Задание 5. Непрекъснато преобразуване на Фурие

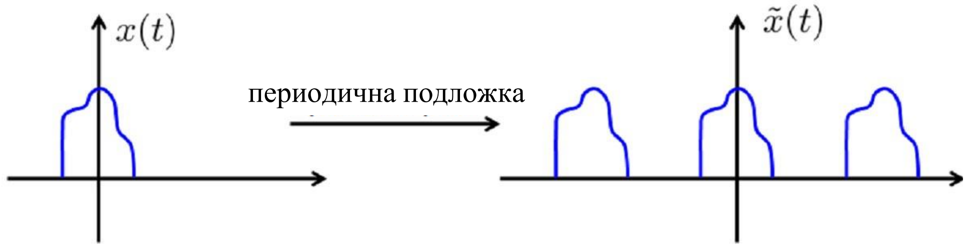
Теория.

Извличането на преобразуване на Фурие включва три стъпки.

Стъпка 1.

Предполагаме, че апериодичният сигнал *x(t)* има ограничена продължителност т.е. *x(t) = 0* за |*t*| > *T/2*, за дадено *T*. Тъй като *x(t)* е апериодична, ние първо изграждаме периодичен сигнал .

За –*T/2* < *t* < *T/2*, и $\widetilde{x}(t+T) = \widetilde{x}(t)$. Визуално ние получаваме



Стъпка 2.

Тъй като $\widetilde{x}(t)$ е периодична, ние можем да разложим в на ред на Фурие:

$$\widetilde{x}(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk\omega_0 t}, \qquad (1)$$

където

$$a_k = \frac{1}{T}\int_T \widetilde{x}(t) e^{-jk\omega_0 t} dt.$$

Коефициентите на реда на Фурие a_k може допълнително да бъдат изчислени като

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{1}{T}\int_{\frac{-T}{2}}^{\frac{T}{2}} \widetilde{x}(t) e^{-jk\omega_0 t} dt \\ &= \frac{1}{T}\int_{\frac{-T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t) e^{-jk\omega_0 t} dt, \qquad \widetilde{x}(t) = x(t), \text{ for } -T/2 < t < T/2 \\ &= \frac{1}{T}\int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-jk\omega_0 t} dt, \qquad x(t) = 0, \text{ for } |t| > T/2. \end{aligned}$$

Ако дефинираме

$$X(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt, \qquad (2)$$

тогава

$$a_k = \frac{1}{T} X(jk\omega_0). \qquad (3)$$

Последователното заместване на (3) в (1) води до

$$\widetilde{x}(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{T} X(jk\omega_0) e^{jk\omega_0 t} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi} X(jk\omega_0) e^{jk\omega_0 t} \omega_0, \qquad (4)$$

Стъпка 3.

Сега, вземаме предвид, че $\widetilde{x}(t)$ е периодична подложка на *x(t)*. Щом периодът T⟶∞, то периодичният сигнал се доближава до *x(t)*. Следователно,

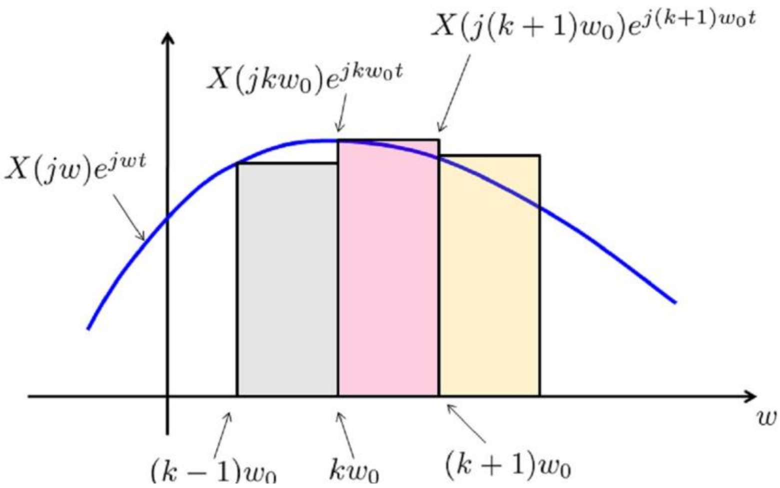
$$\widetilde{x}(t) \longrightarrow x(t), \qquad (5)$$

щом T⟶∞.

Освен това, когато *T*⟶∞, или еквивалентно $\omega_0 \longrightarrow 0$, а границата на сумата в (4) става интеграл:

$$\lim_{\omega_0 \to 0} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi} X(jk\omega_0) e^{jk\omega_0 t} \omega_0 = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi} X(j\omega) e^{jwt} dw. \qquad (6)$$

Графично, това може да се види на фиг. 1.



Фигура 1. Илюстрация на уравнение (6)

Комбинирайки (6) и (5), имаме

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega) e^{jwt} dw \qquad (7)$$

Двете уравнения (2) и (7) са известни като уравнения на Преобразуванието на Фурие (ПФ). Уравнението (3) се нарича уравнение на анализа (защото ние анализираме времевия сигнал в пространството на Фурие – честотната област), а (7) се нарича уравнение на синтеза (защото ние събираме информацията от пространството на Фурие и реконструираме времевия сигнал). Обобщавайки ние имаме

Теорема 10. Преобразуванието на Фурие *X(jω)* на сигнала *x(t)* се дава от

$$X(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt,$$

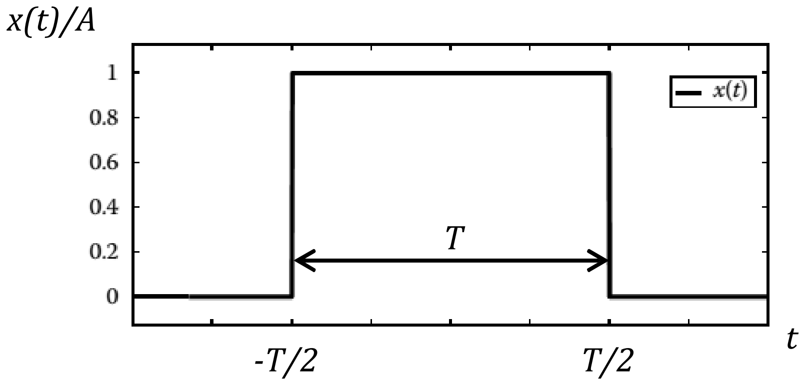
а обратното непрекъснато преобразувание на Фурие (НПФ) от

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega) e^{jwt} dw.$$

Задание 5.1

Да се изобрази сигнала *x(t) = A [u(t +T/2) – u(t - T/2)]*, или

$$pT(t) = A,\ |t| \leq T/2 \Rightarrow pT(t) = \begin{cases} A, & -T/2 \leq t \leq T/2 \\ 0, & \text{в противен случай} \end{cases}$$



За целта да се използват възможностите на символната математика в Матлаб.

Пример: *A =2 , T = 4*

```
clear all; clf;              % clear Workspace variables and figure objects
syms t w                 % set symbol variables t - time, w - frequency
A=2;
x=A*(heaviside(t+4/2)-heaviside(t-4/2));
figure(1)
ezplot(x,[-4 4])
grid
legend('x(t)')
```

Вторият ред на кода задава символните променливи *t* – време и *ω* – честота. След това се задават Амплитудата *A*. Четвъртият ред определя формула за пресмятане на символната променлива *x*. Използва се формулата:

x = A (u(t+T/2) – u(t–T/2)), където:

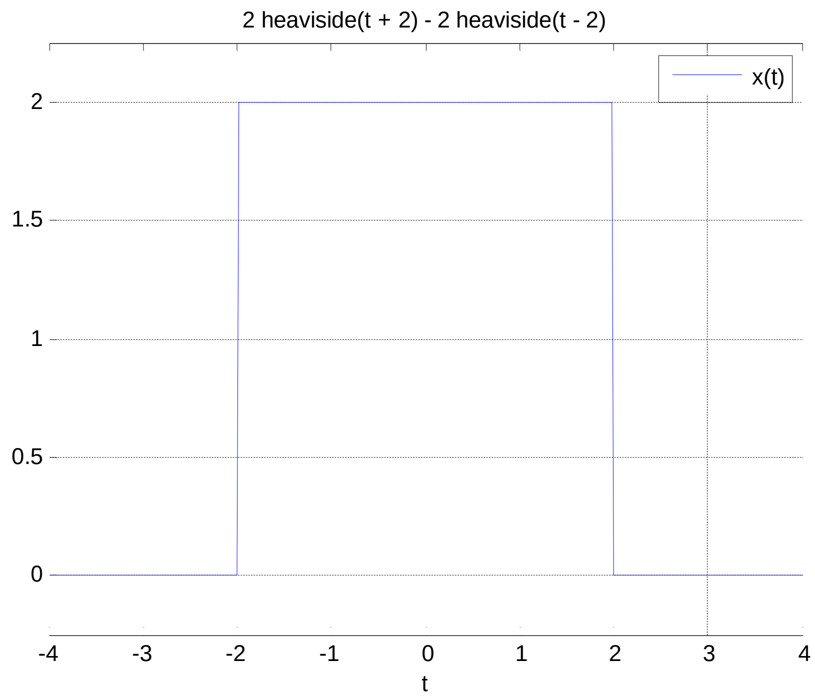
u(t) е единичната стъпаловидна функция (функция на Хависайд):

$$u(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ 1, & t \geq 0 \end{cases} ;$$

u(t+T/2) е отместената във времето с *–T/2* функция *u(t)*;

u(t-T/2) е отместената във времето с *+T/2* функция *u(t)*;

Последният ред изчертава стойностите на функцията *x(t)* в диапазона от време *(–T ≤ t ≤ +T)*. Използва се специализираната Матлаб функция за заместване и изчертаване `ezplot`.



Фиг. 1. Графика на сигнала *x(t) = A [u(t ± T/2) – u(t ± T/2)]* при *A =2 , T = 4*

Задание 5.2

Да се извърши НПФ на *x(t)* с помощта на Матлаб функцията
`X1=fourier(x,w)`

Примерен резултат при A = 2 и T = 4 (този резултат се копира от командния прозорец на Матлаб и се прилага в отчета!!!):

X1 = - 2*exp(-w*2*i)*(pi*dirac(w) - i/w) + 2*exp(w*2*i)*(pi*dirac(w) - i/w)

Да се изчертае функцията X1(w) с помощта на Матлаб командата `subs` – символно заместване. Командата има следния формат:

`subs(S,OLD,NEW)` – замества символната променлива (аргумента) OLD със стойностите NEW в символния израз S (формулата за S).

OLD е символна променлива, стринг, означаващ име на променлива или стринг – предварително зададен израз;

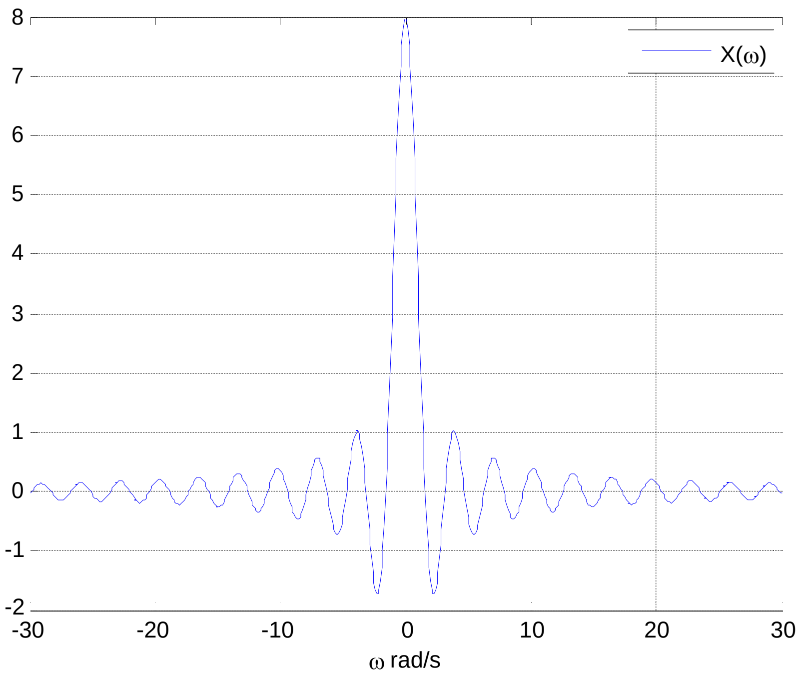
NEW е символна или числена променлива или израз.

Пример (този пример е само за онагледяване на работата на команда `subs`):

```
syms alpha               %definira simvolna promenliva alpha
f=sin(alpha);            %zadava simvolna formula za iz4islenie na f
a = 0:0.01:pi;           %syzdava vektor na stojnostite na argumenta
ff=subs(f,alpha,a);      %zamestva v izraza za f - alpha sas stojnostite na a
figure(1)
plot(a,ff)
grid
legend('sin(\alpha)')
```

Внимание! При създаването на вектора на аргумента (в горния пример – ред 3, a = ... , но при вас трябва да е ъгловата скорост омега w = ... , която епо абсцисната ос на примерната графика от Фиг.2) направете така, че да няма точка, която е разположена в w = 0. При w = 0 в повечето случаи функцията X1 е неопределена (съдържа съставки от типа i/w) – делене на нула. Затова правилно изберете диапазона на задаване на вектора w, така че да не попада точно в нулата. Изберете диапазон на w от -100/T до +100/T, като подберете така стъпката, че векторът да не минава точно през нулата. Нека w има около 200 точки за да е качествена графиката.

Примерна графика:



Фиг. 2. Графика на сигнала X1 = - 2*exp(-w*2*i)*(pi*dirac(w) - i/w) + 2*exp(w*2*i)*(pi*dirac(w) - i/w)

Задание 5.3

Да се извърши обратно НПФ на X1(w) като се използва функцията ifourier(X1, t).

Примерен резултат (този резултат се копира от командния прозорец на Матлаб и се прилага в отчета!!!):

x1 = -(2*pi*(2*heaviside(t - 2) - 1) - 2*pi*(2*heaviside(t + 2) - 1))/(2*pi)

Варианти:

No	*A*	*T*
1	34	25
2	36	24
3	38	23
4	40	22
5	42	21
6	44	20
7	46	19
8	20	18
9	22	17
10	24	16
11	26	15
12	28	14
13	30	13
14	7	12
15	9	24
16	11	25
17	13	26
18	15	27
19	17	28
20	19	29
21	5	38
22	3	47
23	16	56
24	14	5
25	12	4
26	-34	5
27	-36	4
28	-38	13
29	-40	12
30	-42	24
31	-44	25
32	-46	26
33	-20	27
34	-22	28

No	*A*	*T*
35	-24	29
36	-26	38
37	-28	47
38	-30	56
39	-7	23
40	-9	22
41	-11	21
42	-13	20
43	-15	19
44	-17	18
45	-19	17
46	-5	16
47	-3	15
48	-16	14
49	-14	7
50	-12	5
51	-7	22
52	-13	16
53	-9	24
54	-29	17
55	-28	47
56	-18	33
57	-19	15
58	-9	56
59	-23	57
60	-25	44
61	-22	22
62	-13	13
63	-56	56
64	-18	44
65	-27	37
66	-17	40
67	-16	41
68	-28	40
69	-29	39
70	-30	30
71	-26	47
72	-14	29
73	-11	52
74	-8	34
75	-7	33
76	-6	37
77	-12	36
78	-19	43
79	-20	49