Задание 4. Редове на Фурие при непрекъснато време

Теория.

Разглеждаме периодичните сигнали (с период T)

$$x(t + T) = x(t)$$

които отговарят на квадратичното интегрално условие (т.е. ограничени са по амплитуда),

$$\int_T |x(t)|^2 dt < \infty,$$

или на условията на Дирихле (аналогични на по-горното).

Този клас сигнали, ние сме в състояние да изразим като линейна комбинация от комплексни експоненциали:

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk\omega_0 t}.$$

Тук ω_0 е основната честота

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T},$$

и коефициентите a_k са известни като коефициенти на Реда на Фурие.

1 Коефициенти на реда на Фурие при непрекъснато време

При даден периодичен сигнал $x(t)$, чийто квадрат на модула е интегрируем, как да се определят коефициентите a_k на реда на Фурие? Отговор дава следната теорема.

Теорема Коефициентите на реда на Фурие при НВ a_k на сигнала

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk\omega_0 t} \quad (1)$$

се дават от

$$a_k = \frac{1}{T}\int_T x(t) e^{-jk\omega_0 t} dt \quad (2)$$

Тъй като използването на безкраен брой съставки в разложението на периодичния сигнал $x(t)$ е практически неприложимо, то винаги, при анализа на сигнали с помощта на редове на Фурие се избира (в зависимост от изискванията за точност на оценката) краен брой компоненти. Формула

(3) ни дава $x_N(t)$ - апроксимацията на на $x(t)$. Когато N $\longrightarrow \infty$, може да се види, че $x_N(t) \longrightarrow x(t)$.

$$x_N(t) = \sum_{k=-N}^{N} a_k e^{jk\omega_0 t}, \qquad (3)$$

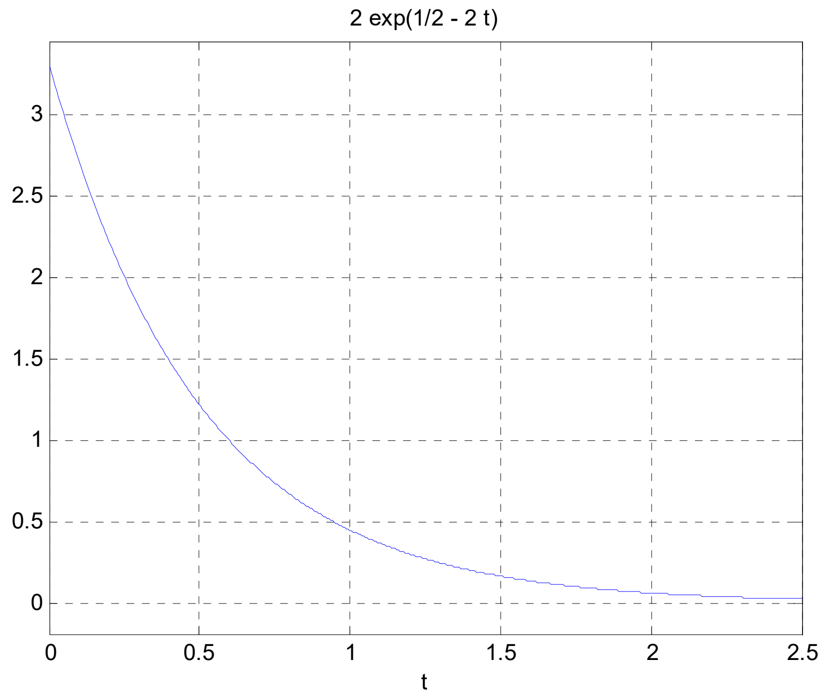
Задание 4.1

Да се изобрази един период $(t_0 \le t \le t_0 + T)$ на експоненциала $x(t) = A\ e^{(at+\theta)}$ (по вашия вариант – A, a, θ, t_0, T). За целта да се използват възможностите на символната математика в Матлаб.

Пример (подсказка**):**

$A = 2$, $a = -2$, $\theta = 0.5$, $T = 2.5$, $t_0 = 0$.

```
syms t                          % set symbol variable t - time
t0=0;                           % Start time of the period
T=2.5;                          % Period of x
x=2*exp(-2*t+0.5);              % function x
ezplot (x,[t0 t0+T]); grid      % plot symbol term x
```



Фиг. 1. Един период $(t_0 \le t \le t_0 + T)$ на експоненциала $x(t) = 2\ e^{(-2t+0.5)}$

Първият ред на кода задава символната променлива t – време. След това се задават началното време t_0 и периода T. Четвъртият ред определя формула за пресмятане на символната променлива x. Последният ред изчертава стойностите на функцията $x(t)$ в зададения диапазон от време $(t_0 \le t \le t_0 + T)$. Използва се специализирната функция за заместване и изчертаване `ezplot`.

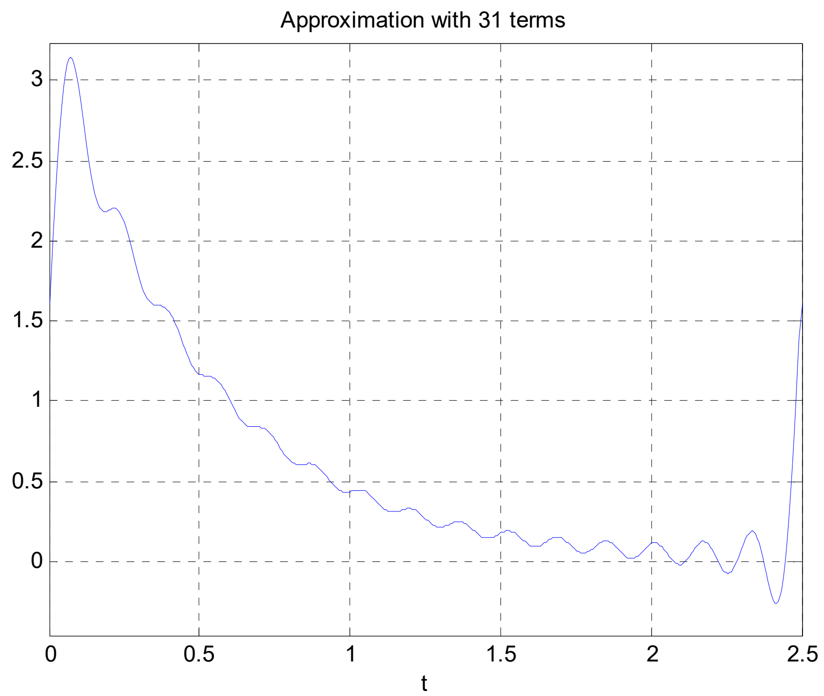
Задание 4.2

Да се определят коефициентите a_k на разложението в ред на Фурие на периодичния входен сигнал $x(t)$. По формула (3) да се изчисли апроксимиращата функция $x_N(t)$ при зададена стойност на N=15. Стойността на N определя колко съставки от реда на Фурие се вземат предвид в разложението. Например при N = 15 (виж формула (3)) k се изменя в диапазона от -15 до +15 и общия брой на компонентите в сумата от формула (3) е 2N+1 = 2*15+1 = 31. Съответно толкова са и коефициентите a_k в разложението.

Пример (подсказка):

```
w0=2*pi/T;                    % Base frequency calculation
N=15;                         % the number of coefficients is 2*N+1
for k=-N:N
a(k+N+1)=(1/T)*int(x*exp(-1j*k*w0*t),t,t0,t0+T); % calculation of equ.(2)
ex(k+N+1)=exp(1j*k*w0*t);                        % calculation of exponent
end                                              % on equ.(3)
xx=sum(a.*ex);                % calculation of equ.(3)- approx. fcn
figure(2)
ezplot(xx, [t0 t0+T]); grid
title('Approximation with 31 terms')
```

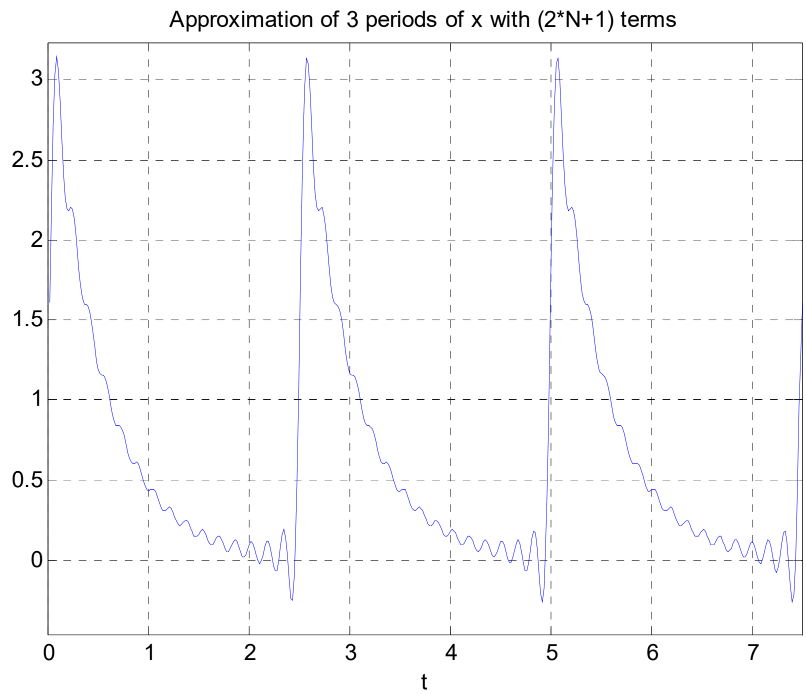
Примерна графика:



Фиг. 2. Апроксимация на експоненциала $x(t) = 2\, e^{(-2t+0.5)}$ с 31 компонента на разложението в РФ (при N = 15)

Обърнете внимание, че за изчисляването на стойностите на коефициентите на разложението a_k (ред 4) се използва for – цикъл за $k = -N:N$. Тъй като индексирането на векторите в Матлаб допуска използването само на положителни, цели стойности на индексите, по-големи от 0, то запис от вида ak (k), при изменение на k в диапазона на цикъла от – 15 до + 15 ще даде грешка (използване на отрицателен индекс). Затова на ред 4 стойностите на индексите са отместени със N+1. Така при k=-15, ak(k+N+1) ще бъде ak(1), т.е. първия елемент на вектора ak. При k=15, ak(k+N+1) ще бъде ak(31), т.е. тридесет и първия елемент на вектора ak.
Същата техника се използва и при определянето на експоненциалната част на формула (3) $e^{jk\omega_0 t}$ - `ex(k+N+1)= ...` на ред 5.

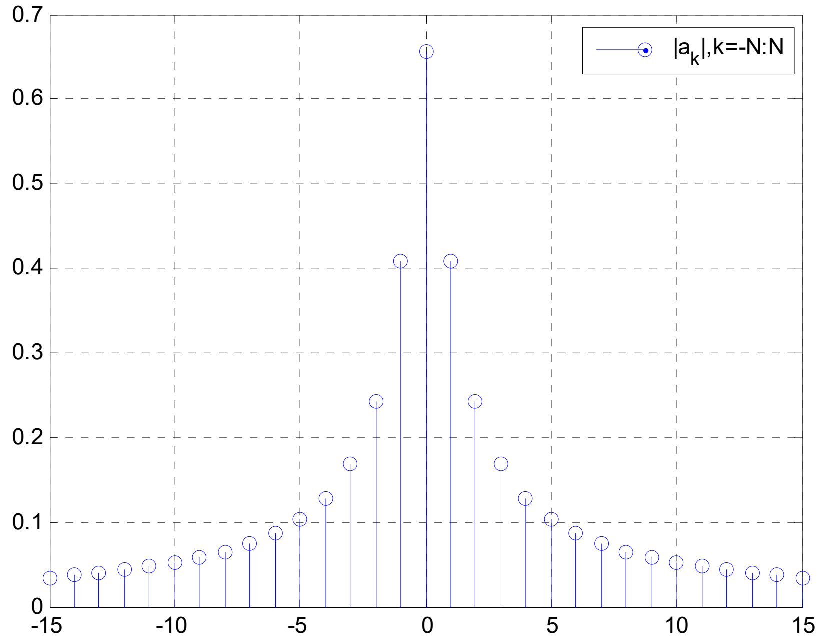
Задание 4.3
Да се изобразят три периода на апроксимиращата функция $x_N(t)$.
Примерна графика:



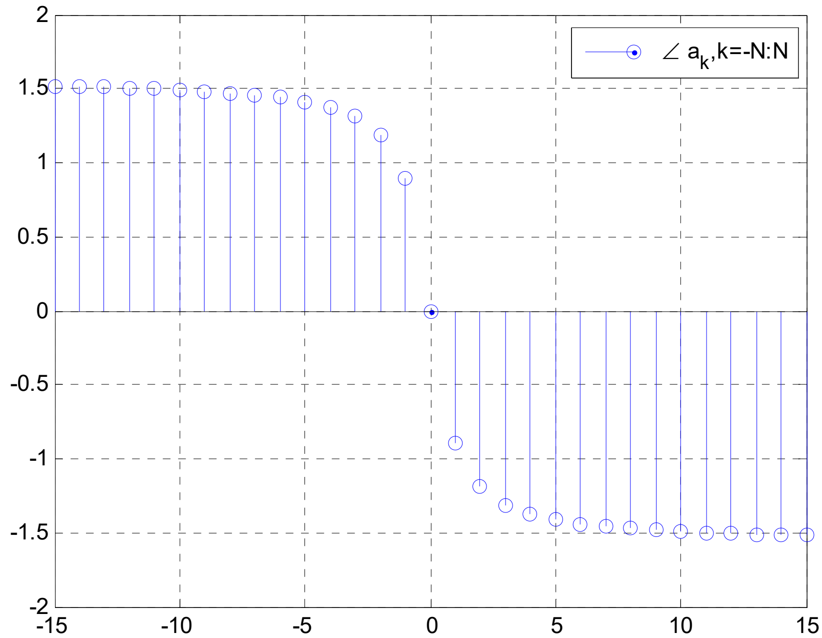
Фиг. 3. Три периода $(t_0 \leq t \leq t_0 + 3T)$ на апроксимиращата функция $x_N(t)$

Задание 4.4
Да се изобразят стойностите на коефициентите a_k – модул и фаза (те са комплексни числа).

Примерна графика:



Фиг. 4. Стойности на модула на коефициентите a_k

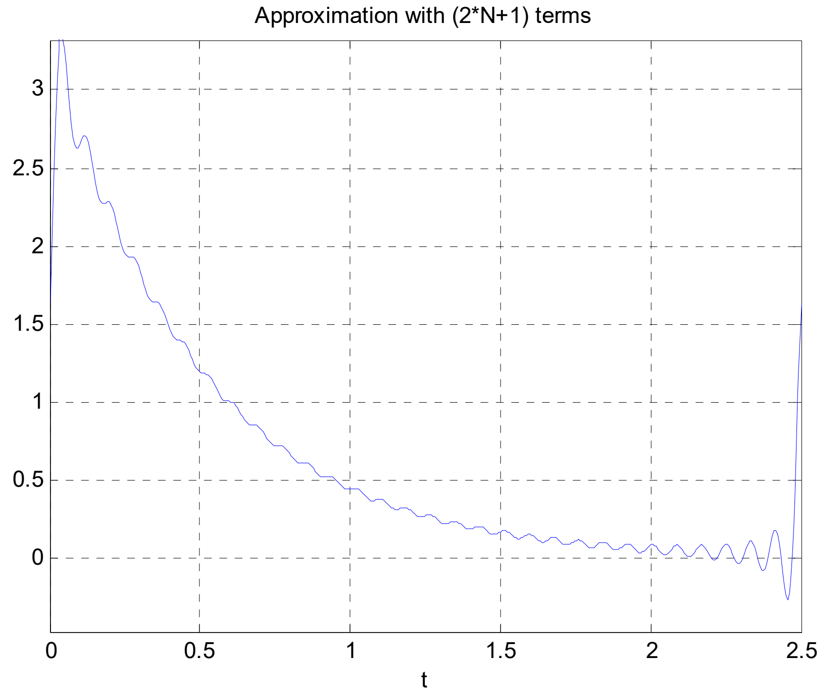


Фиг. 5. Стойности на фазата на коефициентите a_k

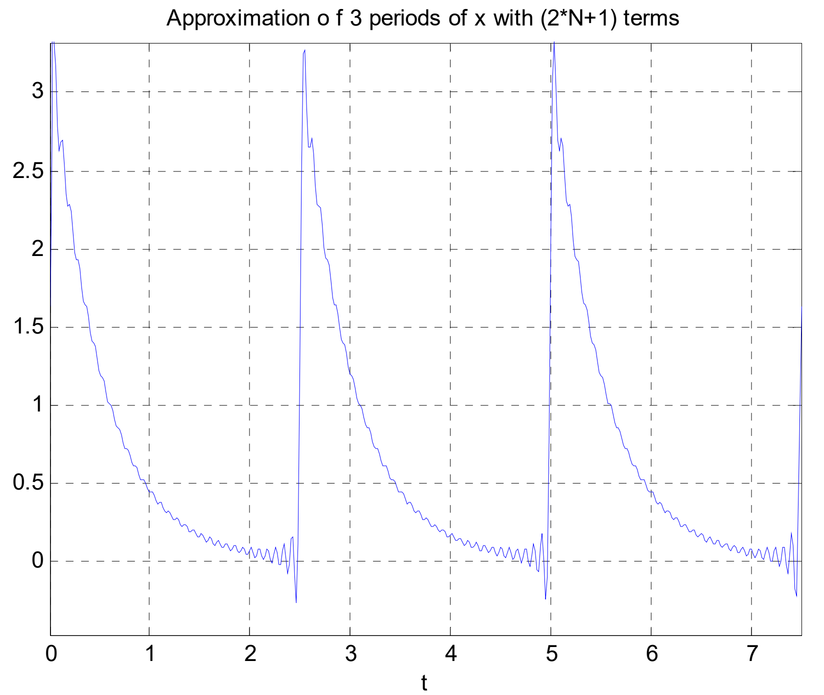
Задание 4.5

Да се определят коефициентите a_k на разложението в ред на Фурие на периодичния входен сигнал $x(t)$. По формула (3) да се изчисли апроксимиращата функция $x_N(t)$ при зададени стойности на N (по вашите варианти от таблицата – по две стойности).

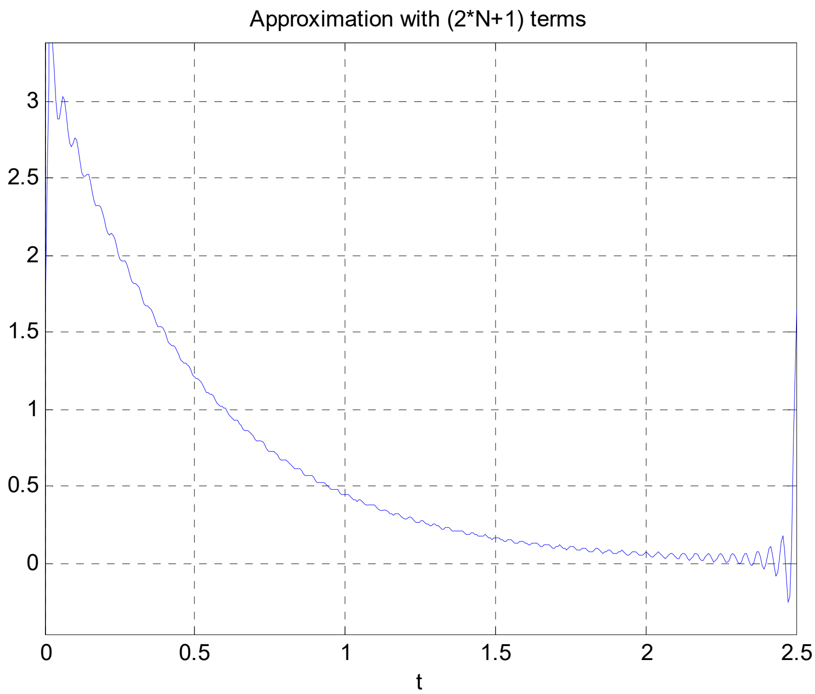
Примерни графики при N = 30 и при N = 60:



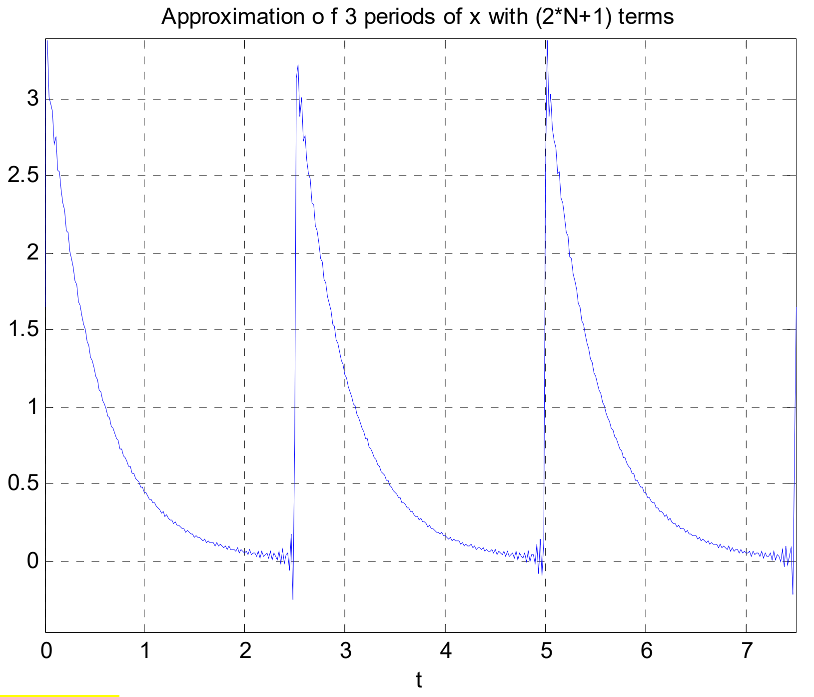
Фиг. 6. Апроксимация на експоненциала $x(t) = 2\, e^{(-2t+0.5)}$ с 61 компонента на разложението в РФ (N = 30)



Фиг. 7. Три периода $(t_0 \leq t \leq t_0 + 3T)$ на апроксимиращата функция $x_N(t)$ при с 61 компонента на разложението в РФ (N = 30)



Фиг. 8. Апроксимация на експоненциала $x(t) = 2\,e^{(-2t+0.5)}$ с 121 компонента на разложението в РФ (N = 60)



Фиг. 9. Три периода $(t_0 \leq t \leq t_0 + 3T)$ на апроксимиращата функция $x_N(t)$ при с 121 компонента на разложението в РФ (N = 60)

Варианти, $t_0 = 0$ – за всички варианти.

No	***a***	***T***	***A***	***θ***	варианти на N
1	+1.2	1.4	24	0.3	28, 55
2	+1.3	1.5	23	0.25	29, 56
3	+1.4	1.6	22	0.2	30, 58
4	+1.5	1.7	21	0.15	31, 60
5	+1.6	1.8	20	0.1	32, 61
6	+1.7	1.9	19	0.05	33, 65
7	+1.8	2.0	18	0.5	34, 66
8	+1.9	2.1	17	0.45	35, 68
9	+2.0	2.2	16	0.4	36, 69
10	+2.1	2.1	15	0.35	37, 71
11	+2.2	2.2	14	0.3	38, 75
12	+2.3	2.3	3	0.25	39, 76
13	+2.4	2.4	2	0.2	32, 70
14	+2.5	2.5	1	0.15	31, 65
15	+1.6	1.6	10	0.1	30, 62
16	+1.7	1.7	9	0.45	33, 60
17	+1.8	1.8	8	1.25	28, 57
18	+1.9	1.9	24	1.2	29, 62
19	+2.0	0.3	23	1.15	28, 57
20	+2.1	0.4	22	1.1	29, 62
21	+2.2	0.5	21	1.05	26, 55
22	+2.3	0.6	20	1	27, 54
23	+2.4	0.7	19	0.95	38, 75
24	+2.5	0.8	18	0.9	39, 76
25	+1.6	0.9	17	0.85	32, 70
26	+1.7	1.0	16	0.45	31, 65
27	+0.1	0.1	25	1.25	25, 50
28	+0.2	0.2	24	1.2	26, 51
29	+0.3	0.3	23	1.15	27, 52
30	+0.4	0.4	22	1.1	28, 55
31	+0.5	0.5	21	1.05	29, 56
32	+0.6	0.6	20	1	30, 58
33	+0.7	0.7	19	0.95	31, 60
34	+0.8	0.8	18	0.9	32, 61
35	+0.9	0.9	17	0.85	33, 65
36	+1.0	1.0	16	0.8	34, 66
37	+1.1	1.1	15	0.75	35, 68
38	+1.2	1.2	14	0.7	36, 69
39	+1.3	1.3	13	0.65	37, 71
40	+1.4	1.4	12	0.6	38, 75
41	+1.5	1.5	11	0.55	39, 76
42	+1.6	1.6	10	0.5	32, 70
43	+1.7	1.7	9	0.45	31, 65
44	+1.8	1.8	8	0.4	30, 62
45	+1.9	1.9	7	0.35	33, 60
46	+2.0	2.0	6	0.3	28, 57
47	+2.1	2.1	5	0.25	29, 62
48	+2.2	2.2	4	0.2	26, 55
49	+2.3	1.0	3	0.15	27, 54
50	+2.4	1.1	2	0.1	24, 50
No	***a***	***T***	***A***	***θ***	Варианти на N

No	a	T	A	θ	Варианти на N
51	+2.5	1.2	1	0.05	23, 68
52	+2.6	1.3	7	0.35	27, 52
53	+1.8	1.1	15	0.4	30, 62
54	+1.9	1.2	14	0.35	33, 60
55	+2.0	2.0	6	0.3	28, 57
56	+1.6	0.3	23	0.8	29, 62
57	+1.7	0.4	22	0.75	28, 57
58	+1.8	0.5	21	0.7	29, 62
59	+1.9	0.6	20	0.65	26, 55
60	+2.0	0.7	19	0.6	27, 54
61	+2.1	0.8	18	0.55	38, 75
62	+2.2	0.9	17	0.5	39, 76
63	+2.3	1.0	16	0.45	32, 70
64	+2.4	1.1	15	0.4	31, 65
65	+2.5	1.2	14	0.35	25, 50
66	+1.6	1.3	13	0.3	26, 51
67	+1.7	1.4	12	0.25	27, 52
68	+0.1	1.5	11	0.2	28, 55
69	+0.2	1.6	10	0.15	29, 56
70	+0.3	1.7	9	0.1	30, 58
71	+0.4	1.8	8	0.45	31, 60
72	+0.5	1.9	7	0.55	32, 61
73	+1.1	0.1	22	0.3	33, 65
74	+1.2	0.2	21	0.25	34, 66
75	+1.3	0.3	20	0.2	35, 68
76	+1.4	0.4	19	0.15	36, 69
77	+1.5	0.5	18	0.1	37, 71
78	+1.6	0.6	17	0.05	38, 75
79	+1.7	0.7	16	0.5	39, 76
80	+1.8	0.8	25	0.45	32, 72
No	a	T	A	θ	варианти на N