Задание 2. Комплексни експоненциали в дискретно време.

Операции с дискретни сигнали

Теория

1 Определения

Функцията на комплексния експоненциал в дискретно време има вида: $x[n] = Ce^{\beta n}$, където *C*, $\beta \in \mathbb{C}$. Замествайки с $\alpha = e^{\beta}$ получаваме $x[n] = C\alpha^n$.

2 Комплексен експоненциал с комплексни стойности

x[n] е комплексен експоненциал с комплексни стойности, когато *C*, $\alpha \in \mathbb{C}$. В този случай, *C* и α могат да бъдат записани като $C = |C|e^{j\theta}$ и $\alpha = |\alpha|e^{j\Omega_0}$. Следователно,

$$\begin{aligned} x[n] = C\alpha^n &= |C|e^{j\theta}\left(|\alpha|e^{j\Omega_0}\right)^n \\ &= |C||\alpha|^n e^{j(\Omega_0 n+\theta)} \\ &= |C||\alpha|^n \cos(\Omega_0 n + \theta) + j|C||\alpha|^n \sin(\Omega_0 n + \theta). \end{aligned}$$

Тук могат да бъдат разгледани три случая:

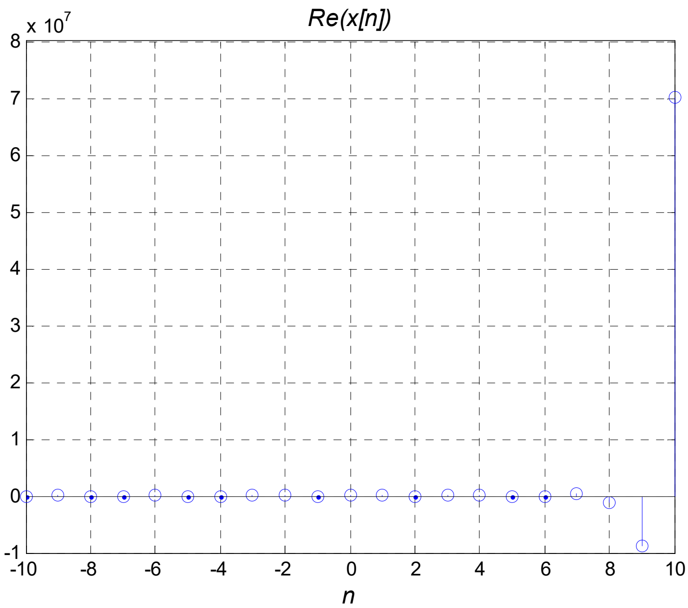
1. Когато |α| = 1, тогава $x[n] = |C|\cos(\Omega_0 n + \theta) + j|C|\sin(\Omega_0 n + \theta)$ и тя има синусоидални реални и имагинерни части (все пак не задължително периодични).

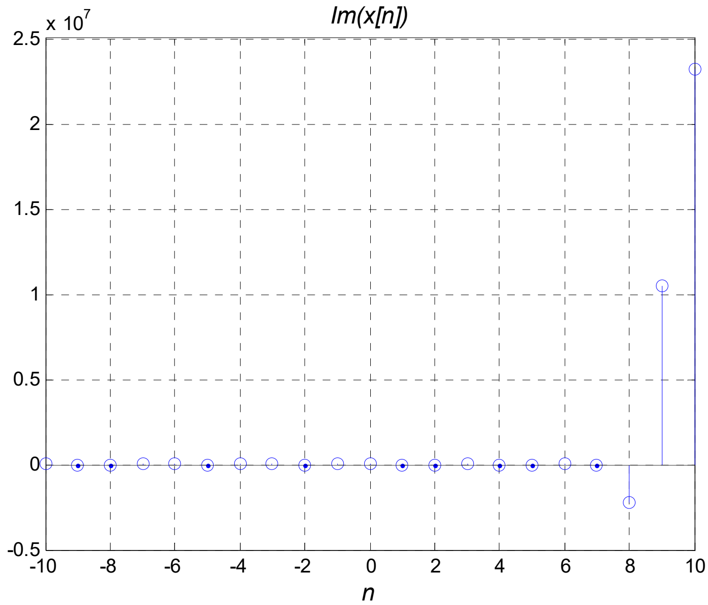
2. Когато |α| > 1, тогава |α|n е нарастващ експоненциал и реалните и имагинерните части на *x[n]* са произведения със синусоиди.

3. Когато |α| < 1, тогава реалните и имагинерните части на *x[n]* са синусоиди, ограничени от спадащ експоненциал.

Задание 2.1 Да се изобрази дискретния сигнал $x[n] = |C||\alpha|^n e^{j(\Omega_0 n+\theta)}$ при зададените за съответния вариант стойности на *C*, *α* и за *n = -10 … 10*.

Примерни графики при *C=2+3i* и *α = -2 -5i*:





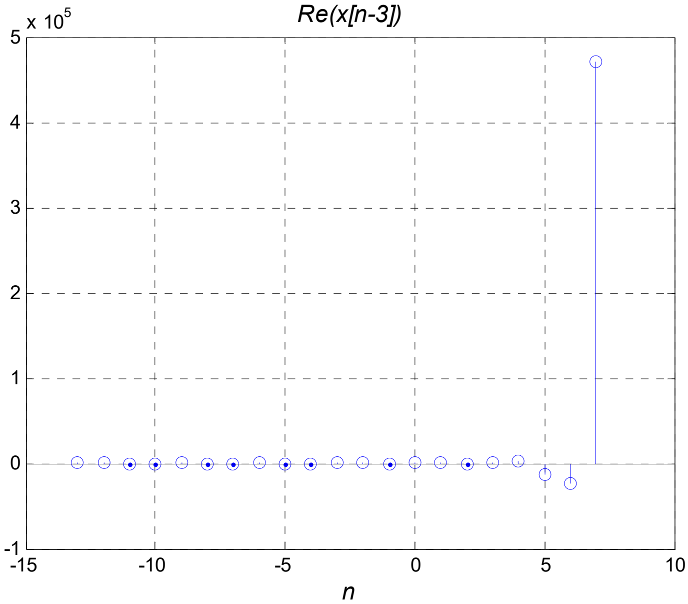
Указания за 2.1

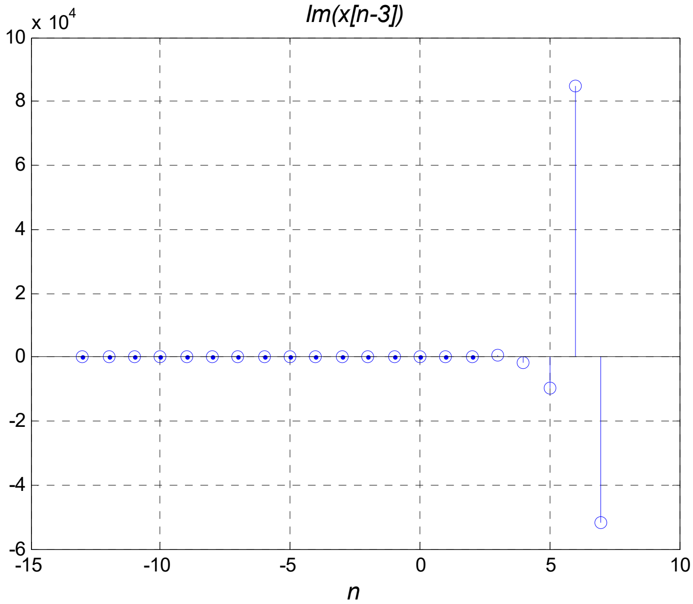
- Създайте вектор със стойности на n = -10 до 10 през 1.
- Изчислете стойностите на x[n] за всяка стойност на n и ги съхранете във вектора x.
- Изобразете стойностите на дискретния сигнал x от n. За изобразяването на дискретни сигнали използвайте вместо команда plot(.), команда stem(n, x). Синтаксисът й е аналогичен.
- Използвайте команда `figure(.)`с пореден номер за да запазите предните графики за отчета.

Примерен код при C = 2+3i и *α = -2 -5i*:

```
% Задание 2.1
n=-10:10;
x=(2+3i)*(-2 -5i).^n;
figure(1)
stem(n,real(x)), grid
...% надпишете фигурата с команди title, xlabel, ylabel,
...
...
% Задание 2.2
figure(2)
...
...
```

Задание 2.2 Да се изобрази отместения във времето *n* дискретен сигнал $x[n - n_0]$ при зададената за съответния вариант стойност на n_0. Примерни графики при $n_0 = 3$:





Теория за Задание 2.2 :

1.1. Основни операции със сигнали

1.6.1 Отместване във времето

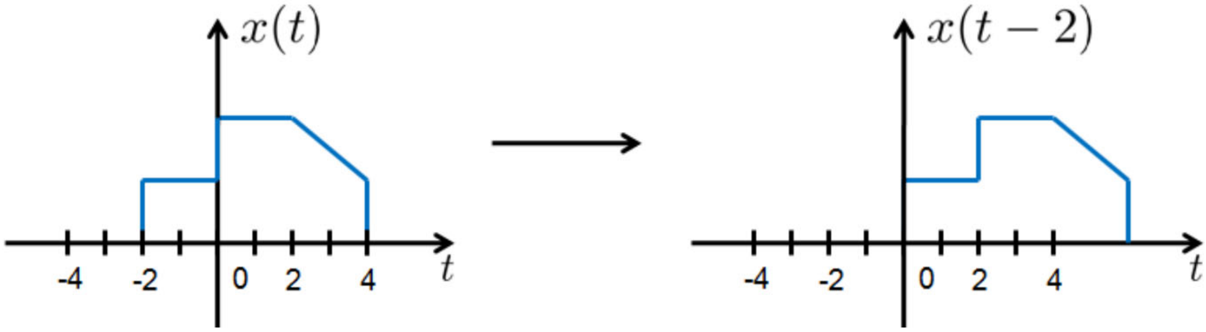
За всяко $t_0 \in \mathbb{R}$ и $n_0 \in \mathbb{Z}$ отместването във времето е операция, определена като

$$\begin{array}{lcl} x(t) & \longrightarrow & x(t-t_0) \\ x[n] & \longrightarrow & x[n-n_0]. \end{array} \quad (1.2)$$

Първото уравнение се отнася за случая с непрекъснат във времето сигнал, докато второто е за дискретен във времето сигнал.

Ако $t_0 > 0$, отместването във времето е известно като „закъснение". Ако $t_0 < 0$, отместването във времето е известно като „предварение".

Пример. На фиг. 1.2, лявото изображение показва непрекъснатия във времето сигнал *x(t)*. Изместената във времето версия *x(t–2)* е показана в дясната част на фигурата.



Фигура 1.2 Пример за отместване във времето

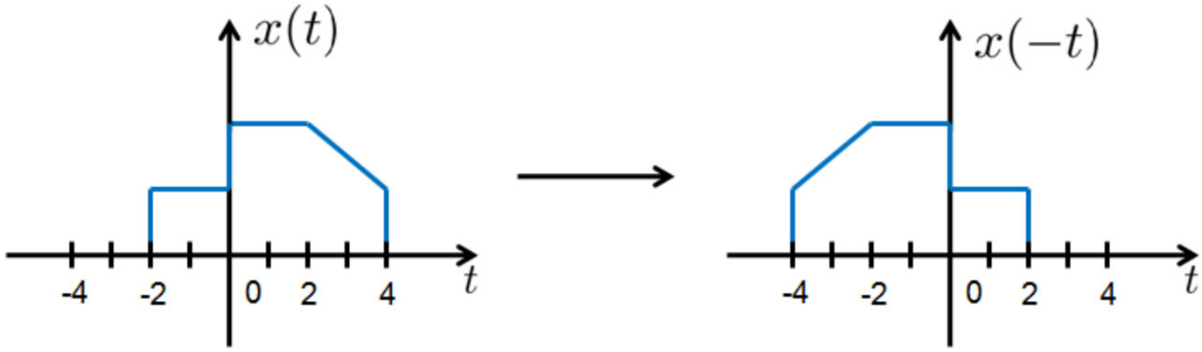
1.6.2 Обръщане на времето

Обръщането на времето времето се определя със следната операция

$$\begin{array}{lcl} x(t) & \longrightarrow & x(-t) \\ x[n] & \longrightarrow & x[-n] \end{array}, \tag{1.3}$$

което може да се разглежда като "преобръщане по оста *Y*".

Пример. На фиг. 1.3, лявото изображение показва непрекъснатия във времето сигнал *x(t)*. Преобърнатата във времето версия *x(−t)* е показана в дясната част на фигурата.



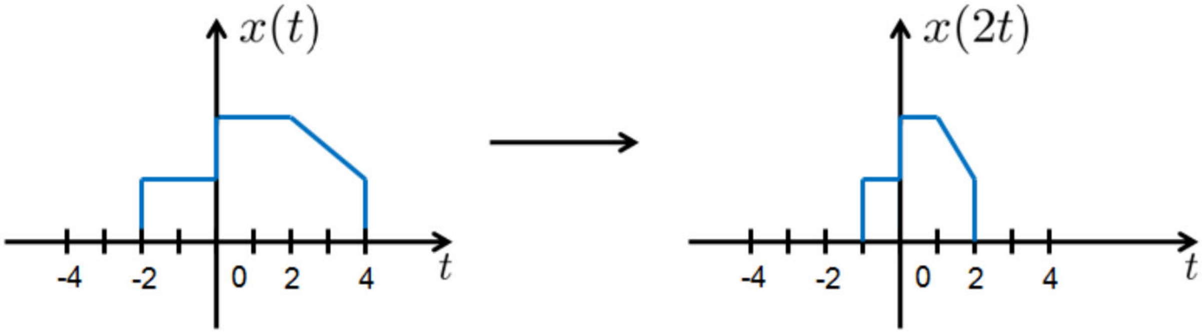
Фигура 1.3 Пример за обръщане на времето

1.6.3 Мащабиране във времето

Мащабирането във времето е операция, където променливата време *t* се умножава с константа *a*:

$$x(t) \longrightarrow x(at), \quad a > 0. \tag{1.4}$$

Ако *a > 1*, времевата скала на получения сигнал се "свива" (ускоряване). Този процес се нарича децимация. Ако *0 < a <1*, времевата скала на получения сигнал се "разтяга“ (експандиране).



Фигура 1.4 Пример за мащабиране във времето

1.6.4 Комбиниране на операции

Като цяло, линейна операция (във времето) на сигнала *x(t)* може да се изрази като *y(t) = x(at – b); a, b* $\in \mathbb{R}$. Има два метода да се опише изходния сигнал *y(t) = x(at – b).*

Метод А: "Отместване, след това мащабиране" (препоръчително)

1) Определяме $v(t) = x(t-b)$;

2) Определяме $y(t) = v(at) = x(at-b)$.

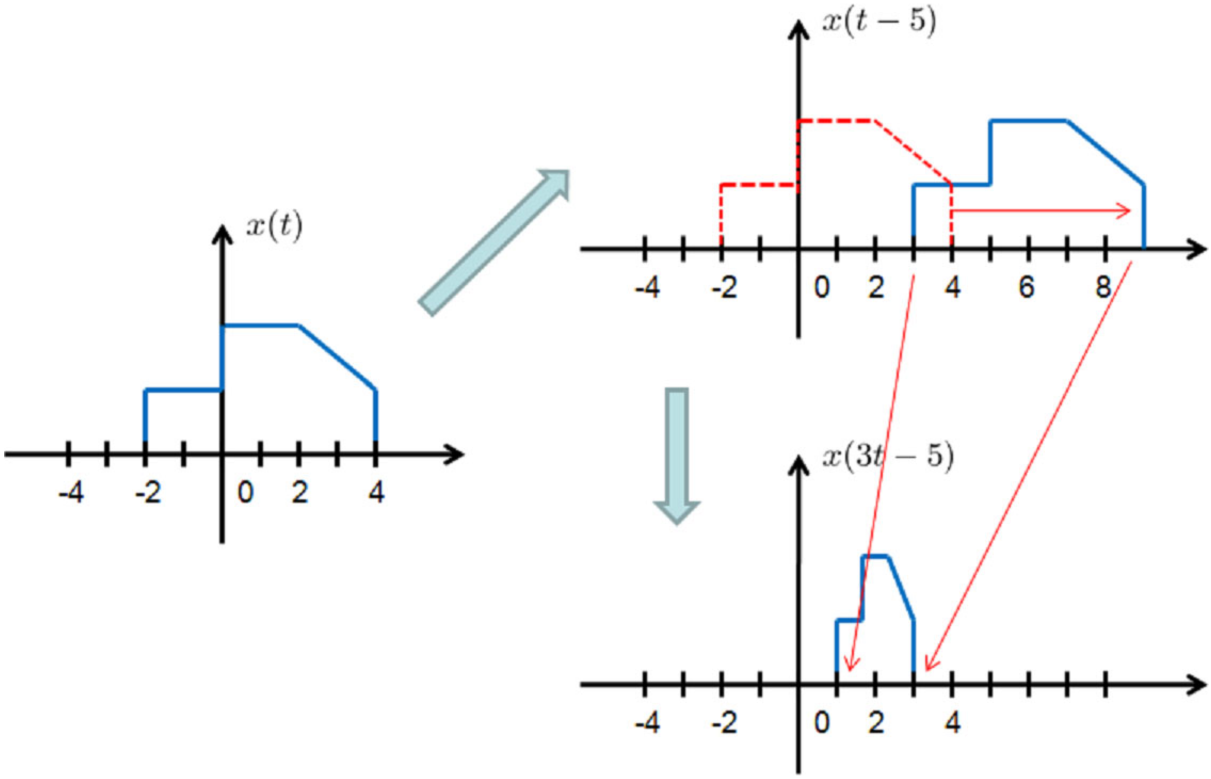
Метод Б: " Мащабиране, след това отместване"

1) Определяме $v(t) = x(at)$;

2) Определяме $y(t) = v(t - \frac{b}{a}) = x(at-b)$.

Пример.1 Отместване и мащабиране във времето

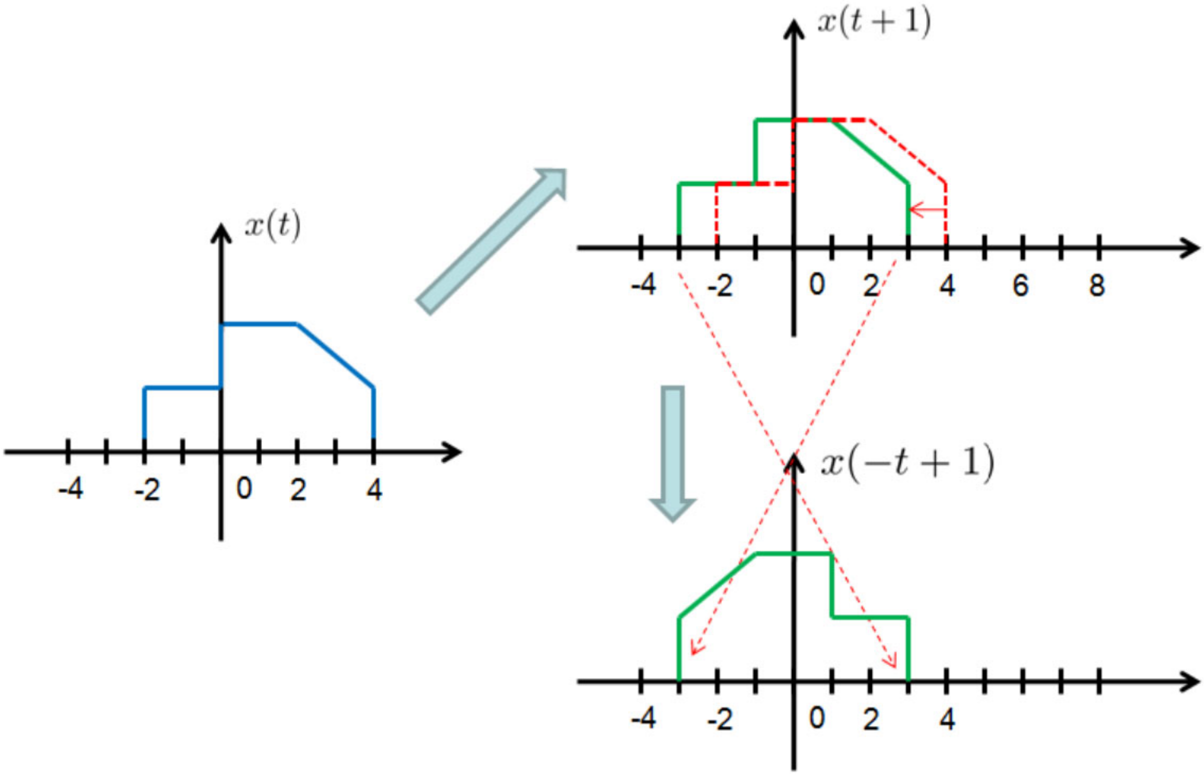
За сигнала *x(t)*, показан на фиг. 1.5, да се изобрази *x(3t – 5).*



Фигура 1.5 Пример. 1 за комбинирана операция *y = x(3t – 5)*

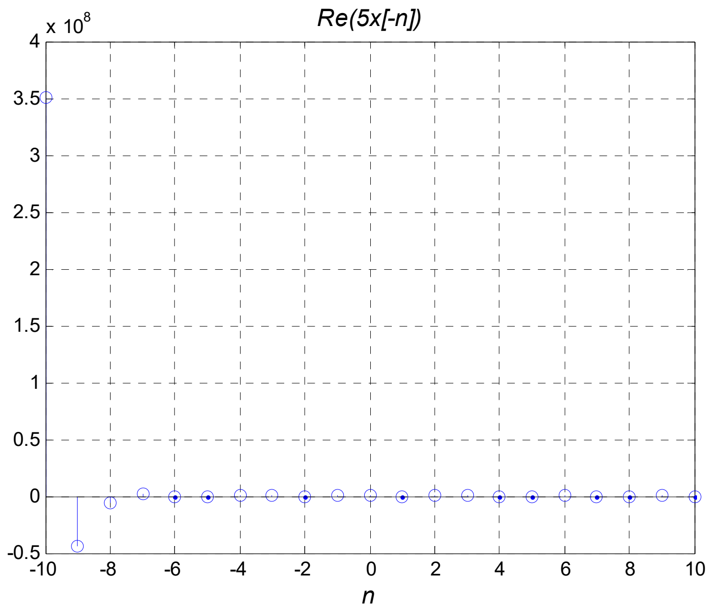
Пример.2 Обръщане на времето и отместване

За сигнала *x(t)*, показан на фиг. 1.6, да се изобрази *x(1 – t).*



Фигура 1.6 Пример. 2 за комбинирана операция *y = x(– t + 1)*

Задание 2.3 Да се изобрази мащабирания и обърнат в времето *n* сигнал *A x[–n]* при зададената за съответния вариант стойност на *A*. **Пример** за A=5:



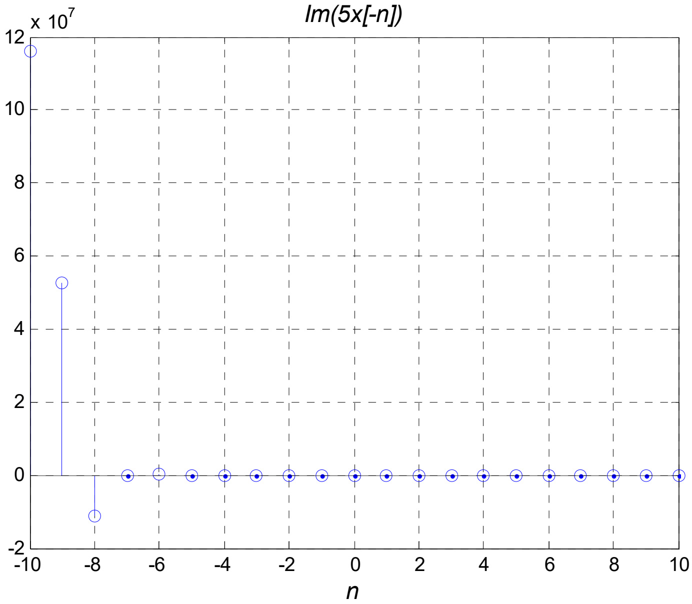


Таблица 1. Варианти на задания

No	α	C	n_0	A
1	-0.1+2.1j	25+7j	3	25
2	-0.2+2j	24+6.5j	-3	24
3	-0.3+1.9j	23+6.5j	5	23
4	-0.4+1.8j	22+6.5j	-5	22
5	-0.5+1.7j	21-6j	4	21
6	-0.6+1.6j	20-6j	-4	20
7	0.7+1.5j	19-5j	2	19
8	0.8+1.4j	18-5j	-2	18
9	0.9+1.3j	17+4.5j	6	17
10	1.0+1.2j	16+5.5j	-6	16
11	1.1+1.1j	15+4j	5	15
12	1.2+1j	14+8j	-5	14
13	1.3+0.9j	13-6j	7	13
14	1.4+0.8j	12-5j	-7	12
15	-1.5+0.7j	11-4j	1	11
16	-1.6+0.6j	10-4.5j	-1	10
17	-1.7+0.5j	9+8j	4	9
18	-1.8+0.4j	8+6.5j	-4	8
19	-1.9+0.3j	7+3.5j	6	7
20	2.0+0.2j	6+2.5j	-6	6
21	2.1+0.1j	5-3j	8	5
22	2.2-2j	4+4j	2	4
23	2.3+1.5j	3-3j	-2	-3
24	2.4+1.5j	2+3j	-3	-2
25	2.5-3j	1-2j	3	-3
26	-2.5+3j	5-4j	-5	5
27	25+7j	-0.1+2.1j	3	25
28	24+6.5j	-0.2+2j	-3	24
29	23+6.5j	-0.3+1.9j	5	23
30	22+6.5j	-0.4+1.8j	-5	22
31	21-6j	-0.5+1.7j	4	21
32	20-6j	-0.6+1.6j	-4	20
33	19-5j	0.7+1.5j	2	19
34	18-5j	0.8+1.4j	-2	18
35	17+4.5j	0.9+1.3j	6	17
36	16+5.5j	1.0+1.2j	-6	16

37	15+4j	1.1+1.1j	5	15
38	14+8j	1.2+1j	-5	14
39	13-6j	1.3+0.9j	7	13
40	12-5j	1.4+0.8j	-7	12
41	11-4j	-1.5+0.7j	1	11
42	10-4.5j	-1.6+0.6j	-1	10
43	9+8j	-1.7+0.5j	4	9
44	8+6.5j	-1.8+0.4j	-4	8
45	7+3.5j	-1.9+0.3j	6	7
46	6+2.5j	2.0+0.2j	-6	6
47	5-3j	2.1+0.1j	8	5
48	4+4j	2.2-2j	2	4
49	3-3j	2.3+1.5j	-2	-3
50	2+3j	2.4+1.5j	-3	-2
51	2-3j	25+7j	3	25
52	-2+3j	24+6.5j	-3	24
53	-12-3.5j	23+6.5j	5	23
54	12+3.5j	22+6.5j	-5	22
55	-1-18j	21-6j	4	21
56	1+23j	20-6j	-4	20
57	2.25-2.5j	19-5j	2	19
58	-2.25+1j	18-5j	-2	18
59	20-5j	17+4.5j	6	17
60	-20+5j	16+5.5j	-6	16
61	13-1j	15+4j	5	15
62	-13+2j	14+8j	-5	14
63	-3-3j	13-6j	7	13
64	3+18j	12-5j	-7	12
65	1.2+2.1j	11-4j	1	11
66	-2.1-1.2j	10-4.5j	-1	10
67	11+5j	9+8j	4	9
68	-11-4.3j	8+6.5j	-4	8
69	1.3-0.9j	7+3.5j	6	7
70	11+1.8j	6+2.5j	-6	6
71	-1.5-0.7j	5-3j	8	5
72	-1.6+1.6j	4+4j	2	4
73	-1.7+2.5j	3-3j	-2	-3
74	-1.8-0.4j	-0.4+1.8j	-3	-2
75	-1.9-0.3j	-0.5+1.7j	3	-3
76	2.0+2.2j	-0.6+1.6j	-5	23
77	2.1-20.1j	0.7+1.5j	3	22
78	12.2-2j	0.8+1.4j	-3	21
79	2.3+15j	0.9+1.3j	3	20
80	2.4+1.5j	1.0+1.2j	7	19
No	α	C	n_0	A