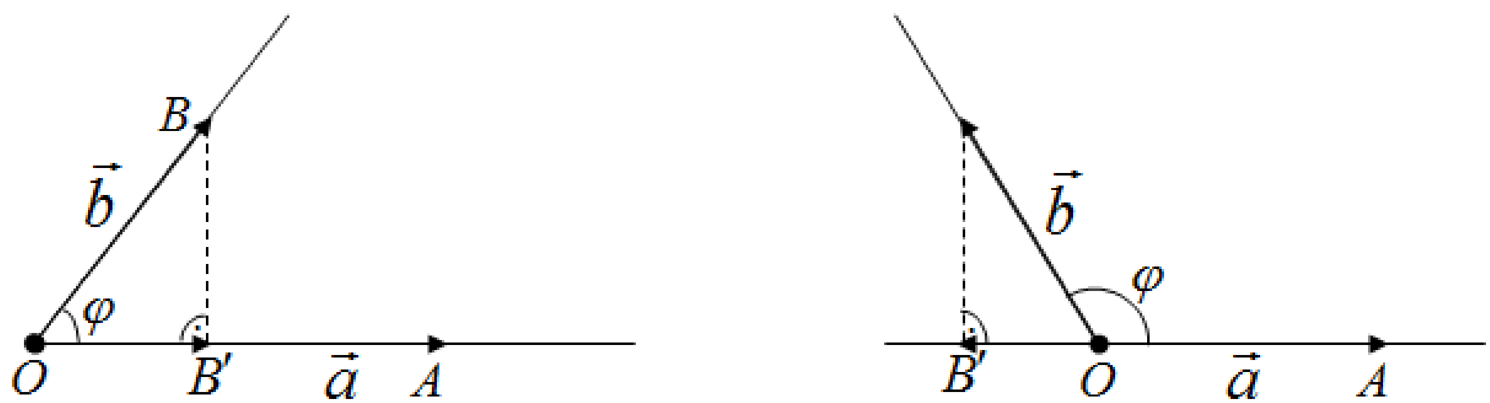
Тема 5.

Скаларно произведение. Евклидово векторно пространство. Дължина на вектор и ъгъл между два вектора

1. Скаларно произведение на свободни вектори

Нека $\vec{a}$ и $\vec{b}$ са свободни вектори. Ако $\vec{a} = \overrightarrow{OA}$ и $\vec{b} = \overrightarrow{OB}$, то ъгълът $\varphi \in [0, \pi]$ между лъчите $\overrightarrow{OA}$ и $\overrightarrow{OB}$ се нарича *ъгъл между свободните вектори* $\vec{a}$ и $\vec{b}$, който означаваме с $\varphi = \sphericalangle(\vec{a}, \vec{b})$.



Фиг. 5.1

Определение 5.1. ***Скаларно умножение*** на свободни вектори $\vec{a}$ и $\vec{b}$ се нарича действие, при което на $\vec{a}$ и $\vec{b}$ се съпоставя реалното число $\vec{a}\vec{b}$ по следния начин:

а) ако $\vec{a} = \vec{o}$ или $\vec{b} = \vec{o}$, то $\vec{a}\vec{b} = 0$;

б) ако $\vec{a}, \vec{b} \neq \vec{o}$, то

$$\vec{a}\vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}| \cos\varphi = |\vec{a}||\vec{b}| \cos \sphericalangle(\vec{a}, \vec{b}). \tag{5.1}$$

Числото $\vec{a}\vec{b}$ се нарича ***скаларно произведение*** на свободните вектори $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

Числото $\vec{a}^2 = \vec{a}\vec{a}$ се нарича ***скаларен квадрат*** на свободния вектор $\vec{a}$. Тъй като $\sphericalangle(\vec{a}, \vec{a}) = 0$, то съгласно (5.1) получаваме $\vec{a}^2 = |\vec{a}|^2$, откъдето следва формулата за дължина на свободен вектор

$$|\vec{a}| = \sqrt{\vec{a}^2}. \tag{5.2}$$

Векторът $\overrightarrow{OB'}$ (фиг. 5.1) се нарича ортогонална проекция на $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$ върху $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$.
Означаваме $\mathrm{proj}_{\vec{a}}\vec{b} = |\overrightarrow{OB'}|$, ако векторите $\overrightarrow{OA}$ и $\overrightarrow{OB'}$ са еднопосочно колинеарни, т.е. ъгълът φ е остър (чертежа в лявата страна на фиг. 5.1) и $\mathrm{proj}_{\vec{a}}\vec{b} = -|\overrightarrow{OB'}|$, ако $\overrightarrow{OA}$ и $\overrightarrow{OB'}$ са разнопосочно колинеарни, т.е. φ е тъп (чертежа в дясната страна на фиг. 5.1).

Тогава от правоъгълния триъгълник OBB' следва

$$\cos\varphi = \frac{\mathrm{proj}_{\vec{a}}\vec{b}}{|\vec{b}|}.$$

След заместване на $\cos\varphi$ от горното равенство в (5.1) получаваме още едно представяне на скаларното произведение $\vec{a}\vec{b}$:

$$\vec{a}\vec{b} = |\vec{a}|\mathrm{proj}_{\vec{a}}\vec{b} \qquad \Rightarrow \qquad \mathrm{proj}_{\vec{a}}\vec{b} = \frac{\vec{a}\vec{b}}{|\vec{a}|}.$$

Теорема 5.1. *Скаларното произведение на свободни вектори притежава следните свойства:*

1) $\vec{a}\vec{b} = \vec{b}\vec{a}$ (*комутативност*);

2) $\vec{a}(\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a}\vec{b} + \vec{a}\vec{c}$ (*дистибутивност*);

3) $(\lambda\vec{a})\vec{b} = \lambda(\vec{a}\vec{b})$ (*хомогенност*);

4) $\vec{a}^2 > 0$ за $\vec{a} \neq \vec{o}$, (*позитивност*),

за произволни свободни вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ *и* $\lambda \in \mathbb{R}$.

От 4) следва, че $\vec{a}^2 = 0$, точно когато $\vec{a} = \vec{o}$.

От (5.1) следва, че ъгълът между ненулевите свободни вектори $\vec{a}$ и $\vec{b}$ се пресмята чрез

$$\cos\sphericalangle(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\vec{a}\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}.$$

От последното равенство се вижда, че $\cos\sphericalangle(\vec{a},\vec{b}) = 0$, точно когато $\vec{a}\vec{b} = 0$. Следователно два ненулеви свободни вектора са ортогонални ($\sphericalangle(\vec{a},\vec{b}) = 90^\circ$), точно когато скаларното им произведение е равно на 0.

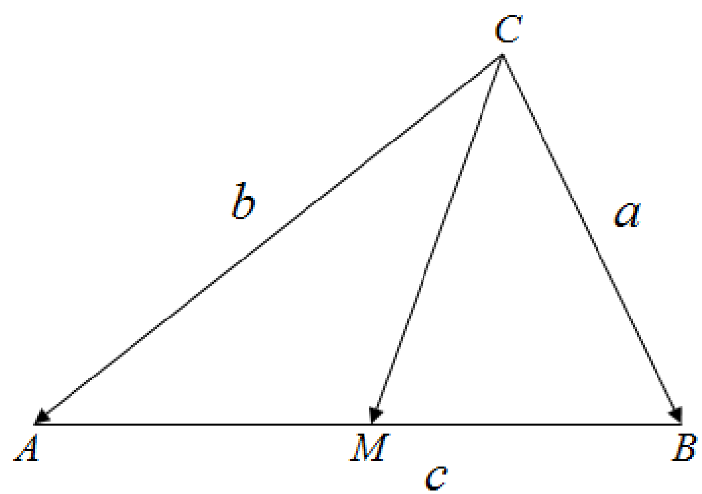
Освен това знакът на $\cos\sphericalangle(\vec{a},\vec{b})$ се определя от знака на $\vec{a}\vec{b}$. Следователно $\sphericalangle(\vec{a},\vec{b})$ е остър, точно когато $\vec{a}\vec{b} > 0$ и $\sphericalangle(\vec{a},\vec{b})$ е тъп, точно когато $\vec{a}\vec{b} < 0$.

Като използваме Теорема 5.1, лесно се установява, че за произволни свободни вектори $\vec{a}$ и $\vec{b}$ е в сила:

$$(\vec{a} \pm \vec{b})^2 = \vec{a}^2 \pm 2\vec{a}\vec{b} + \vec{b}^2. \tag{5.3}$$

Наистина, $(\vec{a} \pm \vec{b})^2 = (\vec{a} \pm \vec{b})(\vec{a} \pm \vec{b})$, което съгласно свойство 2) е равно на $\vec{a}(\vec{a} \pm \vec{b}) \pm \vec{b}(\vec{a} \pm \vec{b})$. След като още един път приложим същото свойство, имаме $(\vec{a} \pm \vec{b})^2 = \vec{a}^2 \pm \vec{a}\vec{b} \pm \vec{b}\vec{a} + \vec{b}^2$, откъдето поради 1) получаваме търсения резултат.

Пример 5.1. Нека е даден $\triangle ABC$, $|BC| = a$, $|CA| = b$, $|AB| = c$, за който т. M е среда на AB. Изразете дължината на медианата CM чрез дължините на страните на триъгълника.



Фиг. 5.2

Първо ще изведем една помощна формула за скаларното произведение на два вектора с общо начало. Например за векторите $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$. Съгласно (5.3) пресмятаме

$$\overrightarrow{BC}^2 = (\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB})^2 = \overrightarrow{AB}^2 - 2\overrightarrow{AB}\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AC}^2.$$

От последното равенство изразяваме скаларното произведение $\overrightarrow{AB}\overrightarrow{AC}$ и така получаваме

$$\overrightarrow{AB}\overrightarrow{AC} = \tfrac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB}^2 + \overrightarrow{AC}^2 - \overrightarrow{BC}^2\right). \tag{5.4}$$

Известно е, че ако M е среда на отсечката AB, то

$$\overrightarrow{CM} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB}\right).$$

Повдигаме двете страни на горното равенство на квадрат и получаваме

$$\overrightarrow{CM}^2 = \tfrac{1}{4}\left(\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB}\right)^2 = \tfrac{1}{4}\left(\overrightarrow{CA}^2 + 2\overrightarrow{CA}\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{CB}^2\right). \tag{5.5}$$

За пресмятането на $\overrightarrow{CA}\overrightarrow{CB}$ използваме (5.4). Имаме $\overrightarrow{CA}\overrightarrow{CB} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{CA}^2 + \overrightarrow{CB}^2 - \overrightarrow{AB}^2)$. Тогава, след заместване на получения резултат в (5.5) и групиране на събираемите, достигаме до равенството

$$\overrightarrow{CM}^2 = \frac{1}{4}\left(2\overrightarrow{CA}^2 + 2\overrightarrow{CB}^2 - \overrightarrow{AB}^2\right) = \frac{1}{4}\left(2a^2 + 2b^2 - c^2\right). \quad (5.6)$$

За получаване на горното равенство използвахме и че

$$\overrightarrow{BC}^2 = |\overrightarrow{BC}|^2 = a^2,\ \overrightarrow{AC}^2 = |\overrightarrow{AC}|^2 = b^2,\ \overrightarrow{AB}^2 = |\overrightarrow{AB}|^2 = c^2.$$

Окончателно, съгласно (5.2) и (5.6), пресмятаме

$$|CM| = |\overrightarrow{CM}| = \sqrt{\overrightarrow{CM}^2} = \frac{1}{2}\sqrt{2a^2 + 2b^2 - c^2}.$$

2. Евклидово пространство

Скаларното произведение на свободни вектори може да бъде обобщено за векторите на произволно векторно пространство.

Определение 5.2. Реално векторно пространство V се нарича ***реално евклидово пространство***, ако е зададено действие (наречено *скаларно умножение*), по силата на което на всеки два вектора a и b от V се съпоставя реално число ab така, че за произволни $a, b, c \in V$, $\lambda \in \mathbb{R}$ са изпълнени свойствата (аксиомите):

1) $ab = ba$ (*комутативност*);

2) $a(b + c) = ab + ac$ (*дистибутивност*);

3) $(\lambda a)b = \lambda(ab)$ (*хомогенност*);

4) $a^2 = aa > 0$ за $a \neq o$ (*позитивност*).

Числото $a^2 = aa$ се нарича *скаларен квадрат* на a. От 4) следва, че $a^2 = 0$, точно когато $a = o$.

Числото $|a| = \sqrt{a^2}$ се нарича евклидова дължина (норма) на вектора a.

Нека V е произволно n-мерно векторно пространство (например $\mathbb{R}^n$) и спрямо произволна негова база са дадени векторите $a(a_1, a_2, ..., a_n)$ и $b(b_1, b_2, ..., b_n)$. Тогава за числото

$$ab = a_1b_1 + a_2b_2 + ... + a_nb_n$$

лесно се проверява, че е скаларно произведение. Така въведеното скаларно умножение се нарича *естествено*. Скаларният квадрат на вектора a е равен на

$$a^2 = a_1^2 + a_2^2 + ... + a_n^2.$$

Дължината на вектора a се пресмята чрез

$$|a| = \sqrt{a^2} = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + ... + a_n^2}.$$

За вектори $a = (x_1, y_1, z_1)$ и $b = (x_2, y_2, z_2)$ в $\mathbb{R}^3$ използваме следните формули.

Скаларно произведение на a и b:

$$ab = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2.$$

Дължина на вектора a:

$$|a| = \sqrt{a^2} = \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}.$$

За вектори $a = (x_1, y_1)$ и $b = (x_2, y_2)$ в $\mathbb{R}^2$ използваме следните формули.

Скаларно произведение на a и b:

$$ab = x_1x_2 + y_1y_2.$$

Дължина на вектора a:

$$|a| = \sqrt{a^2} = \sqrt{x_1^2 + y_1^2}.$$

Пример 5.2. Дадени са векторите $a = (1, -1, 4)$ и $b = (5, 3, -1)$ в $\mathbb{R}^3$. Намерете ab и $|a|$.

За векторите $\vec{a}$ и $\vec{b}$ пресмятаме

$$ab = 1.5 + (-1).3 + 4.(-1) = -2.$$

$$|a| = \sqrt{1^2 + (-1)^2 + 4^2} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}.$$

Теорема 5.2. *Всяко крайномерно векторно пространство може да се превърне в евклидово.*

3. Дължина на вектор. Ъгъл между два вектора

Теорема 5.3. *(Неравенство на Коши–Буняковски–Шварц) За всеки два вектора* $\mathbf{a}$ *и* $\mathbf{b}$ *в реално евклидово векторно пространство е в сила неравенството*

$$(ab)^2 \leq a^2b^2. \tag{5.7}$$

Равенството се достига, точно когато $\mathbf{a}$ *и* $\mathbf{b}$ *са линейно зависими.*

Определение 5.3. ***Дължина на вектор*** в реално евклидово векторно пространство се нарича аритметичния квадратен корен от неговия скаларен квадрат. Дължината на вектора a означаваме с $|a|$, т. е.

$$|a| = \sqrt{a^2}.$$

Тогава (5.7) е еквивалентно на

$$|ab| \leq |a||b|. \tag{5.8}$$

Ако $a \neq o$ е произволен вектор, то векторът $\frac{a}{|a|}$ има дължина единица. Получаването на $\frac{a}{|a|}$ от a се нарича *нормиране на* a.

Теорема 5.4. *Дължината на вектор притежава свойствата:*

1) $|a| \geq 0$, *като равенство се достига, точно когато* $a = o$;

2) $|\lambda a| = |\lambda||a|$;

3) $||a| - |b|| \leq |a + b| \leq |a| + |b|$ (неравенство на триъгълника).

Нека и са произволни вектори в реално евклидово пространство. Тогава от (5.8) следва

$$-|a||b| \leq ab \leq |a||b|.$$

Ако $a, b \neq o$, то $|a||b| \neq 0$ и от горното равенство получаваме

$$-1 \leq \frac{ab}{|a||b|} \leq 1.$$

Следователно съществува еднозначно определен ъгъл $\varphi \in [0, \pi]$, за който

$$\cos\varphi = \frac{ab}{|a||b|}.$$

Определение 5.4. ***Ъгъл между два ненулеви вектора*** a и b в реално евклидово векторно пространство се нарича ъгълът $\varphi \in [0, \pi]$, определен от равенството

$$\cos\varphi = \frac{ab}{|a||b|}. \tag{5.9}$$

4. Ортогоналност в евклидово пространство. Метод на Грам-Шмид за ортогонализиране на системи от вектори

Определение 5.5. Два ненулеви вектора се наричат ***ортогонални***, ако скаларното им произведение е равно на нула. Ако a и b са ортогонални, означаваме с $a \perp b$.

Определение 5.6. Една база на евклидово векторно пространство се нарича *ортогонална*, *нормирана* или *ортонормирана*, ако базисните вектори са съответно ортогонални помежду си, единични или едновременно ортогонални помежду си и единични.

Теорема 5.5. *Всяка ненулева ортогонална система от вектори е линейно независима.*

Пример 5.3. Нека V е реално n-мерно векторно пространство и $\{e_1, e_2, ..., e_n\}$ е ортонормирана база на V. Тогава $e_i e_j = 0$ за $i \neq j$ и $e_i^2 = e_i e_i = 1$, $i, j = 1, 2, ..., n$. Нека $a(a_1, a_2, ..., a_n)$, $b(b_1, b_2, ..., b_n)$ относно базата $\{e_1, e_2, ..., e_n\}$. Тогава

$$\begin{aligned} ab &= (a_1 e_1 + a_2 e_2 + ... + a_n e_n)(b_1 e_1 + b_2 e_2 + ... + b_n e_n) \\ &= a_1 b_1 + a_2 b_2 + ... + a_n b_n. \end{aligned}$$

Пример 5.4. Превръщаме $\mathbb{R}^3$ в реално тримерно евклидово пространство, като въвеждаме т. нар. естествено скаларно умножение по следното правило: ако са дадени векторите $a(a_1, a_2, a_3)$, $b(b_1, b_2, b_3)$ относно произволна база на $\mathbb{R}^3$, то

$$ab = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3.$$

Тогава естествената база на $\mathbb{R}^3$, която се състои от трите линейно независими вектора $e_1(1,0,0)$, $e_2(0,1,0)$, $e_3(0,0,1)$, е ортонормирана относно така въведеното скаларно умножение, тъй като: $e_1e_2 = e_1e_3 = e_2e_3 = 0$, $e_1^2 = e_2^2 = e_3^2 = 1$.

Намерете косинуса на ъгъла между векторите $a(1, 1, 0)$ и $b(2, -1, 2)$.

Пресмятаме:

$$ab = 1.2 + 1.(-1) + 0.2 = 1,$$
$$a^2 = 1^2 + 1^2 + 0^2 = 2, \quad |a| = \sqrt{2},$$
$$b^2 = 2^2 + (-1)^2 + 2^2 = 9, \quad |b| = \sqrt{9} = 3.$$

Следователно, съгласно (5.9), получаваме

$$\cos \sphericalangle(a, b) = \frac{ab}{|a||b|} = \frac{1}{3\sqrt{2}}.$$

Пример 5.5. В равнината относно декартова координатна система са дадени точките $A(2,-2)$, $B(2,2)$ и $C(4,0)$. Намерете:

а) дължините на страните на $\triangle\ ABC$;

б) големините на ъглите на $\triangle\ ABC$;

в) координатите на петата H на перпендикуляра от C към AB.

а) Намираме координатите на насочените отсечки, колинеарни със страните на триъгълника:

$$\overrightarrow{AB} = B - A = (2,2) - (2,-2) = (0,4), \quad \overrightarrow{AC} = (2,2), \quad \overrightarrow{BC} = (2,-2).$$

и след това пресмятаме дължините им

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{0^2+4^2} = 4, \quad |\overrightarrow{AC}| = \sqrt{2^2+2^2} = 2\sqrt{2}, \quad |\overrightarrow{BC}| = 2\sqrt{2}.$$

Тъй като $|\overrightarrow{AC}| = |\overrightarrow{BC}|$, то триъгълникът е равнобедрен.

б) Нека намерим $\cos\measuredangle BAC$. Използваме формулата

$$\cos\measuredangle BAC = \frac{\overrightarrow{AB}\,\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AC}|}.$$

Пресмятаме $\overrightarrow{AB}\,\overrightarrow{AC} = 0.2 + 4.2 = 8$. Тогава

$$\cos\measuredangle BAC = \frac{8}{4.2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Следователно $\measuredangle BAC = 45^\circ$ (откъдето и $\measuredangle ABC = 45^\circ$, тъй като $AC = BC$).

Нека пресметнем $\overrightarrow{AC}\,\overrightarrow{BC} = 2.2 + 2(-2) = 0$. Следователно $\overrightarrow{AC}$ и $\overrightarrow{BC}$ са ортогонални, т.е. $\measuredangle ACB = 90^\circ$ и $\triangle\ ABC$ е правоъгълен (и равнобедрен).

в) Тъй като $\triangle\ ABC$ е равнобедрен $(AC = BC)$, то височината CH съвпада с медианата през върха C, откъдето т. H е средата на AB и координатите ѝ могат да бъдат намерени с формулата за среда на отсечка. Отг. $H(2,0)$.

В по-общия случай можем да постъпим така. Тъй като H лежи върху правата AB, то $\overrightarrow{AH}$ и $\overrightarrow{AB}$ са колинеарни. Следователно

$$\overrightarrow{AH} = x\overrightarrow{AB} = x(0,4) = (0,4x), \quad x \neq 0.$$

Освен това

$$\overrightarrow{CH} = \overrightarrow{AH} - \overrightarrow{AC} = (0,4x) - (2,2) = (-2, 4x-2).$$

Тъй като AH и CH са ортогонални, то $\overrightarrow{AH}\,\overrightarrow{CH} = 0$, откъдето

$$\overrightarrow{AH}\,\overrightarrow{CH} = -2.0 + 4x(4x-2) = 4x(4x-2).$$

Търсим ненулевия корен на уравнението $4x(4x-2) = 0$, който е $x = \frac{1}{2}$. Следователно $\overrightarrow{AH} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} = (0,2)$.

Тогава $\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AH} = (2,-2) + (0,2) = (2,0)$.

Пример 5.6. Намерете $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ така, че векторите $a_1(\lambda, 1, 1)$, $a_2(1, \lambda + \mu, -1)$, $a_3(1, -2, -\mu)$ да са ортогонални помежду си. Нормирайте така получената ортогонална система от вектори.

Имаме следните условия:

$$a_1a_2 = 2\lambda + \mu - 1 = 0,$$

$$a_1a_3 = \lambda - \mu - 2 = 0,$$

$$a_2a_3 = -2\lambda - \mu + 1 = 0.$$

Решението на горната системата е $\lambda = 1$, $\mu = -1$.
Така получаваме ортогоналната система от вектори:

$$a_1(1, 1, 1), \qquad a_2(1, 0, -1), \qquad a_3(1, -2, 1).$$

Пресмятаме $|a_1| = \sqrt{3}$, $|a_2| = \sqrt{2}$, $|a_3| = \sqrt{6}$. Нека означим единичните вектори по направлението на a_1, a_2, a_3 с a_i', $i = 1, 2, 3$. Тогава

$$a'_1 = \frac{a_1}{|a_1|} = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right),$$

$$a'_2 = \frac{a_2}{|a_2|} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right),$$

$$a'_3 = \frac{a_3}{|a_3|} = \left(\frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}\right).$$

Методът на Грам–Шмид ни дава възможност да получим ортогонална система от всяка линейно независима система вектори в евклидово пространство.

Нека $a_1, a_2, ..., a_k$ е линейно независима система. Векторите от ортогоналната система, която ще получим, означаваме с $v_1, v_2, ..., v_k$.

1. Нека положим $v_1 = a_1$. Изпълнено е $v_1 \neq o$, тъй като a_1 принадлежи на линейно независима система.

2. След това нека $v_2 = a_2 + \lambda v_1$. Коефициентът λ определяме от условието векторите v_1 и v_2 да са ортогонални, т. е. $v_1 v_2 = 0$. Така получаваме $v_1 v_2 = a_1 v_2 = a_1 a_2 + \lambda a_1^2 = 0$. Тъй като $a_1^2 \neq 0$, то

$$\lambda = -\frac{a_2 v_1}{v_1^2}.$$

3. Полагаме $v_3 = a_3 + \mu v_1 + \nu v_2$. Коефициентите μ и ν определяме съответно от условията $v_1 \perp v_3$ и $v_2 \perp v_3$, т. е. $v_1 v_3 = v_2 v_3 = 0$. Пресмятаме

$$v_1 v_3 = a_3 v_1 + \mu v_1^2,$$
$$v_2 v_3 = a_3 v_2 + \nu v_2^2.$$

Следователно

$$\mu = -\frac{a_3 v_1}{v_1^2}, \qquad \nu = -\frac{a_3 v_2}{v_2^2}.$$

Продължавайки по този начин, получаваме ненулева ортогонална система от вектори $v_1, v_2, ..., v_k$, където

$$\begin{aligned}
&v_1 = a_1,\\
&v_2 = a_2 - \frac{a_2 v_1}{v_1^2} v_1,\\
&v_3 = a_3 - \frac{a_3 v_1}{v_1^2} v_1 - \frac{a_3 v_2}{v_2^2} v_2,\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots,\\
&v_k = a_k - \frac{a_k v_1}{v_1^2} v_1 - \frac{a_k v_2}{v_2^2} v_2 - ... - \frac{a_k v_{k-1}}{v_{k-1}^2} v_{k-1}.
\end{aligned}$$

Теорема 5.6. *Всяко евклидово векторно пространство притежава ортогонални, а следователно и ортонормирани бази.*

Пример 5.7. Ортогонализирайте чрез метода на Грам-Шмид системата от вектори $a_1(0,1,1)$, $a_2(1,-1,-1)$, $a_3(1,2,1)$.

Полагаме $e_1 = a_1$. Търсим вектор e_2, ортогонален на e_1 от вида

$$e_2 = \lambda e_1 + a_2 \quad \Longrightarrow \quad \lambda e_1^2 + e_1 a_2 = 0 \quad \Longrightarrow \quad \lambda = -\frac{e_1 a_2}{e_1^2}.$$

Пресмятаме $e_1^2 = 2$ и $e_1 a_2 = -2$. Тогава

$$\lambda = 1, \qquad e_2(1,0,0).$$

Сега търсим вектор e_3, ортогонален едновременно на e_1 и e_2, от вида

$$e_3 = \mu e_1 + \nu e_2 + a_3.$$

Пресмятаме

$$\mu = -\frac{e_1 a_3}{e_1^2} = -\frac{3}{2}, \qquad \nu = -\frac{e_2 a_3}{e_2^2} = -1.$$

Така получаваме

$$e_3\left(0, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right).$$

Окончателно намерихме векторите

$$e_1(0, 1, 1), \qquad e_2(1, 0, 0), \qquad e_3\left(0, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right).$$

Приложение на скаларното умножение за търсене на текст в група от текстови файлове – метод на векторните пространства

Повечето системи за търсене в колекция от текстови файлове (документи) използват модификации на *метода на векторните пространства*, разработен от Джерард Салтън (Gerard Salton, Chris Buckley, *Introduction to Modern Information Retrieval*, McGraw-Hill, New York, 1983.) през първата половина на 60те години. Този метод трансформира текстови данни в числови вектори и матрици и използва матричния анализ за откриване на ключови характеристики и връзки в колекция от файлове.

Нека е дадена група от m на брой файла и речник от n на брой понятия (термини). Всеки файл се представя като вектор $d_i \in \mathbb{R}^n$, чийто j-ти елемент е равен на броя на срещанията на понятието j във файла с пореден номер i.

Можем да съставим матрицата

$$A = \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ \vdots \\ d_m \end{pmatrix}$$

на включените в търсеното файлове с отбелязаните понятия в тях.

Обработване на търсенето е действието, което връща на потребителя тези файлове от колекцията, които са с най-близко съдържание до потребителската заявка. Векторът на търсенето е вектор от вида $q(q_1, q_2, ..., q_n)$, съставен по следния начин

$$q_i = \begin{cases} 1 & \text{ако } i\text{-тото понятие се съдържа в} \\ & \text{потребителското търсене;} \\ 0 & \text{в противен случай.} \end{cases}$$

Доколко даден файл i отговаря на критериите на търсенето q определяме като пресмятаме величините δ_i, дефинирани чрез

$$\delta_i = \cos\theta_i = \frac{qd_i}{|q||d_i|}.$$

За избрано ниво на толерантност τ търсенето връща онези файлове, за които $\delta_i > \tau$.

Пример 5.7. Нека разгледаме група от седем документа и осем понятия (примерът се базира на пример, даден от Michael W. Berryp, Murray Browne, *Understanding Search Engines: Mathematical Modeling and Text Retrieval*, SIAM, Philadelphia, 2nd ed., 2005). Ще предполагаме, че само заглавията на документите, а не цялото им съдържание, са обработени за понятията и се включват в търсенето.

Понятия

T1: *Планета/-и/-та/-ите*
T2: *Звезда/-и/-та/-ите*
T3: *Еволюция/-та*
T4: *Живот*
T5: *Галактика/-та*
T6: *Млечен/-ния път*
T7: *Марс*
T8: *Вода*

Файлове

D1: Наличието на *вода* - признак за *живот* на *планета* около далечна *звезда*.

D2: Черните дупки - последен етап от *еволюцията* на масивни *звезди*.

D3: Раждането на *Млечния път* и танцът на *звездите* в *галактиката*.

D4: Има ли *вода* и *живот* на *планетата Марс*?

D5: Има ли други *планети* с разумен *живот* в *Млечния път*?

D6: Как да засечем молекулите на *живота* на далечни *планети*?

D7: *Еволюцията* на *живота* на Земята. Всичко е започнало от *водата*?

Съставяме матрицата на включените в търсеното файлове с отбелязаните понятия в тях

$$A = \begin{array}{c} \\ d_1 \\ d_2 \\ d_3 \\ d_4 \\ d_5 \\ d_6 \\ d_7 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccccc} T1 & T2 & T3 & T4 & T5 & T6 & T7 & T8 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array}.$$

Нека нашето търсене е относно *живот и Млечен път*.

Тогава векторът на търсенето q ще бъде съставен по аналогичен начин както векторите, съответстващи на всеки от файловете. На позициите, отговарящи на понятията *живот* и *Млечен път*, т.е. позиции 4 и 6, ще имаме единици, а всички останали координати ще бъдат нули, тъй като останалите 6 понятия не участват в това търсене.

$$q(0, \quad 0, \quad 0, \quad \mathbf{1}, \quad 0, \quad \mathbf{1}, \quad 0, \quad 0).$$

За да обработим потребителската заявка, пресмятаме (по-точно компютърната програма пресмята вместо нас) косинусите на ъглите, които векторът на търсенето сключва с векторите-редове в матрицата на файловете. Стойностите са в интервала $[0, 1]$.

$$\delta_i = \cos\theta_i = \cos\sphericalangle(q, d_i).$$

Ето резултатът от прилагането на горната формула:

$$\delta_1 = \cos\theta_1 = \frac{1}{2\sqrt{2}}, \quad \delta_2 = \cos\theta_2 = 0, \quad \delta_3 = \cos\theta_3 = \frac{1}{\sqrt{6}},$$

$$\delta_4 = \cos\theta_4 = \frac{1}{2\sqrt{2}}, \quad \delta_5 = \cos\theta_5 = \frac{2}{\sqrt{6}}, \quad \delta_6 = \cos\theta_6 = \frac{1}{2},$$

$$\delta_7 = \cos\theta_7 = \frac{1}{\sqrt{6}}.$$

Тъй като функцията косинус е намаляваща в интервала $[0, \frac{\pi}{2}]$, файлът, който съответства на най-голямата стойност на δ_i, $i = 1, 2, ..., 7$, в най-голяма степен отговаря на потребителското запитване.

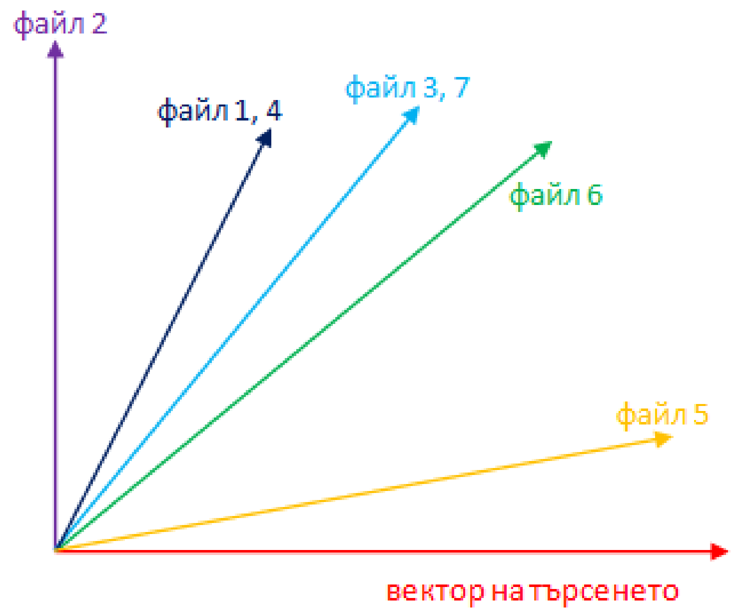
Стойностите на δ_i могат да бъдат подредени във вектор $\delta(\delta_1, \delta_2, ..., \delta_7)$, който се нарича вектор на резултата от търсенето.

В нашия пример δ има вида

$$\delta \approx (0,354; \quad 0; \quad 0,408; \quad 0,354; \quad 0,817; \quad 0,5; \quad 0,408).$$

Тогава файлът с номер 5 в най-голяма степен отговаря на запитването.

Ето как графично в 2D можем да си представим ситуацията без да отчитаме дължините на векторите и факта, че са 8-мерни.



Векторът, сключващ най-малък ъгъл (ъгъл с най-голям косинус) с вектора на търсенето, отговора на файла, който е най-близък по съдържание до него (файл 5). Векторът, сключващ най-голям ъгъл с вектора на търсенето (с най-малък косинус), е възможно най-далеч по съдържание от вектора на търсенето (файл 2).

Литература

1. Д. Мекеров, Н. Начев, Ст. Миховски, Е. Павлов, *Линейна алгебра и аналитична геометрия*, Пловдив, 1997.

2. D. C. Lay, S. R. Lay, Judi J. McDonald, *Linear algebra and its applications*, 5th ed. Pearson, 2016.

3. G. Strang, *Linear algebra and its applications*, 4th ed., Nelson Engineering, 2007, ISBN-13: 978-813-150-172-6.

4. H. Anton, C. Rorres, *Elementary Linear Angebra (applications version)*, 11th ed., Wiley, 2014, ISBN 978-1-118-43441-3.

5. S. Axler, *Linear Algebra Done Right*, 3rd ed., Springer, 2015.

6. K. Singh, *Linear Algebra Step by Step*, Oxford University Press, 2014.

7. C. D. Meyer, *Matrix Analysis and Applied Linear Algebra*, SIAM, 2000.

8. S. J. Leon, *Linear Algebra with Applications*, 9th ed., Pearson, 2015.