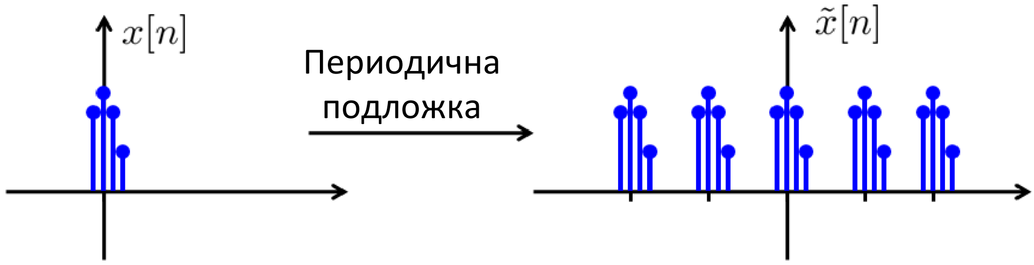
Задание 6. Дискретно преобразуване на Фурие

Теория.

При извеждането на дискретното преобразуване на Фурие (ДПФ), ние също имаме три основни стъпки.

Стъпка 1: Да разгледаме апериодичния дискретен сигнал *x[n].* Създаваме подложка на апериодичия сигнал и я мултиплицираме за изграждане на периодичната реплика $\tilde{x}[n]$;



Стъпка 2: Тъй като $\tilde{x}[n]$ е периодична, при разлагането и в ДРФ ние имаме

$$\tilde{x}[n] = \sum_{k=\langle N\rangle} a_k e^{jk\omega_0 n}, \tag{1}$$

където a_k може да бъде определено от

$$a_k = \frac{1}{N}\sum_{n=\langle N\rangle} \tilde{x}[n]\, e^{jk\omega_0 n}.$$

Тук честотата ω_0 се дава от

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{N}.$$

Може да се види, че $\tilde{x}[n]$ е периодичен сигнал с период N, и ненулевите отчети на $\tilde{x}[n]$ са същите, като ненулевите отчети на *x[n]*. Затова можем да запишем

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{1}{N}\sum_{n=\langle N\rangle} \tilde{x}[n]\, e^{jk\omega_0 n} \\ &= \frac{1}{N}\sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]\, e^{jk\omega_0 n}. \end{aligned}$$

Ако дефинираме ДПФ като

$$\boxed{X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] e^{-j\omega n},} \tag{2}$$

то $$a_k = \frac{1}{N}\sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{jk\omega_0 n} = \frac{1}{N}X(e^{jk\omega_0}) \qquad (3)$$

Стъпка 3: Като заместим уравнение (3) в (1) получаваме

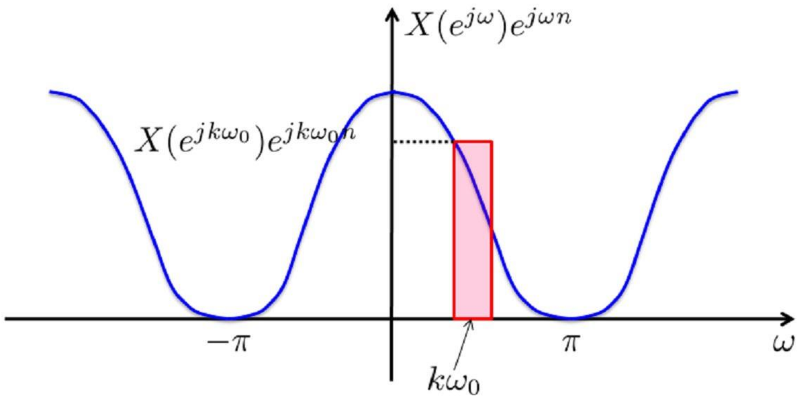
$$\begin{aligned}\tilde{x}[n] &= \sum_{k=\langle N\rangle} a_k e^{jk\omega_0 n}\\ &= \sum_{k=\langle N\rangle}\left[\frac{1}{N}X(e^{jk\omega_0})\right]e^{jk\omega_0 n}\\ &= \frac{1}{2\pi}\sum_{k=\langle N\rangle} X(e^{jk\omega_0})e^{jk\omega_0 n}\omega_0, \qquad \omega_0 = \frac{2\pi}{N}.\end{aligned} \qquad (4)$$

Тъй като при $N \longrightarrow \infty$, $\omega_0 \longrightarrow 0$ и $\tilde{x}[n] \to x[n]$. Освен това от уравнение (4) следва

$$\tilde{x}[n] = \frac{1}{2\pi}\sum_{k=\langle N\rangle} X(e^{jk\omega_0})e^{jk\omega_0 n}\omega_0 \longrightarrow \frac{1}{2\pi}\int_{2\pi} X(e^{j\omega})e^{j\omega n}d\omega$$

$$\boxed{x[n] = \frac{1}{2\pi}\int_{2\pi} X(e^{j\omega})e^{j\omega n}d\omega,} \qquad (5)$$

Формула (1) задава право ДПФ, а формула (5) – обратно ДПФ



Фигура 1 Тъй като $N \longrightarrow \infty$ и $\omega_0 \longrightarrow 0$. Така площта става безкрайно малка и сумата става интеграл.

Интересно е да се отбележи, че при непрекъснато преобразуване на Фурие *X(jω)* е апериодична като цяло, но **при дискретното преобразуване на Фурие *X(jω)* винаги е периодична**.

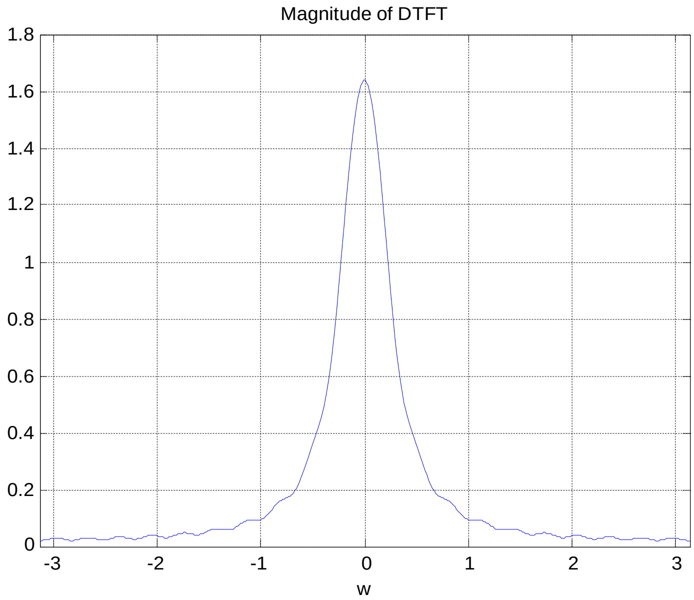
Задание 6.1

Да се изчисли дискретното преобразуване на Фурие *X(jω)* на сигнала $x[n] = \sin(a\,n)b^n$ при $0 \le n \le 20$ и с данни от съответния вариант по таблицата. За целта да се използва формула (2) и възможностите на символната математика в Матлаб (командата `sum`), например:

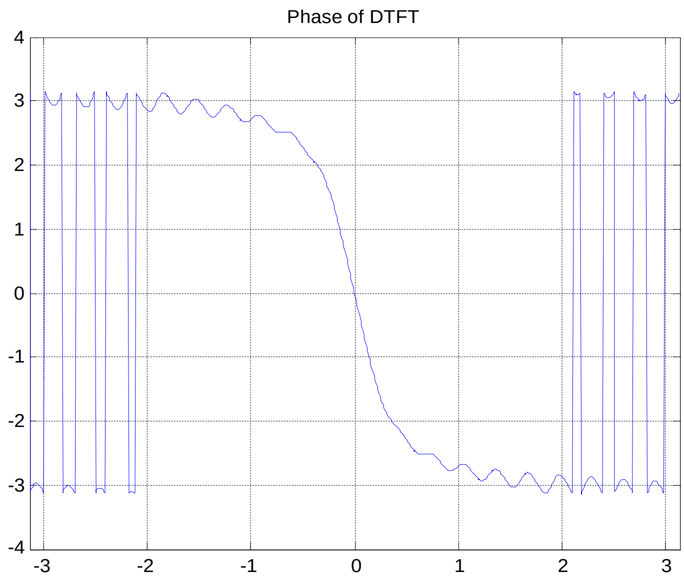
```
x=sin(a*n).*b.^n;
X=sum(x.*exp(-1j*w*n));
```

Да се изобразят модулът и фазата на $X(j\omega)$ в честотните диапазони $-\pi \le \omega \le \pi$ *(две графики)* и $-5\pi \le \omega \le 5\pi$ *(още две графики)*.

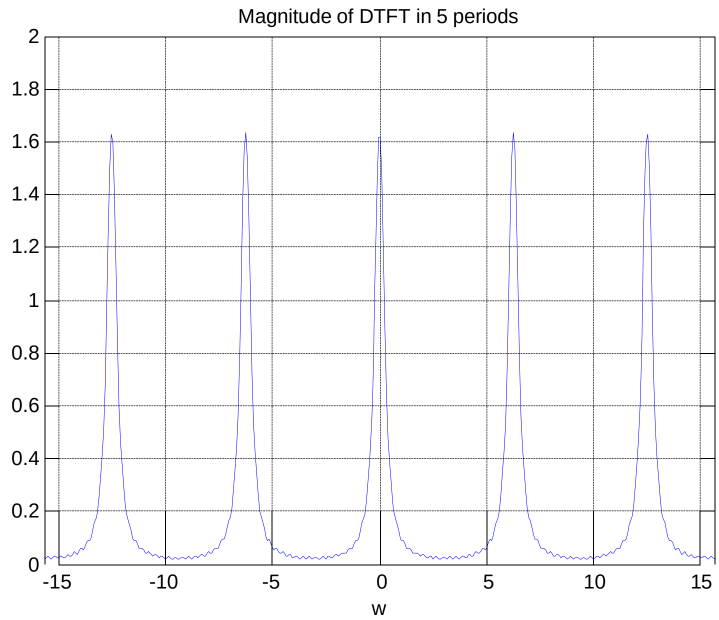
Примерни графики на резултатите при $a = 0.1$ **и** $b = 0.8$**:**



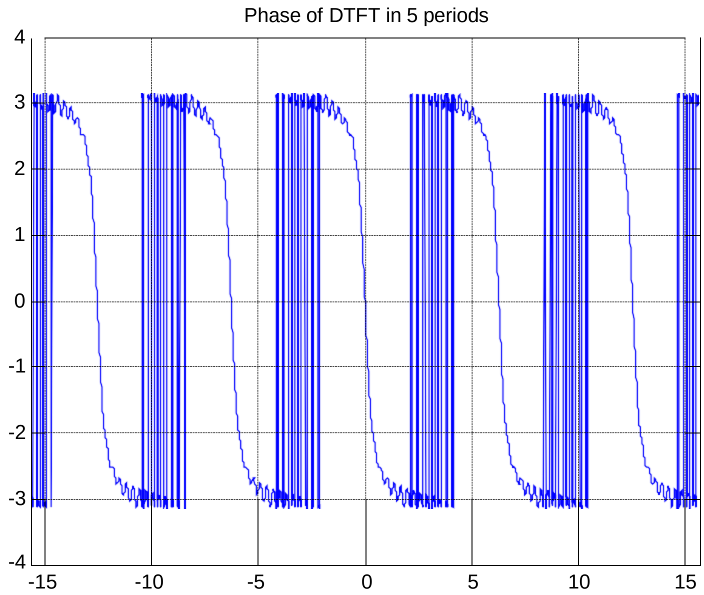
Фиг. 1. Графика на един период на модула на $X(j\omega)$ при $0 \le n \le 20$ и $a = 0.1$; $b = 0.8$



Фиг. 2. Графика на един период на фазата на $X(j\omega)$ при $0 \le n \le 20$ и $a = 0.1$; $b = 0.8$



Фиг. 3. Графика на пет периода на модула на *X(jω)* при 0 ≤ n ≤ 20 и *a = 0.1* ; *b = 0.8*



Фиг. 3. Графика на пет периода на фазата на *X(jω)* при 0 ≤ n ≤ 20 и *a = 0.1* ; *b = 0.8*

Получената функция *X(jω)*, след опростяването с използване на команда `X=simplify(X)` е:

X=piecewise([exp(w*i) == 4/5, Inf], [exp(w*i) ~= 4/5, limit(((4/5)^n*exp(-n*w*i))/((4*exp(-w*i))/5 - 1), n == Inf) + (5*exp(w*i))/(5*exp(w*i) - 4)])

Тази функция се копира в отчета от командния прозорец на Матлаб.

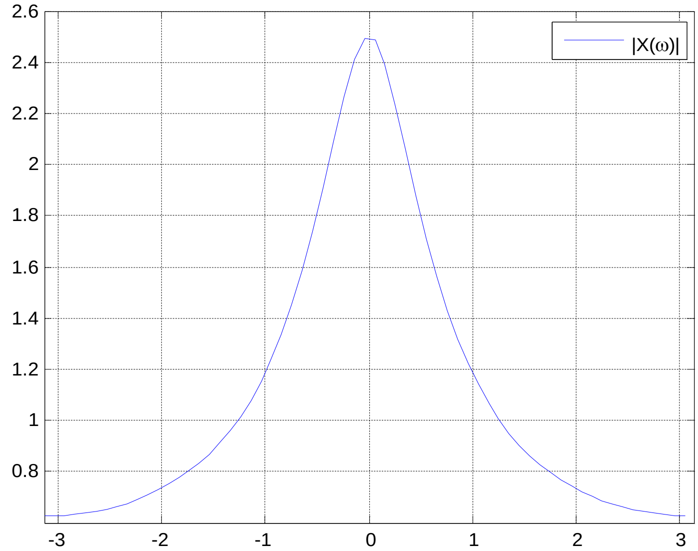
Задание 6.2

Да се изчисли дискретното преобразувание на Фурие *X(jω)* на сигнала $x[n] = b^n u[n]$, който е еквивалентен на $x[n] = b^n$ при $n \geq 0$. Дължината на реда *x[n]* е безкрайна, затова дискретното преобразувание на Фурие трябва да се определи с помощта на функцията `symsum`. Използваният формат е:

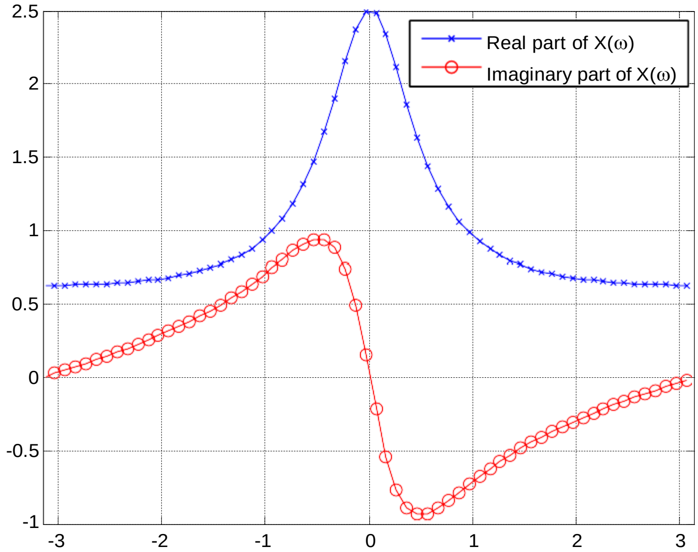
```
X=symsum(x*exp(-1i*w*n),n,0,inf)
```

Да се изчертаят модула, реалната и имагинерната части на функцията *X(jω)* със стъпка 0.1 rad/s в диапазона $-\pi \geq \omega \geq \pi$.

Примерни графики на резултатите при *b = 0.6***:**



Фиг. 5. Графика на модула на *X(jω)* при *b = 0.6*



Фиг. 5. Графика на реалната и имагинерната части на функцията *X(jω)* при *b = 0.6*

Получената функция *X(jω)* е:

X =piecewise([exp(w*i) == 3/5, Inf], [exp(w*i) ~= 3/5, limit(((3/5)^n*exp(-n*w*i))/((3*exp(-w*i))/5 - 1), n == Inf) + (5*exp(w*i))/(5*exp(w*i) - 3)])

Таблица варианти

No	***a***	***b***
1	0.13	0.61
2	0.15	0.59
3	0.17	0.57
4	0.19	0.55
5	0.21	0.53
6	0.23	0.51
7	0.25	0.77
8	0.27	0.75
9	0.29	0.73
10	0.31	0.71
11	0.33	0.69
12	0.35	0.67
13	0.37	0.65
14	0.39	0.63
15	0.25	0.61
16	0.27	0.59
17	0.29	0.57
18	0.31	0.55
19	0.33	0.53
20	0.35	0.51
21	0.37	0.57
22	0.39	0.55
23	0.31	0.61
24	0.28	0.59
25	0.31	0.57
No	***a***	***b***

No	***a***	***b***
26	0.13	0.63
27	0.15	0.61
28	0.17	0.59
29	0.19	0.57
30	0.21	0.55
31	0.23	0.53
32	0.25	0.51
33	0.27	0.57
34	0.29	0.55
35	0.31	0.61
36	0.33	0.59
37	0.35	0.57
38	0.37	0.61
39	0.39	0.59
40	0.25	0.57
41	0.27	0.55
42	0.29	0.53
43	0.31	0.51
44	0.33	0.77
45	0.35	0.75
46	0.37	0.73
47	0.39	0.71
48	0.31	0.69
49	0.28	0.67
50	0.31	0.65
51	0.19	0.63
52	0.21	0.61
53	0.23	0.59
54	0.25	0.57
55	0.27	0.55
56	0.29	0.53
57	0.31	0.51
58	0.33	0.57
59	0.35	0.55
60	0.37	0.61
61	0.39	0.59
62	0.25	0.57
63	0.27	0.61
64	0.39	0.55
65	0.25	0.53
66	0.27	0.51
67	0.29	0.77
68	0.31	0.75
No	***a***	***b***