Въведение в метода на мрежите за решаване на частни диференциални уравнения

Частните диференциални уравнения (ЧДУ) имат голямо приложение в математическата физика, хидродинамиката, акустиката и в други научни и приложни области, но в повечето случаи те не могат да се решават в явен вид. Затова приближеното им решаване има широко разпространение.

Ще разгледаме **метода на мрежите** за решаване на **линейни диференциални уравнения от втори ред**. Построяването на различни схеми с метода на мрежите зависи от типа на ЧДУ и вида на граничните условия, които те удовлетворяват.

Най-разпространените частни случаи на линейните ЧДУ от II ред са:

1) уравнение на Пуасон – елиптично уравнение

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f(x, y)$$

2) параболично уравнение – уравнение на топлопроводността

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x, y)$$

3) хиперболично уравнение – вълново уравнение

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f(x, y)$$

Някои основни понятия от теорията на диференчните схеми (ДС) са:

I. Сходимост и апроксимация на ДС

(1) $\quad L(u) = f$

(1) е частно диференциално уравнение, където **u** е решението му в някаква област D, ограничена от контур (граница) Г.

Ако $\mathrm{D_h} = \{\mathrm{M_h}\}$ са изолирани точки, принадлежащи на $\overline{\mathrm{D}} = \mathrm{D} + \Gamma$, броят на точките в $\mathrm{D_h}$ зависи от h (колкото е по-малко h, толкова е по-голям броят им). $\mathrm{D_h}$ се нарича **мрежа**, $\mathrm{M_h}$ – **възли на мрежата**, а функция, определена във възлите на мрежата – **мрежова функция**.

Ако U е пространство от непрекъснати в D функции, а $\mathrm{U_h}$ – пространството от мрежовите функции, определени в $\mathrm{D_h}$, с метода на мрежите се осъществява замяна на U с $\mathrm{U_h}$. Ако задачата ни е да изчислим $u_h(x,y)$, където $u(x,y)$ е точното решение на (1), то $u_h(x,y)$ е таблица от стойностите на $u(x,y)$ в точките от мрежата $\mathrm{D_h}$. Като правило не се намира точното решение, а $u^h \approx u_h(x,y)$, където u^h се нарича приближено решение в точки от мрежата. За намирането му се съставя система от числени уравнения

(2) $\quad L_h(u^h) = f^h$

$\mathrm{L_h}$ – диференчен оператор, съответстващ на L, $f^{\mathrm{h}} \in \mathrm{F^h}$ (ако $f(\mathrm{x},\mathrm{y}) \in \mathrm{F}$), формулата (2) наричаме **диференчна схема (ДС).**

Ще казваме, че **ДС (2) е сходяща при** $\mathrm{h} \to 0$**,** ако:

$\left\| u_h(x,y) - u^h \right\|_{U_h} \to 0$ при въведени мрежови норми $\|\bullet\|_{\mathrm{U_h}}$, $\|\bullet\|_{\mathrm{F_h}}$, съответни на $\|\bullet\|_{\mathrm{U}}$, $\|\bullet\|_{\mathrm{F}}$ в изходните пространства U, F.

Ако

$\left\| u_h(x,y) - u^h \right\|_{U_h} \le Ch^s$, C – const, независеща от $\mathrm{h}, \mathrm{s} > 0$, то сходимостта е от ред s по отношение на h.

Ще казваме, че ДС (2) **апроксимира** задача (1), ако $L_h\left(u_h(x,y)\right) = f^h + \delta f^{(h)}$ и $\left\| \delta f^{\mathrm{h}} \right\|_{\mathrm{F_h}} \to 0$ при $\mathrm{h} \to 0$.

δf^{h} – **грешка от апроксимацията**. Ако $\left\|\delta f^{h}\right\|_{F_h} \le Mh^{\sigma}$, M – const, независеща от h, $\sigma > 0$, то ДС (2) апроксимира задача (1) с грешка от ред σ относно h.

II. Устойчивост на ДС

Диференчната схема (2) се нарича **устойчива,** ако $\exists h_0 > 0$ такова, че за всички $h < h_0$ и произволни $f^{h} \in F_h$ са изпълнени:

1) (2) има единствено решение

2) $\left\|u^{h}\right\|_{U_h} \le M\left\|f^{h}\right\|_{F_h}$, M – const, независеща от h, f^{h} (устойчивостта може да се обобщи като непрекъснатост относно дясната част).

Понятието *устойчивост* съществено зависи от въведените норми в U_h и F_h и е възможно в някои случаи условие 2) да е изпълнено за някои норми, а за други – не.

Ако при всеки разумен избор на нормите условие 2) не се изпълнява, казваме, че ДС е неустойчива.

Така че устойчивостта е вътрешно свойство на ДС и на нея може да ѝ се влияе, изменяйки някои параметри, участващи в схемата, или изобщо да променим ДС.

Ще цитираме теорема, свързваща дефинираните по-горе понятия *апроксимация*, *сходимост* и *устойчивост*.

Теорема: Нека диференчната схема $L_h\left(u^{h}\right) = f^{h}$ апроксимира задачата $L\left(u\right) = f$ за решението u(x,y) от ред $s > 0$ относно h и е устойчива. Тогава тази ДС е сходяща и редът ѝ на сходимост съвпада с реда на апроксимация, т.е. $\left\|u_h\left(x, y\right) - u^{h}\right\|_{U_h} \le Kh^{s}$, K – const, независеща от h (най-общо казано, от апроксимацията и устойчивостта $\Rightarrow$ сходимост).

Тези понятия са разгледани подробно в следната литература:

1. Вычислительные методы. В. И. Крилов, В. В. Бобков, П. И. Монастырный.
2. Введение в теорию разностних схем. А.А.Самарский .
3. Числени методи Б. Сендов, В.Попов

Общи забележки при изучаване на въпросите за построяване, изследване и решаване на диференчни задачи:

1) Посочва се правило за избор на мрежата, т.е. заместваме непрекъсната област с дискретна. Най-често мрежата е правоъгълна и равномерна.

2) Посочва се една или няколко ДС, проверяват се условия за апроксимации и се установява редът на апроксимация.

3) Доказва се устойчивост на построените ДС – един от важните и сложни въпроси. От 2) и 3) следва сходимостта на ДС по цитираната теорема.

4) Разглежда се въпросът за числената реализация на ДС. В случая на линейни ДС това е система линейни алгебрични уравнения. Даже в двумерния случай системите са от голяма размерност и това създава трудности при реализацията им. Затова понякога се разработват специални методи.

Нататък ще разгледаме въпросите за численото решаване на различните видове ЧДУ.

Автор: Люба Попова

ПУ „П. Хилендарски"