2t - h, \qquad \varphi'(h/2) = 0, \qquad \varphi(h/2) = -h^2/4\,,$$

$$\varphi(0) = \varphi(h) = 0 \Rightarrow \max_{[0,h]}|\varphi(t)| = \frac{h^2}{4}$$

Окончателно $|R_1| \le \frac{1}{2}\frac{h^2}{4} = \frac{h^2}{8} = 0{,}000038\ldots \approx 0{,}00004$.

Пример 5. Да се намерят онези възли в [1, 2], които минимизират грешката при интерполация на произволна функция с полином от трета степен. Да се оцени тази грешка за $f(x)=\sqrt{x}$.

Решение:

Знаем [1-2], че възлите, минимизиращи грешката в произволен интервал $[a,b]$ са: $t_k^* = \frac{b-a}{2}x_k^* + \frac{b+a}{2}$, където $x_k^* = \cos\frac{(2k+1)\pi}{2(n+1)}$, $k=0\div n$ са нулите на полинома на Чебишов от I род, и оценката за грешката в този случай е:

$$|R_n| \le \frac{(b-a)^{n+1}}{2^{2n+1}}.\frac{M_{n+1}}{(n+1)!}.$$

$$n=3 \Rightarrow x_0^* = \cos\frac{\pi}{8},\ x_1^* = \cos\frac{3\pi}{8},\ x_2^* = \cos\frac{5\pi}{8},\ x_3^* = \cos\frac{7\pi}{8}$$

$$t_0^* = \frac{1}{2}\cos\frac{\pi}{8} + \frac{3}{2} = 1{,}961939765...,\ t_1^* = \frac{1}{2}\cos\frac{3\pi}{8} + \frac{3}{2} = 1{,}691341715...,$$

$$t_2^* = \frac{1}{2}\cos\frac{5\pi}{8} + \frac{3}{2} = 1{,}308658285... = 3 - t_1^*,\ t_3^* =$$

$$= \frac{1}{2}\cos\frac{7\pi}{8} + \frac{3}{2} = 1{,}038060235... = 3 - t_0^*.$$

За функцията $f(x)=\sqrt{x}$ имаме $y^{IV} = -\frac{15}{16}x^{-\frac{7}{2}}$, тогава

$$M_4 = \max_{[1,2]}\left|-\frac{15}{16}x^{-\frac{7}{2}}\right| = \frac{15}{16},\quad |R_3| \le \frac{(2-1)^4}{2^7}.\frac{M_4}{4!} = \frac{15/16}{2^7.24} = \frac{5}{2^{14}} = 0{,}000305...$$

Автор: Дойчин Бояджиев, dtb@uni-plovdiv.bg