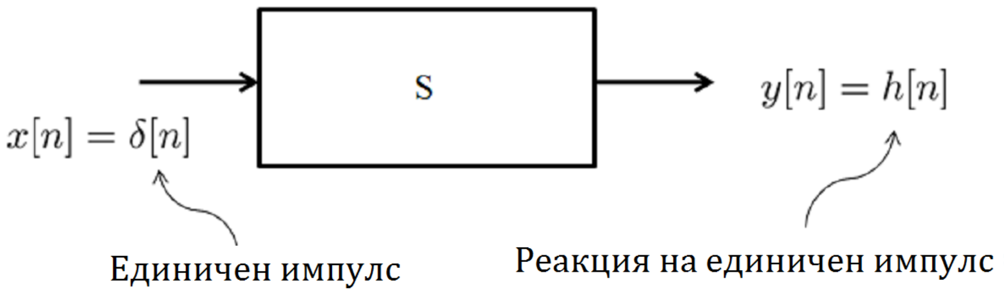
Задание 3. Конволюция

Какво е конволюция

Линейните инвариантни във времето (ЛИВ) системи са добри модели за много системи от реалния живот, и те имат свойства, които водят до много мощна и ефективна теория за анализ на тяхното поведение. По- нататък, ние ще изучаваме ЛИВ системите чрез тяхната характеристична функция, наречена **импулсна реакция** (или импулсна преходна функция).

Да започнем с това, като разгледаме дискретни във времето сигнали. Нека означим с *h[n]* "импулсната реакция" на ЛИВ системата *S*. Импулсната реакция, е реакцията на системата на единичен входен импулс (Фиг. 2.3). Припомнете си определението на единичен импулс:

$$\delta[n] = \begin{cases} 1, & n = 0 \\ 0, & n \neq 0 \end{cases} . \qquad (3.1)$$



Фигура 3.1 Определение на импулсна реакция

Нататък, да предположим, че **знаем**, че **импулсната реакция** на ЛИВ системата е *h[n]*. **Искаме да определим** изхода *y[n]*. За да направим това, ние първо изразяваме *x[n]* като сума от импулси:

$$x[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\delta[n-k] .$$

За всеки импулс *δ[n – k]*, можем да определим нейната импулсна реакция, защото за една ЛИВ система:

$$\delta[n] \longrightarrow h[n],$$

$\delta[n-k] \longrightarrow h[n-k]$ (отместване – системата е стационарна),

x[k] δ[n – k] ⟶x[k] h[n – k](мащабиране - системата е линейна).

Следователно, ние имаме

$$x[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\delta[n-k] \longrightarrow \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[n-k] = y[n].$$

Това уравнение

$$\boxed{y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[n-k] \qquad (3.2)}$$

е известно като **уравнение на конволюцията**.

Определение на конволюцията.

При входен сигнал *x[n]* и импулсна реакция на ЛИВ система *h[n]*, конволюцията между *x[n]* и *h[n]* се определя като

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[n-k].$$

Ние ще означаваме действието конволюция като

$$y[n] = x[n] * h[n].$$

За входния сигнал имаме аналогично обозначение

$$x[n] = x[n] * \delta[n].$$

- **равностойна форма**: Полагайки $m = n - k$, ние можем да покажем, че

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[n-k] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x[n-m]h[m] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[n-k]h[k].$$

Формулата за конволюцията е вярна само когато системата е ЛИВ. Ако системата е променлива във времето (нестационарна), тогава

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h_k[n-k],$$

т.е. *h[n]* е различна във всеки момент от времето *k*.

Лесно могат да бъдат доказани следните "стандартни" свойства:

1. Комутативност: $x[n] * h[n] = h[n] * x[n]$ (виж равностойната форма)
2. Асоциативност: $x[n] * (h_1[n] * h_2[n]) = (x[n] * h_1[n]) * h_2[n]$
3. Разпределителност: $x[n] * (h_1[n] + h_2[n]) = (x(t) * h_1[n]) + (x[n] * h_2[n])$

Как да изчислим конволюцията?

За да се изчисли конволюцията, има три основни стъпки:

1. Обръщане във времето;

2. Отместване във времето;
3. Умножение и сумиране.

Командата на Матлаб за изчисляване на конволюцията е **conv**. При нейното използване трябва да се вземат предвид следните 4 правила:

1. Двата сигнала (или входния сигнал и импулсната реакция на системата), които ще се конвулират трябва да бъдат дефинирани в **един и същи времеви интервл**.

2. Ако някой от сигналите се описва от много участъци, то те не бива да се презастъпват, например:

$$h(t) = \begin{cases} 1-t, & 0 \le t \le 1 \\ 0, & 1 \le t \le 2 \end{cases}$$
- има презастъпване

$$h(t) = \begin{cases} 1-t, & 0 \le t \le 1 \\ 0, & 1 < t \le 2 \end{cases}$$
- няма презастъпване

3. Изходът на командата conv трябва да бъде умножен със стъпката на времето, използвана в дефиницията на входните сигнали и на импулсната реакция, за да се изчисли правилно изхода на системата. Това правило се появява от факта, че интегралът на конволюцията се смята приблизително чрез сума в MATLAB (а не като интеграл във времето).

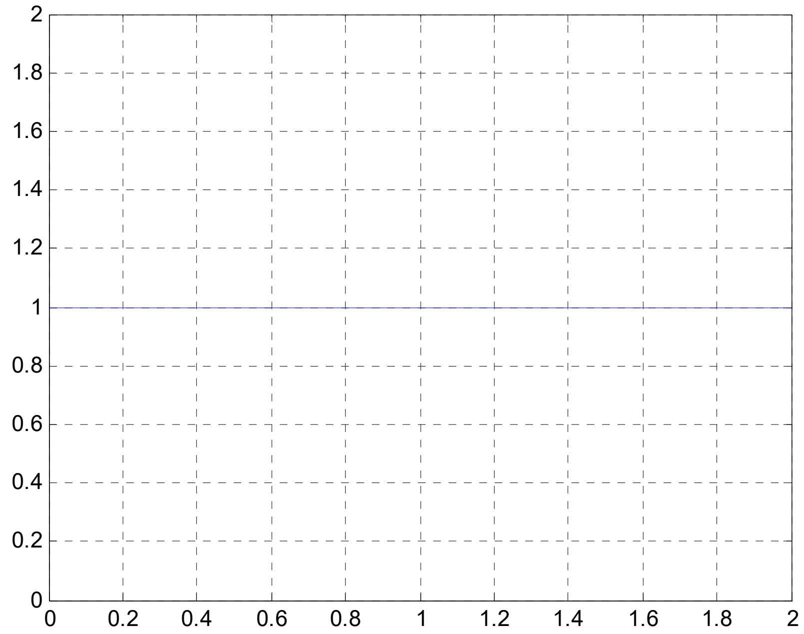
4. Изходът на системата се построява в интервал от време двойно по-голям от интервалите в които са определени входния сигнал и импулсната реакция на системата.

Пример – при вариант *a = 1*. Да се определи изходния сигнал на системата при входен сигнал $x(t)=1,\ 0 \le t \le 2$ и импулсна реакция:

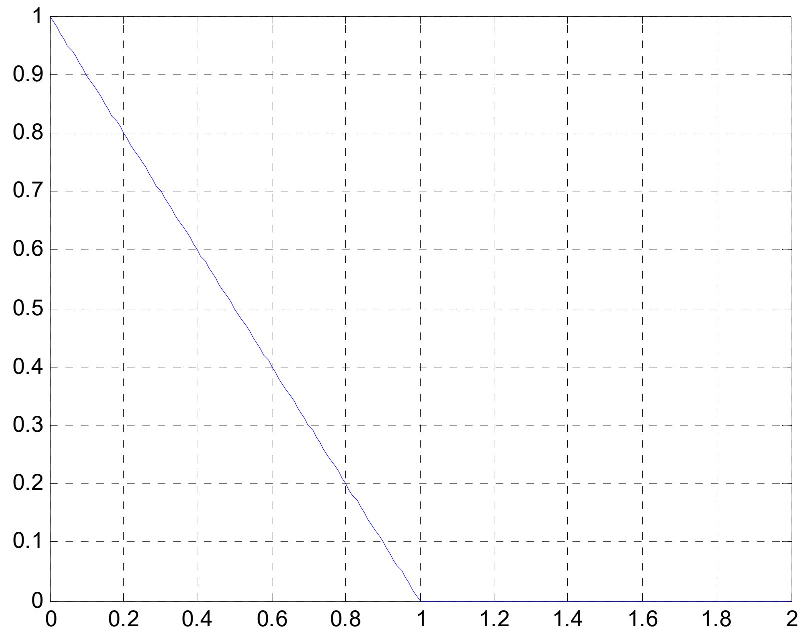
$$h(t) = \begin{cases} 1-t, & 0 \le t \le 1 \\ 0, & 1 < t \le 2 \end{cases}.$$

```
step=0.01;             % about 200 points
t=0:step:2;            % vector na diskretnoto vreme
x=ones(size(t));       % vector na vhodniq signal
plot(t,x); grid        % grafika na vhodniq signal (mozhe da ia razkrasite)
t1=0:step:1;          % 1-vi vremevi podinterval, neobhodim za presmqtaneto na h1
t2=1+step:step:2;  % 2-ri vremevi podinterval, neobhodim za presmqtaneto na h2
h1=1-t1;               % 1-vi podinterval na impulsnata reakcia h1
h2=zeros(size(t2)); % 2-ri podinterval na impulsnata reakcia h1
h=[h1 h2];             % impulsnata reakcia h
```

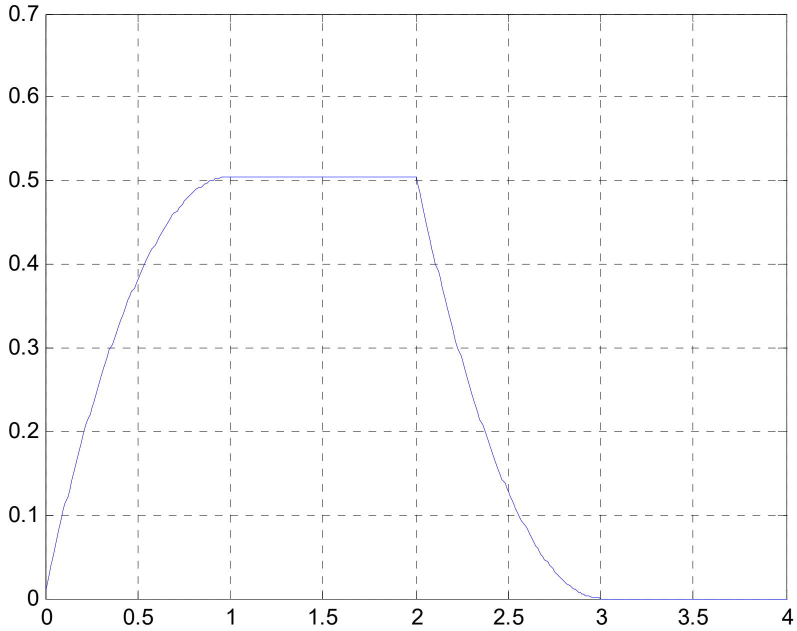
```
figure(2)
plot(t,h); grid        % grafika na impulsnata reakcia h
y=conv(x,h)*step;   % iz4islqwane na wektora na izhodniq signal y
ty=0:step:4;            % double time interval
figure(3)
plot(ty,y); grid       % grafika na izhodniq signal y
```



Фигура 3.2. Входен сигнал *x(t)*



Фигура 3.3. Импулсна реакция на системата *h(t)*



Фигура 3.4. Изходен сигнал *y(t)*

Задание 3.1

Да се определи изходния сигнал на системата при периодичен входен сигнал (по вашия вариант ~~от Задание 1.2~~ $x(t) = A\,e^{j\theta}e^{j\omega_0} = A\,e^{j(\omega_0 t+\theta)}$ – реална част) и импулсна реакция:

$$h(t) = \begin{cases} a - t, & 0 \leq t \leq 1 \\ 0, & 1 < t \leq 2 \end{cases}$$

Времеви диапазон на входния сигнал и импулсната реакция $t = 0 \ldots 2$ s.
Вземат се стойностите на a, A, θ и ω_0 от таблицата за съответния вариант.
Да се построят графики на реалната част на входния сигнал *x(t)*, импулсната реакция *h(t)* при $t = 0 \ldots 2$ s и на изходния сигнал *y(t)*- в удвоен времеви интервал 0 … 4 s.

Задание 3.2

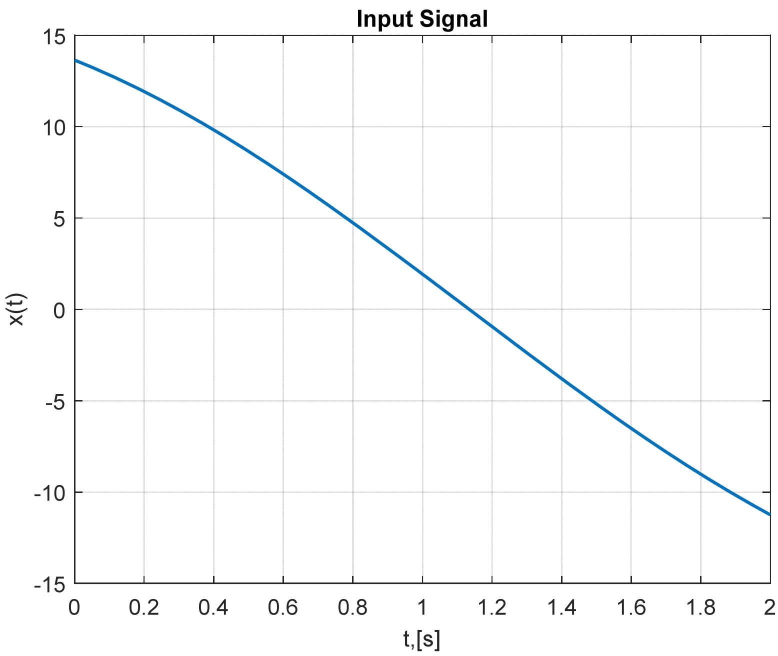
При известни изходен сигнал *y(t)*- (получен в Задание 3.1) и импулсна реакция *h(t)* – същата като в Задание 3.1 да се определи входния сигнал на системата *x(t)* с използването на командата на Матлаб за деконволюция `x=deconv(y,h)`. Сравнете графично получения резултат с оригиналния сигнал *x(t)*.

При използване на командата за деконволюция deconv в Матлаб е необходимо резултатът да се раздели на стъпката на дискретизация във времето (в случая 0.01 s) за да получим правилната амплитуда.

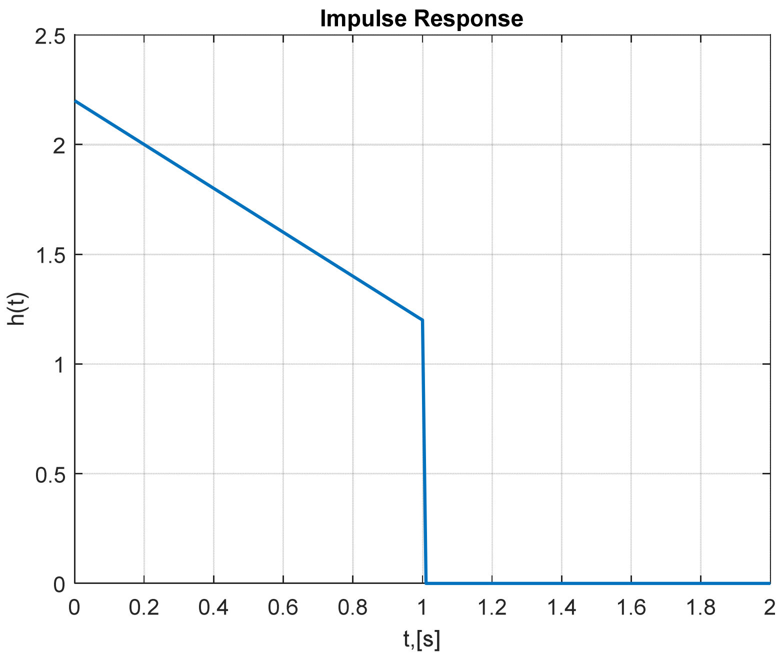
Задание 3.3

При известни входен сигнал *x(t))* – същия като в Задание 3.1 и изходен сигнал *y(t)* (получен в Задание 3.1) да се определи импулсна реакция на системата *h(t)* с използването на командата на Матлаб за деконволюция **`h=deconv(y,x)`**. Сравнете графично получения резултат с оригиналната импулсна реакция на системата *h(t)*.

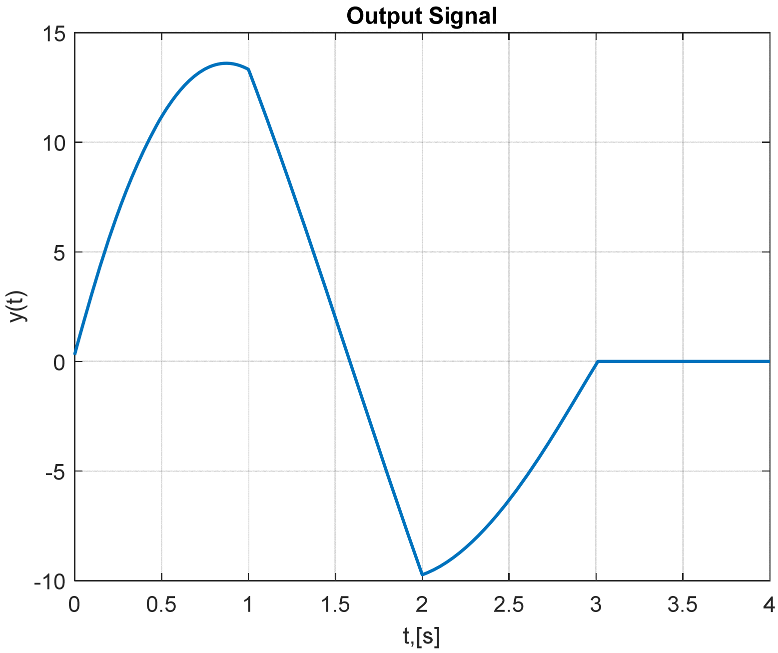
Примерни резултати при $a = 2.2$, $A = 16$, $\theta = 0.55$ и $\omega_0 = 0.9$.



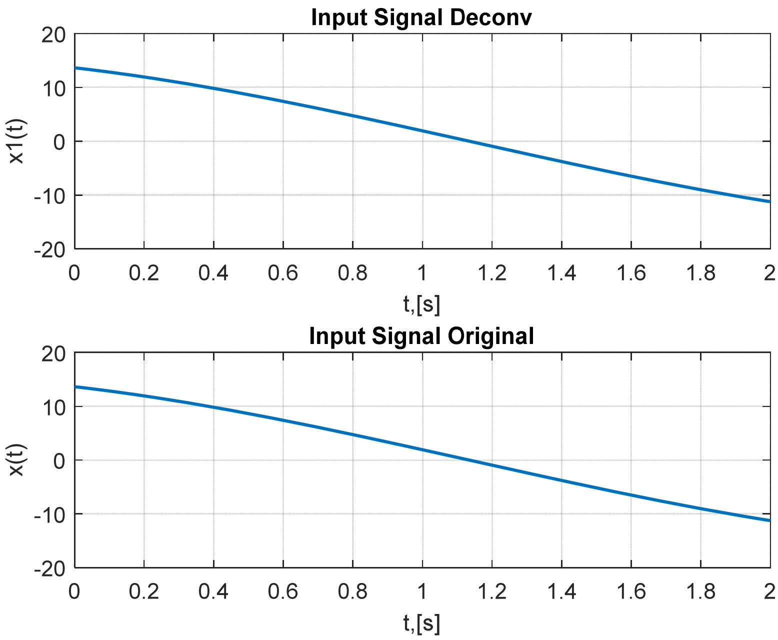
Фигура 3.5. Пример на входен сигнал *x(t)*



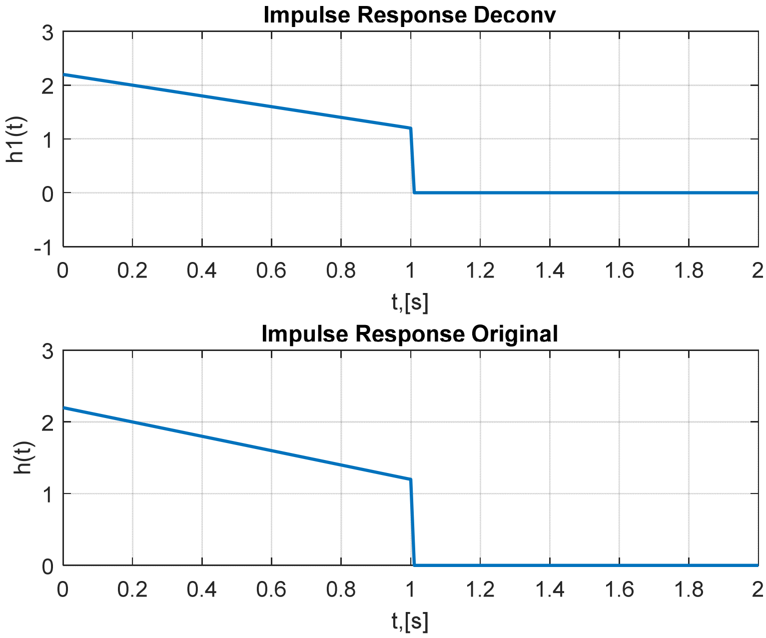
Фигура 3.6. Пример на импулсна реакция на системата *h(t)*



Фигура 3.7. Пример на изходен сигнал $y(t)$



Фигура 3.8. Сравнение на възстановения входен сигнал $x(t)$ с оригиналния



Фигура 3.9. Сравнение на възстановената импулсна реакция $h(t)$ с оригиналната

Таблица 1. Варианти на задания

No	a	ω_0	A	θ
1	1.7	1.6	17	1.05
2	1.8	1.7	16	1
3	1.9	1.8	15	0.95
4	2.0	1.9	14	0.9
5	0.1	2.0	13	0.85
6	0.2	0.1	12	0.8
7	0.3	0.2	25	0.75
8	0.4	0.3	24	0.7
9	1.1	0.4	23	0.65
10	1.2	0.1	22	0.6
11	1.3	0.2	21	1.25
12	1.4	0.3	20	1.2
13	1.5	0.4	19	1.15
14	1.6	1.1	18	1.1
15	0.1	1.2	17	1.05
16	0.2	1.3	16	1
17	0.3	1.4	15	0.95
18	0.4	1.4	14	0.9
19	1.1	1.5	13	0.85
20	1.2	1.6	12	0.8
21	1.3	1.7	19	0.75
22	1.4	1.8	18	0.7
23	0.3	1.9	17	0.65
24	0.4	2.0	16	0.6
25	1.1	0.1	15	1.25
26	1.2	0.2	14	1.2
27	1.3	0.3	13	1.15
28	1.4	0.4	12	1.1
29	1.5	1.1	25	1.05
30	1.6	1.2	24	1
31	0.1	1.3	23	0.95
32	0.2	1.4	22	0.9
33	0.3	1.5	21	0.85
34	1.6	1.6	20	0.8
35	1.7	1.7	19	0.75
36	1.8	1.8	18	0.7
37	1.9	1.9	17	0.65
38	2.0	2.0	16	0.6
39	0.1	0.1	15	1.25
40	0.2	0.2	14	1.2
41	0.3	0.3	13	1.15
42	0.4	0.4	12	1.1
43	1.2	1.1	25	1.05
44	1.3	1.2	24	1
45	1.4	1.3	23	0.95
46	1.5	1.4	22	0.9

47	1.6	1.5	21	0.85
48	1.7	1.6	20	0.8
49	1.8	1.7	19	0.75
50	1.9	1.8	18	0.7
51	2.0	1.9	17	0.65
52	0.1	2.0	16	0.6
53	0.2	0.1	15	1
54	0.3	0.2	14	0.95
55	0.4	0.3	13	0.9
56	0.4	0.4	12	0.85
57	1.1	1.8	14	0.9
58	1.2	1.9	13	0.85
59	1.3	2.0	12	0.8
60	1.4	0.1	25	0.75
61	1.5	0.2	24	0.7
62	1.6	0.3	23	0.65
63	0.1	0.4	22	0.6
64	0.2	1.1	21	1.25
65	0.3	1.2	20	1.2
66	1.6	1.3	19	1.15
67	1.7	1.4	18	1.1
68	1.8	1.5	17	1.05
69	1.9	1.6	16	1
70	2.0	1.7	15	0.95
71	0.1	1.8	14	0.9
72	0.2	1.9	14	0.9
73	0.3	2.0	13	0.85
74	0.4	0.1	12	0.8
75	1.2	0.2	25	0.75
76	1.3	0.3	24	0.7
77	1.4	0.4	23	0.65
78	1.5	0.1	22	0.6
79	1.6	0.2	21	1.25
80	1.7	0.3	20	1.2